

SERIE

SCHAUM

**GEOMETRIA
DIFERENCIAL**

MARTIN LIPSCHUTZ

**TEORIA Y
500**

PROBLEMAS RESUELTOS

**schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill**



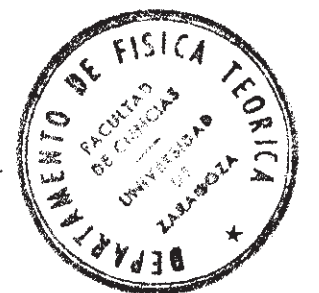
12
LIP

2360

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

GEOMETRIA
DIFERENCIAL



R. 17.528-

14
LIP

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

GEOMETRIA DIFERENCIAL

POR

MARTIN M. LIPSCHUTZ, Ph.D.

*Profesor de Matemática
Universidad de Bridgeport*

•
TRADUCCION Y ADAPTACION

DR. VICTOR ARIZA PRADA

*Profesor de Matemática, Universidad del Valle
Cali, Colombia*



McGraw-Hill

MADRID BOGOTA GUATEMALA LISBOA MEXICO NUEVA YORK PANAMA SAN JUAN SAO PAULO
AUCKLAND HAMBURGO JOHANNESBURG LONDRES MONTREAL
NUEVA DELHI PARIS SAN FRANCISCO SINGAPUR
ST. LOUIS SYDNEY TOKIO TORONTO

GEOMETRIA DIFERENCIAL

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1971, respecto a la primera edición en español por LIBROS MCGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. DE C. V.
Atiacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial; Reg. Núm. 465

ISBN 968-451-096-9

ISBN 0-07-091627-

Traducido de la primera edición en inglés de
DIFFERENTIAL GEOMETRY
Copyright © 1970, by MCGRAW-HILL BOOK Co., U. S. A.

ISBN 0-07-037985-8

ISBN: 84-7615-075-X
Depósito legal: M. 35.221-1990

De esta edición se imprimieron 1.000 ejemplares, en octubre de 1990
Impreso en Laval. Los Llanos, nave 6. Humanes (Madrid)

PRINTED IN SPAIN - IMPRESO EN ESPAÑA

Prólogo

Este libro se ha escrito para un curso semestral de geometría diferencial en el último año de estudios no graduados, o en el primer año de posgrado. En él se exponen los conceptos fundamentales de la geometría diferencial de curvas y superficies en un espacio euclidiano tridimensional, para luego aplicarlos a muchos ejemplos y problemas resueltos.

En los capítulos 1 y 2 se presenta la teoría fundamental de los vectores y del análisis vectorial de una sola variable. En el capítulo 3 se estudia el concepto de curva, mientras que los capítulos 4 y 5 se dedican a la teoría de curvas en E^3 , incluyendo temas escogidos de la teoría del contacto, la cual constituye una introducción muy natural a la teoría clásica de las curvas.

Se ha puesto mucho cuidado en la definición de superficie, con el propósito de suministrar al lector bases firmes que le permitan resolver problemas globales y, además, adelantar ulteriores estudios de geometría diferencial moderna. Para lograr estos objetivos, en los capítulos 6 y 7 se hace un repaso de asuntos relativos al análisis y a la topología de conjuntos de puntos en espacios euclidianos. Después, en el capítulo 8, se define la noción de superficie, y los capítulos 9 y 10 se dedican a la teoría de la geometría no intrínseca de superficies. En ellos se incluye una introducción a los métodos tensoriales y algunos temas escogidos de la geometría global de las superficies. El último capítulo se consagra a la teoría básica de la geometría intrínseca de superficies en E^3 .

A lo largo del libro se presentan muchas ilustraciones como ayuda visual para el lector, y al final de cada capítulo se proponen muchos y variados ejercicios, graduados en orden de dificultad, para que pueda verificar su comprensión de los temas tratados.

Con sincero placer presento a Martin Silverstein y a Jih-Shen Chiu el testimonio de mi gratitud por la ayuda que me prestaron con sus múltiples y útiles insinuaciones y críticas. De igual modo, agradezco a Daniel Schaum y a Nicola Monti su espléndida colaboración editorial, y a Henry Hayden el arreglo tipográfico y la obra de arte de las figuras. Por último, quiero expresar mi reconocimiento a Sara, mi esposa, por la cuidadosa transcripción mecanográfica del manuscrito.

MARTIN M. LIPSCHUTZ



TABLA DE MATERIAS

	Página
Capítulo 1 VECTORES Adición de vectores. Multiplicación de un vector por un escalar. Dependencia e independencia lineales. Bases y componentes. Producto escalar de vectores. Vectores ortogonales. Bases ortonormales. Bases orientadas. Producto vectorial. Productos triples e identidades vectoriales.	1
Capítulo 2 FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE REAL Rectas y planos. Entornos o vecindades. Funciones vectoriales. Funciones acotadas. Límites. Propiedades de los límites. Continuidad. Derivación. Fórmulas de derivación. Funciones de clase C^m . Fórmula de Taylor. Funciones analíticas.	22
Capítulo 3 CONCEPTO DE CURVA Representaciones regulares. Curvas regulares. Proyecciones ortogonales. Representaciones implícitas de curvas. Curvas regulares de clase C^m . Definición de longitud de arco. La longitud de arco como parámetro.	45
Capítulo 4 CURVATURA Y TORSION Vector tangente unitario. Recta tangente y plano tangente. Curvatura. Vector unitario normal principal. Normal principal y plano osculador. Binormal. Triedro móvil. Torsión. Indicatrices esféricas.	64
Capítulo 5 TEORIA DE LAS CURVAS Fórmulas de Frenet. Ecuaciones intrínsecas. El teorema fundamental de existencia y unicidad. Representación canónica de una curva. Involutas. Evolutas. Teoría del contacto. Curvas y superficies osculatrices.	85
Capítulo 6 TOPOLOGIA ELEMENTAL EN ESPACIOS EUCLIDEOS Conjuntos abiertos. Conjuntos cerrados. Puntos de acumulación o puntos límites. Conjuntos conexos. Conjuntos compactos. Aplicaciones continuas. Homeomorfismos.	109
Capítulo 7 FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL Funciones lineales. Continuidad y límites. Derivadas direccionales. Funciones derivables. Funciones compuestas. Funciones de clase C^m . Fórmula de Taylor. El teorema de la función inversa.	130
Capítulo 8 CONCEPTO DE SUPERFICIE Representaciones paramétricas regulares. Cartas locales. Definición de superficie simple. Plano tangente y recta normal. Propiedades topológicas de las superficies simples.	159

Capítulo 9	PRIMERA Y SEGUNDA FORMAS FUNDAMENTALES	182
	Primera forma fundamental. Longitud de un arco y área de una superficie. Segunda forma fundamental. Curvatura normal. Curvaturas y direcciones principales. Curvatura gaussiana y curvatura media. Líneas de curvatura. Fórmula de Rodríguez. Líneas asintóticas. Familias conjugadas de curvas.	
Capítulo 10	TEORIA DE SUPERFICIES. ANALISIS TENSORIAL	214
	Ecuaciones de Gauss-Weingarten. Las ecuaciones de compatibilidad y el teorema de Gauss. El teorema fundamental de las superficies. Algunos teoremas relativos a superficies en grande. Variedades elementales. Tensores. Álgebra tensorial. Aplicaciones de los tensores a las ecuaciones de la teoría de superficies.	
Capítulo 11	GEOMETRIA INTRINSECA	242
	Aplicaciones sobre superficies. Aplicaciones isométricas. Geometría intrínseca. Curvatura geodésica. Geodésicas. Coordenadas geodésicas. Arcos de longitud mínima. Superficies de curvatura gaussiana constante. Teorema de Gauss-Bonnet.	
Apéndice I	TEOREMA DE EXISTENCIA DE CURVAS	280
Apéndice II	TEOREMA DE EXISTENCIA DE SUPERFICIES	281
	INDICE	283

Capítulo 1

Vectores

INTRODUCCION

La geometría diferencial es el estudio de las figuras geométricas con los recursos y métodos del cálculo. En especial, la teoría introductoria analiza curvas y superficies que pertenecen al espacio euclídeo tridimensional E^3 .

Las propiedades (de curvas y superficies) que dependen únicamente de los puntos cercanos a un punto determinado de una figura, se denominan propiedades *locales*. El estudio de éstas constituye la llamada geometría diferencial *en pequeño*. Las propiedades que se extienden a la totalidad de una figura geométrica se denominan propiedades *globales*. El estudio de éstas, y en especial de la forma como se relacionan con las propiedades locales, constituye la llamada geometría *en grande*.

Ejemplo 1.1.

Sean Q y R dos puntos próximos a un punto P de una curva Γ , situada en un plano, y sea C_{QR} la circunferencia que pasa por P , Q y R , tal como lo muestra la figura 1-1. Consideremos, ahora, la posición límite de las circunferencias C_{QR} cuando Q y R se acercan a P . En general, tal posición límite será una circunferencia C tangente a Γ en P . Al radio de C se le llama *radio de curvatura* de Γ en el punto P . El radio de curvatura es, pues, un ejemplo de una propiedad local de la curva considerada, porque depende únicamente de los puntos de Γ cercanos a P .

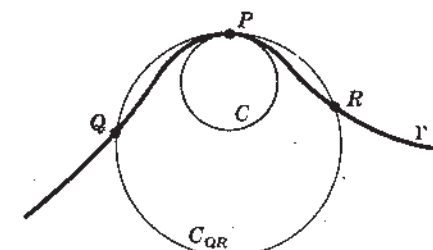


Fig. 1-1

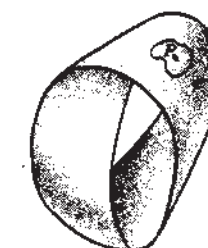


Fig. 1-2

Ejemplo 1.2.

La cinta de Moebius que aparece en la figura 1-2 es un ejemplo de una superficie de una sola cara. Esta cualidad sirve como ejemplo de una propiedad global de una figura, pues depende de la naturaleza de la superficie considerada en total. Obsérvese que cualquier porción pequeña de superficie que rodee un punto P , arbitrario, es una superficie de dos caras común y corriente; es decir, considerada *localmente*, la cinta de Moebius tiene dos caras.

En esta obra, estudiaremos en primer lugar las propiedades locales de las curvas y superficies y, después, aplicaremos los resultados a problemas de la geometría diferencial en grande. Comenzaremos con un repaso de los vectores en E^3 .

VECTORES

Llamamos espacio euclídeo E^3 al conjunto de ternas ordenadas $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, en donde a_1, a_2, a_3 son números reales. Un *vector* es cualquier punto de E^3 y, en general, se designa mediante una letra negrita, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ o, también, por P, Q, R, \dots . El *opuesto* de un

vector \mathbf{a} es el vector $-\mathbf{a}$, que viene definido por $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$. El vector *cero* es el vector $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Se llama *longitud* o *cantidad* de un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ al número real $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. Es evidente que $|\mathbf{a}| \geq 0$ y $|\mathbf{a}| = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ADICION DE VECTORES

Dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de E^3 , su suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es el vector definido por

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

La diferencia de dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} es el vector $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. En el problema 1.1 se demuestra que la adición vectorial cumple las siguientes leyes:

$$[A_1] \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{ley conmutativa})$$

$$[A_2] \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{ley asociativa})$$

$$[A_3] \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} \text{ para todo } \mathbf{a}$$

$$[A_4] \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} \text{ para todo } \mathbf{a}$$

Ejemplo 1.3.

Sean $\mathbf{a} = (1, -2, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 1, 1)$. Entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, -1, 1), \quad -\mathbf{a} = (-1, 2, 0), \quad \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-1, 3, 1), \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{5}.$$

Ejemplo 1.4.

Al aplicar las leyes desde $[A_1]$ hasta $[A_4]$ se ve que, para vectores cualesquiera \mathbf{a} y \mathbf{b} ,

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + (-\mathbf{a})) = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

De esta suerte, la ecuación vectorial $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución, $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Esa solución es única; porque si $\mathbf{a} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$, entonces

$$(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} + \mathbf{y} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \text{o} \quad \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \text{o} \quad \mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Dados dos puntos P y Q del E^3 (es decir, dos vectores P y Q), para indicar la diferencia $Q - P$ de los vectores, se introduce la notación \overrightarrow{PQ} y se describe \overrightarrow{PQ} como una flecha que comienza en P y termina en Q , como lo indica la figura 1-3. Se llama distancia de P a Q a la longitud $|\overrightarrow{PQ}|$. Es evidente que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QP}|$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$, si y sólo si $Q - P = Q' - P'$ y $PP' = \mathbf{0}$ para todo P .



Fig. 1-3

Ejemplo 1.5.

Sean $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QR}$ y $\mathbf{c} = \overrightarrow{RS}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{SP}$, como se muestra en la figura 1-4.

Entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{Q - P + R - Q} = \overrightarrow{R - P} = \mathbf{PR}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{PR} + \mathbf{RS} = \overrightarrow{R - P + S - R} = \overrightarrow{S - P} = \mathbf{PS} = -\mathbf{d}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{PS} + \mathbf{SP} = \overrightarrow{S - P + P - S} = \mathbf{0}$$

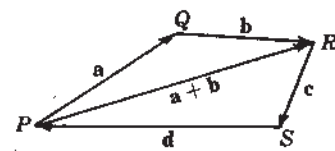


Fig. 1-4

MULTIPLICACION DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Si k es un número real y $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector, el producto $k\mathbf{a}$ se define como el vector

$$k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

Es evidente que $0\mathbf{a} = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$, para todo k y todo \mathbf{a} .

Al estudiar los vectores, es común que nos refiramos a los números reales llamándolos *escalares*. El producto $k\mathbf{a}$ se denomina *multiplicación de un vector por un escalar*.

En el problema 1.4 demostraremos que la multiplicación de vectores por escalares cumple las siguientes leyes:

$$[B_1] \quad k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a} = k_1k_2\mathbf{a}$$

$$[B_2] \quad (k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a} \quad (\text{leyes distributivas})$$

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

$$[B_3] \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Y, en fin, si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, entonces

$$|k\mathbf{a}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2} = \sqrt{k^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\text{De esta suerte, para todo } k \text{ y todo } \mathbf{a}, \quad |k\mathbf{a}| = |k| |\mathbf{a}| \quad (1.1)$$

Ejemplo 1.6.

Sean $\mathbf{a} = (1, \pi, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 2, -1)$. Entonces $2\mathbf{a} = (2, 2\pi, 0)$, $(-1)\mathbf{a} = (-1, -\pi, 0) = -\mathbf{a}$, y $\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = (1, \pi - 6, 3)$.

Ejemplo 1.7.

Sean los vectores dados $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ y, además, $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$, $\mathbf{b} = -\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$, $\mathbf{c} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - 2\mathbf{b} - \mathbf{c} &= (\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2) - 2(-\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3) - (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) \\ &= \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_2 - 4\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_2 - 5\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

Se dice que un vector \mathbf{a} tiene igual *dirección* y *sentido* que otro vector \mathbf{b} , diferente de cero, si para cualquier $k \geq 0$, es $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$. Si \mathbf{a} tiene igual sentido y dirección que \mathbf{b} , y además, igual longitud que él, entonces, de la ecuación (1.1) resulta: $|\mathbf{a}| = |k| |\mathbf{b}| = k|\mathbf{b}| = |\mathbf{b}|$. De esta suerte, si $k = 1$, es \mathbf{a} igual a \mathbf{b} . Un vector está unívocamente determinado por su dirección, su sentido y su longitud. Si $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y $k \leq 0$, entonces se dice que \mathbf{a} tiene igual dirección que \mathbf{b} pero *sentido opuesto*. Si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, puede ser que \mathbf{a} tenga igual dirección y sentido que \mathbf{b} o que tenga sentido opuesto a éste; es decir, para todo número real k , la expresión $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ significa que \mathbf{a} es *paralelo* a \mathbf{b} .

Se llama vector *unidad* a un vector \mathbf{u} cuya longitud es igual a la unidad. En general, el símbolo \mathbf{u}_a servirá para denotar un vector unidad de la misma dirección y el mismo sentido que el vector \mathbf{a} , diferente de cero. Es claro que tal vector unitario se obtiene al multiplicar \mathbf{a} por $1/|\mathbf{a}|$, es decir,

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| \quad (1.2)$$

Ejemplo 1.8.

Sean $\mathbf{a} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 6)$ y $\mathbf{c} = (-3, 3, -9)$. Puesto que $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$, los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} tienen igual dirección y sentido. Los vectores \mathbf{b} y \mathbf{c} tienen sentidos opuestos, pues $\mathbf{b} = -(2/3)\mathbf{c}$. El vector unidad en la dirección y sentido de \mathbf{a} es el vector $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = (1/\sqrt{11}, -1/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$.

Ejemplo 1.9.

En el triángulo OAB de la figura 1-5, supongamos que $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, y sea M el punto medio del lado AB . Entonces el vector \overrightarrow{OM} se puede expresar por medio de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \mathbf{a} + \overrightarrow{AM} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} \end{aligned}$$

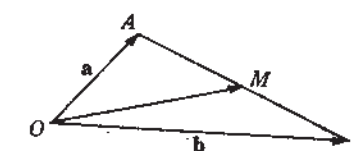


Fig. 1-5

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEALES

Definiremos ahora los conceptos de dependencia lineal e independencia lineal. Estos conceptos son muy importantes. Se dice que los vectores u_1, u_2, \dots, u_n son *linealmente dependientes* si existen escalares k_1, k_2, \dots, k_n no todos iguales a cero, tales que

$$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n = 0 \quad (1.3)$$

Se dice que los vectores u_1, u_2, \dots, u_n son *linealmente independientes*, si no son linealmente dependientes. Es decir, u_1, u_2, \dots, u_n son linealmente independientes si (1.3) implica que todos los $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

Obsérvese que un conjunto de vectores en el que se incluya el vector cero es dependiente, pues siempre se podrá escribir $10 + 0u_1 + \dots + 0u_n = 0$.

Ejemplo 1.10.

Los vectores $a = (1, -1, 0)$, $b = (0, 2, -1)$, $c = (2, 0, -1)$ son linealmente dependientes, pues $2a + b - c = 0$.

Ejemplo 1.11.

Supongamos que a es paralelo a b . En ese caso, $a = 0$, $b = 0$ o, si no, $a = kb$, es decir, $a - kb = 0$. Así, pues, a y b son dependientes. Recíprocamente, supongamos que a y b son dependientes. En ese caso, $k_1 a + k_2 b = 0$, donde, por ejemplo, $k_1 \neq 0$. Pero, entonces $a = -(k_2/k_1)b$. Así, pues, dos vectores son dependientes si y sólo si son paralelos.

En el problema 1.10 demostraremos la siguiente importante propiedad de los vectores linealmente independientes:

Teorema 1.1. Si un vector se expresa como una función lineal de vectores independientes, entonces esa expresión es *única*. Es decir, si u_1, u_2, \dots, u_n son independientes, y si

$$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n = k'_1 u_1 + k'_2 u_2 + \dots + k'_n u_n$$

$$\text{entonces } k_1 = k'_1, k_2 = k'_2, \dots, k_n = k'_n.$$

BASES Y COMPONENTES

Los tres vectores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$ son independientes, pues $k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 = (k_1, k_2, k_3)$, y, de este modo, si $k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 = 0$, entonces $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Además, cualquier vector $a = (a_1, a_2, a_3)$ se puede escribir en la forma $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, es decir, como una combinación lineal de los e_1, e_2, e_3 y, de acuerdo con el teorema 1.1, esta representación es única.

En general, llamamos *base* en E^3 a un conjunto B de vectores si: (i) cada vector de E^3 se puede escribir como una combinación lineal de los vectores de B , (ii) B es un conjunto de vectores linealmente independientes.

En el problema 1.11 se demostrará el

Teorema 1.2. Tres vectores cualesquiera, linealmente independientes, forman una base en E^3 . Recíprocamente, toda base en E^3 consta de tres vectores linealmente independientes.

Sean u_1, u_2, u_3 una base en el espacio de tres dimensiones y sea $a = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$. Los escalares a_1, a_2, a_3 , (que, para abreviar, se escriben $a_i, i = 1, 2, 3$), se denominan las *componentes* de a respecto de la base u_1, u_2, u_3 .

Del teorema 1.1 se deduce que las componentes de un vector con relación a una base dada son únicas. Sin embargo, obsérvese que las componentes de un vector dependen de la base que se escoja y, en general, las componentes cambiarán al cambiar de base. El vector 0 constituye una excepción pues sus componentes son siempre $0, 0, 0$.

En general, a las componentes de los vectores a, b, x, y, u, \dots , respecto de una determinada base, las llamaremos $a_i, b_i, x_i, y_i, u_i, \dots$.

Ejemplo 1.12.

Sea la base u_1, u_2, u_3 y los vectores $a = 2u_1 - u_2$, $b = u_2 - 2u_3$, y $c = 3u_1 + u_3$. Demostraremos que a, b, c son linealmente independientes y, por tanto, también forman una base. En efecto, si

$$k_1 a + k_2 b + k_3 c = (2k_1 + 3k_3)u_1 + (-k_1 + k_2)u_2 + (-2k_2 + k_3)u_3 = 0$$

Puesto que los u_i son independientes, se deduce que

$$2k_1 + 3k_3 = 0, \quad -k_1 + k_2 = 0, \quad -2k_2 + k_3 = 0$$

Este es un sistema de tres ecuaciones homogéneas lineales en k_1, k_2, k_3 . Y como el determinante de los coeficientes

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

entonces la *única* solución es $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. En consecuencia, los vectores a, b, c son independientes. Obsérvese que las componentes de los vectores a, b, c figuran en las columnas del determinante anterior.

Tal como lo sugiere el ejemplo precedente, se tiene, en general, el

Teorema 1.3. Sea la base u_1, u_2, u_3 y los vectores

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3$$

$$v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3$$

$$v_3 = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3$$

o, abreviadamente, $v_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij}u_i, j = 1, 2, 3$. Entonces, v_1, v_2, v_3 , es una base si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$$

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Se llama *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$ al número real

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

En el caso particular de $a = b$ se tiene la fórmula

$$a \cdot a = |a|^2 \quad (1.4)$$

En el problema 1.14 se demostrará que la multiplicación escalar cumple las siguientes leyes:

$$[C_1] \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (\text{ley de simetría})$$

$$[C_2] \quad (ka) \cdot b = k(a \cdot b) \quad (k = \text{escalar})$$

$$[C_3] \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (\text{ley distributiva})$$

$[C_4]$ La multiplicación escalar es *positiva por definición*, es decir,

$$(i) \quad a \cdot a \geq 0 \quad \text{para todo } a$$

$$(ii) \quad a \cdot a = 0 \quad \text{si y sólo si } a = 0$$

Es evidente que, por la definición, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$ para todo \mathbf{a} . Además, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, para cualquier \mathbf{a} , entonces $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0$ y, en consecuencia, de acuerdo con $[C_4](ii)$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1.13.

Sean $\mathbf{a} = (-2, 1, 0)$ y $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$. Entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 5 = |\mathbf{a}|^2$.

Ejemplo 1.14.

Sean los vectores dados \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 y sean, además, $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = 2|\mathbf{u}_1|^2 - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 - |\mathbf{u}_2|^2$$

En el desarrollo del problema 1.16 se demostrará la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, es decir,

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$$

que se cumple si y sólo si \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente dependientes. Se llama *ángulo entre dos vectores* \mathbf{a} y \mathbf{b} , diferentes de cero, y se representa por $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, a la única solución de la ecuación

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta \quad (1.5)$$

que cumple la condición $0 \leq \theta \leq \pi$.

Ejemplo 1.15.

En el triángulo ABC de la figura 1-6, sean $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, y $\theta = \angle ACB = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Si consideramos

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

obtenemos el teorema del coseno

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta + |\mathbf{b}|^2$$

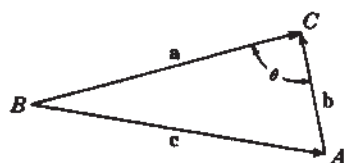


Fig. 1-6

Sea \mathbf{b} un vector diferente de cero. Se llama *proyección escalar de \mathbf{a} sobre \mathbf{b}* , y se representa por $P_b(\mathbf{a})$, al escalar $P_b(\mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/|\mathbf{b}|$. Se llama *proyección vectorial de \mathbf{a} sobre \mathbf{b}* al vector $P_b(\mathbf{a})\mathbf{u}_b$, siendo \mathbf{u}_b el vector unitario en la dirección y sentido de \mathbf{b} . Se representa por $\mathbf{P}_b(\mathbf{a})$. Se concluye que

$$\mathbf{P}_b(\mathbf{a}) = P_b(\mathbf{a})\mathbf{u}_b = ((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/|\mathbf{b}|)(\mathbf{b}/|\mathbf{b}|) = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \quad (1.6)$$

Es evidente que $P_b(\mathbf{0}) = 0$ y $\mathbf{P}_b(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, se deduce de la ecuación (1.5) que $P_b(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}| \cos \theta$ y $\mathbf{P}_b(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}| \cos \theta \mathbf{u}_b$, donde $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Se concluye de aquí que $P_b(\mathbf{a})$ y $\mathbf{P}_b(\mathbf{a})$ son independientes de la longitud de \mathbf{b} y sólo depende de su dirección, tal como se indica en la figura 1-7. Es un hecho que el vector $\mathbf{P}_b(\mathbf{a})$ también es independiente del sentido de \mathbf{b} ; es decir, $\mathbf{P}_{-\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \mathbf{P}_b(\mathbf{a})$. En efecto,

$$\mathbf{P}_{-\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b})}{|-\mathbf{b}|^2}(-\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \mathbf{P}_b(\mathbf{a})$$

El escalar $P_b(\mathbf{a})$ cambia de signo al cambiar el sentido de \mathbf{b} .



Fig. 1-7

VECTORES ORTOGONALES

Se dice que dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales, y se escribe $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. De la ecuación (1.5) se deduce que \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, o, también, si $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/2$.

Ejemplo 1.16.

Sean \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores linealmente independientes y sea $\mathbf{c} = \mathbf{a} - P_b(\mathbf{a})$. En ese caso, \mathbf{c} es un vector, diferente de cero, ortogonal a \mathbf{b} . Porque si se supone $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, entonces, de acuerdo con la ecuación (1.6), se tiene $\mathbf{0} = \mathbf{1a} - P_b(\mathbf{a}) = \mathbf{1a} - k\mathbf{b}$, donde $k = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/|\mathbf{b}|^2$, lo cual es imposible puesto que \mathbf{a} y \mathbf{b} son independientes. Por consiguiente, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Finalmente,

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \left(\mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} \right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|^2} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$$

Así, pues, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$.

BASES ORTONORMALES

Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tres vectores unitarios tales que cada uno es normal a los otros dos, como lo indica la figura 1-8. Estos vectores son independientes, pues si $k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{0} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{0} = \mathbf{e}_i \cdot (k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3) = k_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = k_i$ o $k_i = 0$ para todo i . En consecuencia, esos vectores forman una base que se denomina *base ortonormal*.

Se observa que $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, es una base ortonormal si y sólo si

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (\text{vectores unitarios})$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad (\text{ortogonales entre sí})$$

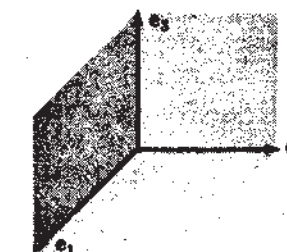


Fig. 1-8

o, dicho brevemente,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

La expresión δ_{ij} se denomina símbolo de *Kronecker* y se utilizará con frecuencia.

En el problema 1.23 se demostrará el

Teorema 1.4. Sean: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ una base ortonormal y, además $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$. Entonces,

$$(i) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

$$(ii) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2}$$

$$(iii) \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ejemplo 1.17.

Sean: $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, y $\mathbf{c} = -2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Entonces

$$(a) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(2) + (0)(1) + (2)(-2) = -2$$

$$(b) \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} = [(1)(0) + (0)(-2) + (2)(1)](2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3) = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$$

$$(c) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$(d) \quad \mathbf{u}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = (1/\sqrt{5})\mathbf{e}_1 + (2/\sqrt{5})\mathbf{e}_3$$

$$(e) \quad \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-2}{3\sqrt{5}}$$

Se da un vector, diferente de cero, $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ y $\theta_i = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$, tal como se muestra en la figura 1-9. Los escalares $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\cos \theta_3$ se llaman *cosenos directores* de \mathbf{a} . Puesto que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{a}| \cos \theta_i = a_i$, se tiene

$$\cos \theta_i = a_i/|\mathbf{a}|, \quad i = 1, 2, 3$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{e}_1 + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}\mathbf{e}_2 + \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\mathbf{e}_3 \\ &= (\cos \theta_1)\mathbf{e}_1 + (\cos \theta_2)\mathbf{e}_2 + (\cos \theta_3)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Es decir, los cosenos directores de \mathbf{a} son las componentes del vector unitario en la dirección de \mathbf{a} .

BASES ORIENTADAS

Sean $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ y $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ dos bases ortonormales ordenadas e imaginemos que la terna $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ se gira en forma que \mathbf{g}_1 y \mathbf{g}_2 coincidan con \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 respectivamente. Entonces, o \mathbf{g}_3 coincidirá con \mathbf{e}_3 , en cuyo caso diremos que $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ tiene la *misma orientación* que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, o \mathbf{g}_3 tiene igual dirección y sentido opuesto que \mathbf{e}_3 , en cuyo caso se dice que las dos bases tienen *orientación opuesta*. A fin de formular en forma precisa el concepto de orientación, no sólo para bases ortonormales sino para bases cualesquiera, se procede del modo siguiente:

Sean $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ y $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ dos bases ordenadas y sea $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij}\mathbf{u}_i$. Entonces, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tiene la misma orientación que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ si el $\det(a_{ij}) > 0$. En el problema 1.27 se demostrará que este hecho define una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las bases ordenadas de E^3 . Esta relación determina en las bases una partición con sólo dos clases de equivalencia, en forma que las bases ordenadas pertenecientes a la misma clase tienen la misma orientación y las bases ordenadas pertenecientes a clases distintas, tienen orientación opuesta.

Para distinguir gráficamente la orientación de una base ordenada, decimos que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ es una base de *mano derecha* o *dextrógira* si los vectores adoptan en el espacio las mismas direcciones y los mismos sentidos que los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha; si no, se dice que la base es un sistema de *mano izquierda* o *levógira*.

Ejemplo 1.18.

Las ternas $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ de las figuras 1-10(a) y (c) son bases de mano derecha o dextrógira. Las de las figuras 1-10(b) y (d) son bases de mano izquierda o levógira.

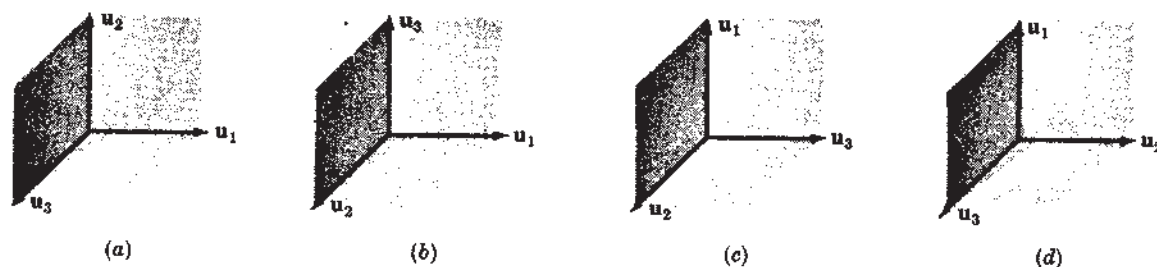


Fig. 1-10

Observación. A menos que digamos lo contrario, siempre utilizaremos bases ortonormales dextrógiras.

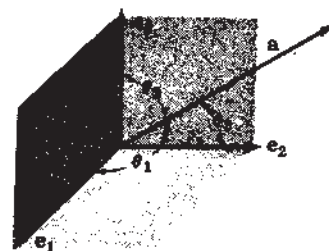


Fig. 1-9

PRODUCTO VECTORIAL

Sea $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ una base ortonormal dextrógira y los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$. Se llama *producto cruz* o *producto vectorial* de \mathbf{a} y \mathbf{b} y se representa por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, al vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3$$

Como recurso nemotécnico, obsérvese que el vector anterior se puede obtener al desarrollar el determinante

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \mathbf{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} - \mathbf{e}_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + \mathbf{e}_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.19.

Sean los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = -2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. Entonces,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_2 & -1 & 1 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

En el desarrollo del problema 1.32 se demostrará que el producto vectorial es independiente de la base ortonormal dextrógira que se escoja. Además, en el curso del problema 1.31 se demostrará el

Teorema 1.5. (i) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, donde $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

(ii) (a) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ y $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$

(b) Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$, entonces $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ es una terna linealmente independiente y dextrógira.

Como quiera que $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = 0$ si y sólo si $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$, $\theta = 0$, o $\theta = \pi$, del (i) anterior y de la forma estricta de la desigualdad de Schwarz (es decir, de que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, si y sólo si \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente independientes), se deduce el

Teorema 1.6. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ si y sólo si \mathbf{a} y \mathbf{b} son linealmente independientes.

Si \mathbf{a} y \mathbf{b} no son linealmente dependientes, es decir, si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$, el teorema 1.5 (ii) establece que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a \mathbf{a} y a \mathbf{b} y es, además, tal que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ es una terna dextrógira, tal como se ve en la figura 1-11(a).

Obsérvese que, en general, el producto vectorial no es conmutativo. Aunque el $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ tiene la misma magnitud que el $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (teorema 1.5(i)) y es paralelo al $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (teorema 1.5(ii)a) tiene sentido opuesto (teorema 1.5(ii)b). De esta manera, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, tal como lo muestra la figura 1-11(b).

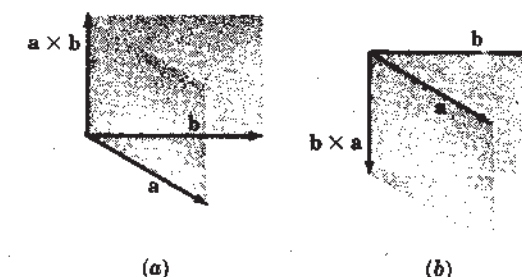


Fig. 1-11

Ejemplo 1.20.

Dada una base ortonormal $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ como la que se muestra en la figura 1-12, del teorema 1.5 se concluye que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_1 &= 0 & \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_1 &= -\mathbf{g}_3 & \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 &= \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 &= \mathbf{g}_3 & \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_2 &= 0 & \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2 &= -\mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_3 &= -\mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 &= \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_3 &= 0 \end{aligned}$$



Fig. 1-12

En el problema 1.29 demostraremos que el producto vectorial cumple las siguientes leyes:

$$[E_1] \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad (\text{ley anticonmutativa})$$

$$[E_2] \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{ley distributiva})$$

$$[E_3] \quad (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (k = \text{escalar})$$

$$[E_4] \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Obsérvese que el producto vectorial no sólo no es conmutativo sino que tampoco es asociativo; es decir, en general, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Porque, tal como se muestra en el ejemplo 1.20, $\mathbf{g}_1 \times (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_3 = -\mathbf{g}_2$, mientras que $(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_1) \times \mathbf{g}_2 = \mathbf{0} \times \mathbf{g}_2 = \mathbf{0}$.

Ejemplo 1.21.

Consideremos el triángulo ABC que se muestra en la figura 1-13. Supongamos que $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\alpha = \angle(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, $\beta = \angle(\mathbf{c}, \mathbf{a})$, y $\gamma = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Ahora, bien:

$$\mathbf{0} = \mathbf{c} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{c} \times \mathbf{b} - \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

$$\text{o sea,} \quad \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$$

Análogamente,

$$\mathbf{c} \times \mathbf{b} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\text{Por tanto,} \quad \mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\text{Pero, entonces,} \quad |\mathbf{c} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{a}|$$

$$\text{o sea,} \quad |\mathbf{c}| |\mathbf{b}| \sin \alpha = |\mathbf{c}| |\mathbf{a}| \sin \beta = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin \gamma$$

lo cual nos proporciona el teorema de los senos:

$$\frac{\sin \alpha}{|\mathbf{a}|} = \frac{\sin \beta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\sin \gamma}{|\mathbf{c}|}$$

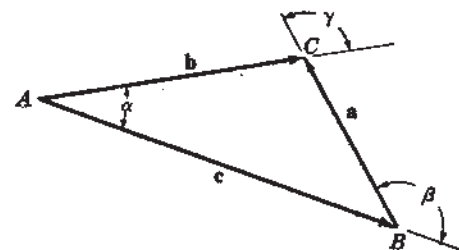


Fig. 1-13

PRODUCTOS TRIPLES E IDENTIDADES VECTORIALES

El producto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ se denomina *producto mixto* o *triple producto escalar*. Obsérvese que no es necesario poner paréntesis, pues ese algoritmo sólo puede significar $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, o sea, el producto escalar del vector \mathbf{a} por el vector $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Este producto también puede expresarse, de modo conveniente, bajo la forma de un determinante. Porque, supongamos que

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & b_1 & c_1 \\ \mathbf{e}_2 & b_2 & c_2 \\ \mathbf{e}_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

De las propiedades de los determinantes se obtiene que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \times \mathbf{b}) \quad (1.9)$$

En particular, se deduce que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$. De esta suerte, podemos abandonar el punto y la cruz en la notación del triple producto escalar y en su lugar utilizar la siguiente notación:

$$[\mathbf{abc}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

Como consecuencia inmediata del teorema 1.3 y de la ecuación (1.8) se tiene el

Teorema 1.7. $[\mathbf{abc}] = 0$ si y sólo si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son linealmente dependientes.

Existe un gran número de identidades útiles que relacionan entre sí el producto escalar y el producto vectorial. Del problema 1.35 se obtiene una identidad fundamental que es la siguiente

Teorema 1.8. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Del anterior, se pueden obtener con facilidad otras identidades tales como

$$[F_1] \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$[F_2] \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{abd}]\mathbf{c} - [\mathbf{abc}]\mathbf{d}$$

Ejemplo 1.22.

Sea $\mathbf{u} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$. Entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}]$$

utilizando (1.9) y el teorema 1.8. De aquí se sigue que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

con lo cual queda demostrado el $[F_1]$ anterior.

Problemas resueltos

ADICION DE VECTORES

1.1. Demostrar las propiedades de la suma vectorial, desde la $[A_1]$ hasta la $[A_4]$. Es decir, demostrar que $[A_1] \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $[A_2] \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $[A_3] \quad \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $[A_4] \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

$$[A_1]: \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} [A_2]: \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, (a_3 + b_3) + c_3] \\ &= [a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3)] = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \end{aligned}$$

$$[A_3]: \quad \mathbf{a} + \mathbf{0} = (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0) = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$$

$$[A_4]: \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2, a_3 - a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$$

1.2. En el paralelepípedo que se muestra en la figura 1-14 supóngase que $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OR}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OS}$. Hallar \overrightarrow{OV} , \overrightarrow{VQ} y \overrightarrow{RT} en función de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

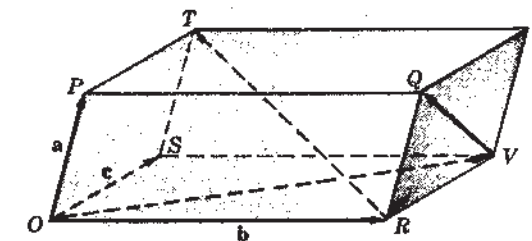


Fig. 1-14

$$\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RV} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{VQ} &= \overrightarrow{VR} + \overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{RV} + \overrightarrow{RQ} \\ &= -\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OP} = -\mathbf{c} + \mathbf{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RT} &= \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{ST} \\ &= -\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{a} \end{aligned}$$

- 1.3. Utilizando las propiedades desde la $[A_1]$ hasta la $[A_4]$, se ha demostrado (ejemplo 1.4) que la ecuación vectorial $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la *única* solución $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Utilizando este resultado, demuéstrese que:

- (a) el vector $\mathbf{0}$ es único, es decir, si $\mathbf{0}' + \mathbf{a} = \mathbf{a}$, entonces, $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$;
 (b) el vector $-\mathbf{a}$ es único, es decir, si $\mathbf{a}' + \mathbf{a} = \mathbf{0}$, entonces, $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$;
 (c) $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ para todo \mathbf{a} .
 (a) se deduce de la unicidad de la solución de la ecuación $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
 (b) se deduce de la unicidad de la solución de la ecuación $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$.
 (c) se puede obtener al considerar la ecuación $-\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esta tiene la solución $\mathbf{x} = \mathbf{0} - (-\mathbf{a}) = -(-\mathbf{a})$. Pero, además, $-\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$; de modo que $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, de acuerdo con la unicidad de la solución de la ecuación.

MULTIPLICACION POR UN ESCALAR

- 1.4. Demostrar las propiedades de la multiplicación de un vector por un escalar, desde la $[B_1]$ hasta la $[B_3]$. Es decir, demuéstrese que:

$$[B_1] \quad k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}; \quad [B_2] \quad (k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}, \quad k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}; \quad [B_3] \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

$$[B_1]: \quad k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1(k_2a_1), k_1(k_2a_2), k_1(k_2a_3)) \\ = ((k_1k_2)a_1, (k_1k_2)a_2, (k_1k_2)a_3) = (k_1k_2)\mathbf{a}$$

$$[B_2]: \quad (k_1 + k_2)\mathbf{a} = ((k_1 + k_2)a_1, (k_1 + k_2)a_2, (k_1 + k_2)a_3) \\ = (k_1a_1 + k_2a_1, k_1a_2 + k_2a_2, k_1a_3 + k_2a_3) = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$$

$$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (k(a_1 + b_1), k(a_2 + b_2), k(a_3 + b_3)) \\ = (ka_1 + kb_1, ka_2 + kb_2, ka_3 + kb_3) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$$

$$[B_3]: \quad 1\mathbf{a} = (1a_1, 1a_2, 1a_3) = (a_1, a_2, a_3) = \mathbf{a}$$

- 1.5. Si $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$ y $\mathbf{c} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$, hallar $2\mathbf{a} - 3(\mathbf{b} - \mathbf{c})$ en función de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

$$2\mathbf{a} - 3(\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 3\mathbf{c} = 2(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3) - 3(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3) + 3(\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2) \\ = 2\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2 + 6\mathbf{u}_3 - 3\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 + 3\mathbf{u}_1 + 6\mathbf{u}_2 = 5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 9\mathbf{u}_3$$

- 1.6. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de su longitud.

Sean M y M' los puntos medios de los lados AB y AC , respectivamente, del triángulo ABC que se muestra en la figura 1-15. Entonces, $AM = \frac{1}{2}AB$, $AM' = \frac{1}{2}AC$ y $MM' = AM' - AM = \frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}BC$. De esta manera, MM' es paralela a BC y tiene la mitad de su longitud.

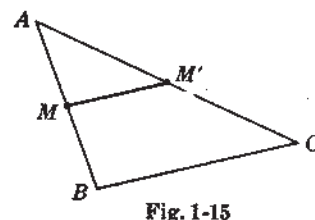


Fig. 1-15

- 1.7. Sean $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$, $\mathbf{b} = \mathbf{OB}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} = \mathbf{OC}$ tal como se muestra en la figura 1-16. Demostrar que C pertenece a la recta L , determinada por A y B si y sólo si $\mathbf{c} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$, donde $k_1 + k_2 = 1$.

Si C pertenece a L , entonces $\mathbf{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $\mathbf{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ son paralelos. Existe, pues, un k tal que

$$\mathbf{c} - \mathbf{b} = k(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad \text{o} \quad \mathbf{c} = k\mathbf{a} + (1 - k)\mathbf{b} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$$

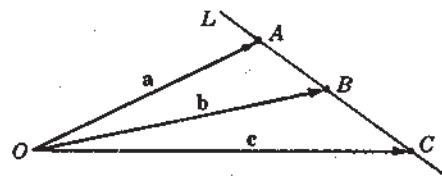


Fig. 1-16

donde $k_1 + k_2 = k + 1 - k = 1$. Recíprocamente, si $\mathbf{c} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$, donde $k_1 + k_2 = 1$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$, entonces

$$\mathbf{c} - \mathbf{b} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} - \mathbf{b} = k_1\mathbf{a} - (1 - k_2)\mathbf{b} = k_1\mathbf{a} - k_1\mathbf{b} = k_1(\mathbf{a} - \mathbf{b})$$

Es decir, $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{BC}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{BA}$ son paralelos, y, de esta suerte, C pertenece a la recta determinada por A y B .

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEALES

- 1.8. Demostrar que los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ son dependientes si y sólo si uno de los vectores es combinación lineal de los otros.

Supongamos, por ejemplo, que \mathbf{u}_1 sea combinación lineal de $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$; es decir, $\mathbf{u}_1 = k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_n\mathbf{u}_n$. Entonces $\mathbf{u}_1 - k_2\mathbf{u}_2 - \dots - k_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$, en donde al menos el coeficiente 1 de \mathbf{u}_1 es diferente de cero. De aquí se concluye que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son dependientes.

Recíprocamente, si $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son dependientes, entonces existen k_1, \dots, k_n , no todos nulos, tales que $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$. Supongamos, por ejemplo, que $k_1 \neq 0$; entonces, $\mathbf{u}_1 = -(k_2/k_1)\mathbf{u}_2 - \dots - (k_n/k_1)\mathbf{u}_n$, y, de esta manera, \mathbf{u}_1 es una combinación lineal de $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$.

- 1.9. Demostrar que un conjunto de vectores que contiene un subconjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.

Supongamos que, por ejemplo, el subconjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ del conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es dependiente. Existen entonces unos escalares k_1, \dots, k_k , no todos iguales a cero, tales que $k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$. Pero entonces

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_k\mathbf{u}_k + 0\mathbf{u}_{k+1} + \dots + 0\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

y, por ello, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ son dependientes.

- 1.10. Demostrar el teorema 1.1, a saber: Si $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son independientes y

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_n\mathbf{u}_n = k'_1\mathbf{u}_1 + k'_2\mathbf{u}_2 + \dots + k'_n\mathbf{u}_n$$

entonces $k_1 = k'_1, k_2 = k'_2, \dots, k_n = k'_n$.

Supongamos que $k_j \neq k'_j$; entonces

$$(k_1 - k'_1)\mathbf{u}_1 + (k_2 - k'_2)\mathbf{u}_2 + \dots + (k_j - k'_j)\mathbf{u}_j + \dots + (k_n - k'_n)\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

en donde $k_j - k'_j \neq 0$. Pero, ello implica que $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ son dependientes, lo cual contradice la hipótesis.

BASES Y COMPONENTES

- 1.11. Demostrar que cualquier vector del espacio E^3 se puede expresar como combinación lineal de tres vectores independientes; y, en consecuencia, tres vectores independientes forman una base en E^3 .

Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son linealmente independientes, entonces la ecuación

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

tiene la única solución $x = y = z = 0$. De igual modo, el sistema

$$xa_1 + yb_1 + zb_1 = 0$$

$$xa_2 + yb_2 + zb_2 = 0$$

$$xa_3 + yb_3 + zb_3 = 0$$

tiene la única solución trivial $x = y = z = 0$, y este caso sólo ocurre si el determinante de la matriz de los coeficientes es diferente de cero, es decir,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

Pero, en ese caso, para cualquier vector $u = (u_1, u_2, u_3)$ de E^3 el sistema

$$\begin{aligned} xa_1 + yb_1 + zb_1 &= u_1 \\ xa_2 + yb_2 + zb_2 &= u_2 \\ xa_3 + yb_3 + zb_3 &= u_3 \end{aligned}$$

tiene una solución $x = k_1, y = k_2, z = k_3$, lo cual significa que $u = k_1a + k_2b + k_3c$, que era lo que buscábamos.

1.12. Demostrar que cuatro o más vectores cualesquiera de E^3 son linealmente dependientes.

Consideremos los vectores $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n$. Podemos suponer que u_1, u_2, u_3 son independientes; pues, de lo contrario, $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n$ al tener un subconjunto dependiente, sería dependiente. Pero, si u_1, u_2, u_3 son independientes, ellos constituyen una base y, de esta suerte, $u_4 = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$, lo cual implica que u_1, u_2, u_3, u_4 son dependientes. Y, en consecuencia, $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n$ son también dependientes.

1.13. Supongamos que u_1, u_2, u_3 forman una base y, además, que $a = u_1 - u_2 + 2u_3$, $b = u_2 - u_3$ y $c = -u_2$. Hallar las componentes de $2a - b - 2c$ en función de u_1, u_2, u_3 .

$$\begin{aligned} 2a - b - 2c &= 2(u_1 - u_2 + 2u_3) - (u_2 - u_3) - 2(-u_2) \\ &= 2u_1 - 2u_2 + 4u_3 - u_2 + u_3 + 2u_2 = 2u_1 - u_2 + 5u_3 \end{aligned}$$

De este modo, las componentes de $2a - b - 2c$ respecto de u_1, u_2, u_3 son 2, -1, 5.

PRODUCTO ESCALAR

1.14. Demostrar las propiedades del producto escalar de vectores, desde la [C₁] hasta la [C₄], de la página 5.

$$[C_1]: a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = b \cdot a$$

$$[C_2]: (ka) \cdot b = ka_1b_1 + ka_2b_2 + ka_3b_3 = k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = k(a \cdot b)$$

$$\begin{aligned} [C_3]: a \cdot (b + c) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = a \cdot b + a \cdot c \end{aligned}$$

$$[C_4]: \text{Obviamente } a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0 \text{ y } a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \text{ sii } a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

1.15. En el triángulo OAB que se muestra en la figura 1-17; supongamos que $a = OA$ y $b = OB$. Si $|OA| = 2$, $|OB| = 3$ y $\angle AOB = 30^\circ$, hallar: (a) $a \cdot b$, (b) $P_a(b)$, (c) $P_a(b)$.

$$\begin{aligned} (a) \quad a \cdot b &= |a| |b| \cos \angle(a, b) \\ &= (2)(3) \cos 30^\circ = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(b) \quad P_a(b) = (a \cdot b)/|a| = 3\sqrt{3}/2$$

$$(c) \quad P_a(b) = P_a(b) \frac{a}{|a|} = (3\sqrt{3}/4)a$$

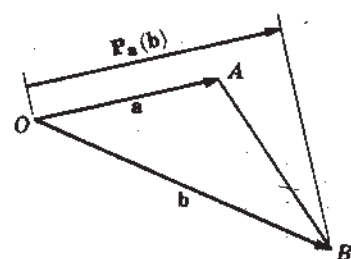


Fig. 1-17

1.16. Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|a \cdot b| \leq |a| |b|$, para la cual vale la igualdad si y sólo si a y b son linealmente dependientes.

Es evidente que la desigualdad vale para el caso en que $a = 0$ o $b = 0$; así, podemos suponer que $a, b \neq 0$. Entonces, de acuerdo con [C₄],

$$0 = \left(\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} a \pm \sqrt{\frac{|a|}{|b|}} b \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} a \pm \sqrt{\frac{|a|}{|b|}} b \right) = 2 \frac{|a| |b|}{|a| |b|} \pm 2a \cdot b$$

o sea, $\pm 2a \cdot b \leq 2|a| |b|$, lo cual proporciona la desigualdad deseada $|a \cdot b| \leq |a| |b|$. El resto del

enunciado se desprende del hecho de que esa desigualdad se cumple sii $\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} a + \sqrt{\frac{|a|}{|b|}} b = 0$ o si $\sqrt{\frac{|b|}{|a|}} a - \sqrt{\frac{|a|}{|b|}} b = 0$ que es lo que ocurre si y sólo si a y b son linealmente dependientes.

1.17. Demostrar la desigualdad triangular $|a \pm b| \leq |a| + |b|$.

$$|a \pm b|^2 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) = |a|^2 + |b|^2 \pm 2(a \cdot b) \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a| |b| = (|a| + |b|)^2$$

y el resultado que se desea se obtiene sacando raíces cuadradas.

1.18. Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a \pm b|$ para todo a y b .

De acuerdo con la desigualdad triangular,

$$|a| = |a \pm b \mp b| \leq |a \pm b| + |b| \quad \text{o} \quad |a| - |b| \leq |a \pm b|$$

$$\text{Además, } |b| = |\pm b| = |a \pm b - a| \leq |a \pm b| + |a| \quad \text{o} \quad |b| - |a| \leq |a \pm b|$$

De este modo, $||a| - |b|| = \text{Max}(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a \pm b|$, que es lo que se quería demostrar.

VECTORES ORTOGONALES

1.19. Sea c un vector normal a los vectores a y b . Demostrar que c es ortogonal a $k_1a + k_2b$, para cualesquiera k_1, k_2 .

Como quiera que c es ortogonal a a y b , $c \cdot a = 0$ y $c \cdot b = 0$. De donde,

$$c \cdot (k_1a + k_2b) = k_1(c \cdot a) + k_2(c \cdot b) = 0$$

Y, de esta manera, es c ortogonal a $k_1a + k_2b$.

1.20. Supongamos que u_1, u_2, u_3 formen una base y que se defina

$$a = u_1, \quad b = u_2 - P_a(u_2), \quad c = u_3 - P_a(u_3) - P_b(u_3)$$

Demostrar que a, b, c son vectores, no todos iguales a cero, ortogonales entre sí.

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a \cdot (u_2 - P_a(u_2)) = a \cdot [u_2 - (a \cdot u_2)a/|a|^2] \\ &= a \cdot u_2 - (a \cdot u_2)(a \cdot a)/|a|^2 = a \cdot u_2 - a \cdot u_2 = 0 \end{aligned}$$

y, de esta suerte, $a \perp b$. Además,

$$\begin{aligned} a \cdot c &= a \cdot [u_3 - P_a(u_3) - P_b(u_3)] = a \cdot [u_3 - (a \cdot u_3)a/|a|^2 - (b \cdot u_3)b/|b|^2] \\ &= a \cdot u_3 - a \cdot u_3 - (b \cdot u_3)(a \cdot b)/|b|^2 \end{aligned}$$

Puesto que $a \cdot b = 0$, $a \cdot c = a \cdot u_3 - a \cdot u_3 = 0$ y, de este modo, $a \perp c$. Finalmente,

$$\begin{aligned} b \cdot c &= b \cdot [u_3 - (a \cdot u_3)a/|a|^2 - (b \cdot u_3)b/|b|^2] \\ &= (b \cdot u_3) - (a \cdot u_3)(a \cdot b)/|a|^2 - (b \cdot u_3)(b \cdot b)/|b|^2 = (b \cdot u_3) - (b \cdot u_3) = 0 \end{aligned}$$

Así, pues, a, b, c son ortogonales entre sí (cada uno a los otros dos). Por otra parte, son vectores diferentes de cero, porque $a = u_1 \neq 0$; si $b = 0$,

$$0 = b = u_2 - P_a(u_2) = u_2 - ka = u_2 - ku_1$$

lo que resulta imposible, pues u_1 y u_2 son independientes; si $c = 0$,

$$0 = c = u_3 - P_a(u_3) - P_b(u_3) = u_3 - k_1a - k_2b = u_3 - k_1u_1 - k_2(u_2 - ku_1) = u_3 - k_3u_1 - k_2u_2$$

lo que resulta imposible porque u_1, u_2, u_3 son independientes.

BASES ORTONORMALES

1.21. Demostrar que (a) $2\delta_{21} + 3\delta_{22} + 4\delta_{23} = 3$, (b) $\sum_{j=1}^3 \delta_{ij}b_j = b_i$.



(a) $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$. Por tanto, $2\delta_{21} + 3\delta_{22} + 4\delta_{23} = 2(0) + 3(1) + 4(0) = 3$.

(b) Al igual que en el anterior, la única contribución proviene de δ_{ii} . Así, pues,

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} b_j = \delta_{ii} b_i = b_i.$$

1.22. Supongamos que u_1, u_2, u_3 forman una base y que $v_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} u_j$ y $u_j = \sum_{i=1}^3 b_{ji} v_i$. Demostrar que $\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$.

Escribimos $u_j = \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} u_i = \sum_{k=1}^3 b_{kj} v_k$, en donde hemos cambiado el nombre de los índices desde i hasta k . Además, $v_k = \sum_{i=1}^3 a_{ik} u_i$. Sustituyendo,

$$\sum_{i=1}^3 \delta_{ij} u_i = \sum_{k=1}^3 b_{kj} \sum_{i=1}^3 a_{ik} u_i = \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} \right] u_i$$

Como quiera que u_1, u_2, u_3 son independientes, establézcase la igualdad de componentes y se obtendrá $\delta_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}$.

1.23. Demostrar el teorema 1.4: Si e_1, e_2, e_3 forman una base ortonormal y $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ y $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$, entonces

(a) $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$, (b) $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, (c) $a_i = a \cdot e_i$, $i = 1, 2, 3$.

(a) $a \cdot b = (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3)$
 $= a_1 b_1 (e_1 \cdot e_1) + a_1 b_2 (e_1 \cdot e_2) + a_1 b_3 (e_1 \cdot e_3)$
 $+ a_2 b_1 (e_2 \cdot e_1) + a_2 b_2 (e_2 \cdot e_2) + a_2 b_3 (e_2 \cdot e_3)$
 $+ a_3 b_1 (e_3 \cdot e_1) + a_3 b_2 (e_3 \cdot e_2) + a_3 b_3 (e_3 \cdot e_3)$
 $= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Dicho brevemente, tenemos

$$a \cdot b = \left(\sum_{i=1}^3 a_i e_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j e_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j (e_i \cdot e_j)$$

o sea, $a \cdot b = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$

(b) $|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

(c) $a \cdot e_i = \left(\sum_j a_j e_j \right) \cdot e_i = \sum_j a_j (e_j \cdot e_i) = \sum_j a_j \delta_{ji} = a_i$

1.24. Sean $a = e_1 - 2e_2 + 3e_3$ y $b = e_2 - e_3$. Hallar, (a) $a \cdot b$, (b) $|a|$, (c) u_a , (d) $P_a(b)$, (e) $P_a(b)$, (f) $\cos \angle(a, b)$, (g) $a \cdot e_1, a \cdot e_2, a \cdot e_3$, (h) cosenos directores de a .

(a) $a \cdot b = (1)(0) + (-2)(1) + (3)(-1) = -5$

(b) $|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$

(c) $u_a = a/|a| = (1/\sqrt{14})(e_1 - 2e_2 + 3e_3)$

(d) $P_a(b) = (a \cdot b)/|a| = -5/\sqrt{14}$

(e) $P_a(b) = P_a(b)u_a = -(5/14)(e_1 - 2e_2 + 3e_3)$

(f) $\cos \angle(a, b) = (a \cdot b)/|a||b| = (-5/\sqrt{14})\sqrt{2} = -5/(2\sqrt{7})$

(g) $a \cdot e_1 = 1, a \cdot e_2 = -2, a \cdot e_3 = 3$

(h) $\cos \angle(a, e_1) = a_1/|a| = 1/\sqrt{14}$; $\cos \angle(a, e_2) = a_2/|a| = -2/\sqrt{14}$; $\cos \angle(a, e_3) = a_3/|a| = 3/\sqrt{14}$

1.25. Sean u_1, u_2, u_3 una base arbitraria. Demostrar que existe una base única v_1, v_2, v_3 tal que

$$\begin{aligned} v_1 \cdot u_1 &= 1 & v_2 \cdot u_1 &= 0 & v_3 \cdot u_1 &= 0 \\ v_1 \cdot u_2 &= 0 & v_2 \cdot u_2 &= 1 & v_3 \cdot u_2 &= 0 \\ v_1 \cdot u_3 &= 0 & v_2 \cdot u_3 &= 0 & v_3 \cdot u_3 &= 1 \end{aligned}$$

o sea, $v_i \cdot u_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. La base v_1, v_2, v_3 se denomina la *base dual* o *base recíproca* de la u_1, u_2, u_3 . De acuerdo con esto, si $a = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$ y $b = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3$, entonces

$$a \cdot b = \left(\sum_i a_i u_i \right) \cdot \left(\sum_j b_j v_j \right) = \sum_i \sum_j a_i b_j (u_i \cdot v_j) = \sum_i \sum_j a_i b_j \delta_{ij} = \sum_i a_i b_i$$

Obsérvese que una base ortonormal es su propia dual.

Supongamos que e_1, e_2, e_3 forman una base ortonormal y que

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + a_{13} e_3 \\ u_2 &= a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + a_{23} e_3 \\ u_3 &= a_{31} e_1 + a_{32} e_2 + a_{33} e_3 \end{aligned}$$

y

$$v_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Entonces

$$\begin{aligned} v_1 \cdot u_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 1 \\ v_1 \cdot u_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0 \\ v_1 \cdot u_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = 0 \end{aligned}$$

es un sistema de tres ecuaciones para x_1, x_2, x_3 . Como quiera que $\det(a_{ij}) \neq 0$, existe una solución única $v_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Análogamente, se tienen soluciones únicas para v_2 y v_3 . Falta demostrar que v_1, v_2, v_3 son independientes y, en consecuencia, forman una base. Consideremos que

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 k_i v_i = 0$$

Si multiplicamos por u_j , $j = 1, 2, 3$, obtendremos:

$$\left[\sum_{i=1}^3 k_i v_i \right] \cdot u_j = \sum_{i=1}^3 k_i (v_i \cdot u_j) = \sum_{i=1}^3 k_i \delta_{ij} = k_j = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

De este modo, $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ y v_1, v_2, v_3 son independientes y, en consecuencia, forman una base.

ORIENTACION

1.26. Demostrar que la terna (v_1, v_2, v_3) , donde $v_1 = 2u_1 - u_2 + 2u_3$, $v_2 = u_2 + u_3$ y $v_3 = -u_1 + 2u_2 + u_3$, tiene la misma orientación que la (u_1, u_2, u_3) .

El determinante de las componentes es: $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$.

Y, en consecuencia, (v_1, v_2, v_3) tiene la misma orientación que la (u_1, u_2, u_3) .

1.27. Demostrar que la orientación es una *relación de equivalencia* sobre el conjunto de todas las bases ordenadas de E^3 . Es decir, demostrar que:

- (a) (v_1, v_2, v_3) tiene la misma orientación que (v_1, v_2, v_3) para cualquier (v_1, v_2, v_3) .
 (b) Si (v_1, v_2, v_3) tiene la misma orientación que (u_1, u_2, u_3) , entonces (u_1, u_2, u_3) tiene la misma orientación que (v_1, v_2, v_3) .

(c) Si (w_1, w_2, w_3) tiene la misma orientación que (v_1, v_2, v_3) y (v_1, v_2, v_3) tiene la misma orientación que (u_1, u_2, u_3) , entonces (w_1, w_2, w_3) tiene la misma orientación que (u_1, u_2, u_3) .

(a) Escribimos $v_j = \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} v_i$, $j = 1, 2, 3$. Puesto que $\det(\delta_{ij}) = 1$, (v_1, v_2, v_3) tiene la misma orientación que (v_1, v_2, v_3) .

(b) Sea $v_j = \sum_i a_{ij} u_i$ y $u_j = \sum_i b_{ij} v_i$. De acuerdo con el problema 1.22, $\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$. Esto se verifica, además, fácilmente desarrollando la igualdad $\det\left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}\right) = \det(a_{ij}) \det(b_{ij})$, y, de este modo,

$$\det(b_{ij}) = \frac{\det(\delta_{ij})}{\det(a_{ij})} = \frac{1}{\det(a_{ij})}$$

Puesto que (v_1, v_2, v_3) tiene la misma orientación que (u_1, u_2, u_3) , $\det(a_{ij}) > 0$. Y de aquí, $\det(b_{ij}) > 0$, y, de esta manera, (u_1, u_2, u_3) tiene la misma orientación que (v_1, v_2, v_3) .

(c) Sea $v_k = \sum_{i=1}^3 a_{ik} u_i$ y $w_j = \sum_{k=1}^3 b_{kj} v_k$. Sustituyendo, obtenemos:

$$w_j = \sum_{k=1}^3 b_{kj} \sum_{i=1}^3 a_{ik} u_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} \right) u_i$$

Así, pues, $w_j = \sum_{i=1}^3 c_{ij} u_i$ donde $c_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}$, $i, j = 1, 2, 3$. Además,

$$\det(c_{ij}) = \det\left(\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj}\right) = \det(a_{ij}) \det(b_{ij})$$

Puesto que (w_1, w_2, w_3) tiene la misma orientación que la (v_1, v_2, v_3) y (v_1, v_2, v_3) tiene la misma orientación que la (u_1, u_2, u_3) , entonces $\det(b_{ij}) > 0$ y $\det(a_{ij}) > 0$; y, de aquí, $\det(c_{ij}) > 0$. De esta suerte, (w_1, w_2, w_3) tiene la misma orientación que (u_1, u_2, u_3) .

PRODUCTO VECTORIAL

1.28. Sea $a = 2e_1 - e_2 + e_3$, $b = e_1 + 2e_2 - e_3$, $c = e_2 + 2e_3$. Determinar (a) $a \times b$, (b) $b \times a$, (c) $a \times (b \times c)$, (d) $(a \times b) \times c$, (e) $(a \times b) \cdot c$, (f) $a \times (b + c) - a \times b - a \times c$.

$$(a) \ a \times b = \det \begin{pmatrix} e_1 & 2 & 1 \\ e_2 & -1 & 2 \\ e_3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = e_1 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - e_2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + e_3 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -e_1 + 3e_2 + 5e_3$$

$$(b) \ b \times a = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 2 \\ e_2 & 2 & -1 \\ e_3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = e_1 - 3e_2 - 5e_3. \text{ Obsérvese que } a \times b = -(b \times a).$$

$$(c) \ a \times (b \times c) = (2e_1 - e_2 + e_3) \times \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_2 & 2 & 1 \\ e_3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (2e_1 - e_2 + e_3) \times (5e_1 - 2e_2 + e_3) = \det \begin{pmatrix} e_1 & 2 & 5 \\ e_2 & -1 & -2 \\ e_3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = e_1 + 3e_2 + e_3$$

$$(d) \ (a \times b) \times c = (-e_1 + 3e_2 + 5e_3) \times (e_2 + 2e_3) = \det \begin{pmatrix} e_1 & -1 & 0 \\ e_2 & 3 & 1 \\ e_3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 - e_3$$

Obsérvese que $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$.

$$(e) \ (a \times b) \cdot c = (-e_1 + 3e_2 + 5e_3) \cdot (e_2 + 2e_3) = (-1)(0) + (3)(1) + (5)(2) = 13$$

$$(f) \ a \times (b + c) = \det \begin{pmatrix} e_1 & 2 & 1 \\ e_2 & -1 & 3 \\ e_3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4e_1 - e_2 + 7e_3, \ a \times b = -e_1 + 3e_2 + 5e_3, \ y \ a \times c = -3e_1 - 4e_2 + 2e_3. \text{ Entonces,}$$

$$a \times (b + c) - a \times b - a \times c = (-4e_1 - e_2 + 7e_3) - (-e_1 + 3e_2 + 5e_3) - (-3e_1 - 4e_2 + 2e_3) = 0$$

1.29. Demostrar que (a) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, (b) $(ka) \times b = k(a \times b)$.

Sean: $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$, $c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$.

$$(a) \ a \times (b + c) = [a_2(b_3 + c_3) - a_3(b_2 + c_2)]e_1 + [a_3(b_1 + c_1) - a_1(b_3 + c_3)]e_2 + [a_1(b_2 + c_2) - a_2(b_1 + c_1)]e_3$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 + (a_2c_3 - a_3c_2)e_1 + (a_3c_1 - a_1c_3)e_2 + (a_1c_2 - a_2c_1)e_3$$

$$= a \times b + a \times c$$

$$(b) \ (ka) \times b = (ka_2b_3 - ka_3b_2)e_1 + (ka_3b_1 - ka_1b_3)e_2 + (ka_1b_2 - ka_2b_1)e_3 = k[(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3] = k(a \times b)$$

1.30. Demostrar que $|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - |a \cdot b|^2$.

Sean: $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ y $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$.

$$|a \times b|^2 = (a \times b) \cdot (a \times b) = [(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3] \cdot [(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3]$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_2b_2a_3b_3 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_1b_1a_2b_2$$

$$|a|^2 |b|^2 - |a \cdot b|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3$$

La identidad que se necesita demostrar se deduce por comparación con la anterior.

1.31. Demostrar el teorema 1.5, a saber:

- (i) $|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$, $\theta = \angle(a, b)$
 (ii) (a) $(a \times b) \perp a$ y $(a \times b) \perp b$
 (b) Si $(a \times b) \neq 0$, $(a, b, a \times b)$ tiene la misma orientación que la (e_1, e_2, e_3) .

(i) Utilizando el problema precedente,

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - |a \cdot b|^2 = |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta = (|a| |b| \sin \theta)^2$$

Puesto que $\sin \theta \geq 0$, para $0 \leq \theta \leq \pi$, tenemos que $|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$.

(ii) (a) Sean: $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ y $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$.

$$(a \times b) \cdot a = [(a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3] \cdot (a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3)$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0$$

Análogamente, $(a \times b) \cdot b = 0$. Y, de aquí, $(a \times b) \perp a$ y $(a \times b) \perp b$.

(b) El determinante de las componentes de $(a, b, a \times b)$ es

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & (a_2b_3 - a_3b_2) \\ a_2 & b_2 & (a_3b_1 - a_1b_3) \\ a_3 & b_3 & (a_1b_2 - a_2b_1) \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = |a \times b|^2$$

Si $a \times b \neq 0$, entonces, $|a \times b|^2 > 0$ y $(a, b, a \times b)$ tiene la misma orientación que la (e_1, e_2, e_3) .

1.32. Demostrar que la definición del producto vectorial es independiente de la base.

Sean \mathbf{c} y \mathbf{c}' los vectores que representan los productos vectoriales de \mathbf{a} y \mathbf{b} respecto de dos bases diferentes ortonormales dextrógiras. Podemos suponer que \mathbf{a} y \mathbf{b} son independientes. De no serlo, de acuerdo con el teorema 1.6, $\mathbf{c} = \mathbf{c}' = 0$. Según el teorema 1.5(ii), $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ es una base y se puede escribir $\mathbf{c}' = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Además, de acuerdo con el teorema 1.5(ii), $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}' = \alpha|\mathbf{a}|^2 + \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}' = \alpha(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}) + \gamma|\mathbf{b}|^2 = 0$. Como quiera que \mathbf{a} y \mathbf{b} son independientes, entonces $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 \neq 0$. Y, de aquí, $\alpha = \beta = 0$ y $\mathbf{c}' = \gamma\mathbf{c}$. Puesto que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}')$ y $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ son ambas dextrógiras, es $\gamma > 0$. De acuerdo con el teorema 1.5(i), $|\mathbf{c}'| = |\mathbf{c}| = \gamma|\mathbf{c}'|$. Así, pues, $\gamma = 1$ y $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$.

PRODUCTOS TRIPLES

1.33. Sean: $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{c} = -\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$. Hallar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 5$$

1.34. Demostrar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Sean: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$. Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

1.35. Demostrar el teorema 1.8, a saber: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Sean: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \times [(b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{e}_1 + (b_3c_1 - c_3b_1)\mathbf{e}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{e}_3] \\ &= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

De esta manera, comparando con lo anterior,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)(c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3) \\ &= (a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2c_1b_2 - a_3c_1b_3)\mathbf{e}_1 \\ &\quad + (b_2a_1c_1 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 - c_2a_3b_3)\mathbf{e}_2 \\ &\quad + (b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 - c_3a_1b_1 - c_3a_2b_2)\mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \end{aligned}$$

Problemas propuestos

1.36. En el tetraedro $OPQR$ que se muestra en la figura 1-18, sean $\mathbf{a} = \mathbf{OP}$, $\mathbf{b} = \mathbf{OQ}$, $\mathbf{c} = \mathbf{OR}$ y sea M el punto medio de RQ . Hallar \mathbf{PM} en función de \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Resp. $\mathbf{PM} = \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c} - \mathbf{a}$

1.37. Sean: $\mathbf{a} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{c} = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$. Hallar $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ en función de \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 . Resp. $3\mathbf{u}_1 + 9\mathbf{u}_2 - 12\mathbf{u}_3$

1.38. Demostrar que $|\mathbf{a} \pm \mathbf{b} \pm \mathbf{c}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}|$.

1.39. Demostrar que los puntos medios de los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero coinciden.

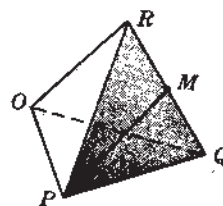


Fig. 1-18

1.40. Demostrar que las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un punto.

1.41. Demostrar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto.

1.42. Demostrar que un subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independientes es linealmente independiente.

1.43. Demostrar que dos vectores de E^2 linealmente independientes forman una base de E^2 .

1.44. Demostrar que tres o más vectores de E^2 son linealmente dependientes.

1.45. Demostrar que si a_i, b_i, c_i son las componentes de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ respecto de una base, entonces (i) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si $a_i = b_i$, (ii) $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ si $c_i = a_i + b_i$, (iii) $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ si $b_i = ka_i$.

1.46. Supongamos que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ forman una base. Determinar si $\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3$ son linealmente independientes. Resp. Sí

1.47. Supongamos que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ forman una base y que $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$. Demostrar que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ forman una base y hallar las componentes de $\mathbf{a} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3$ en función de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Resp. $\mathbf{u}_1 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_3 = 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$, $\mathbf{a} = -8\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$

1.48. Sean: $\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Hallar (a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (b) $|\mathbf{a}|$, (c) $\cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, (d) $P_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$, (e) $P_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$. Resp. (a) -4, (b) $\sqrt{6}$, (c) $-4/(3\sqrt{2})$, (d) $-4/\sqrt{3}$, (e) $-(4/3)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

1.49. Hallar los cosenos directores del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$. Resp. $2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14}$

1.50. Determinar x de modo que $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - x\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sean ortogonales. Resp. $x = 1$

1.51. Factorizar $\alpha\gamma|\mathbf{a}|^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \beta\delta|\mathbf{b}|^2$. Resp. $(\alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) \cdot (\gamma\mathbf{a} - \delta\mathbf{b})$

1.52. Sean $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$. Hallar un vector \mathbf{c} , tal que $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ formen los lados de un triángulo rectángulo. Resp. $\mathbf{c} = \pm(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

1.53. Demostrar que $\mathbf{g}_1 = (1/3)(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $\mathbf{g}_2 = (1/3)(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$ y $\mathbf{g}_3 = (1/3)(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3)$ forman una base ortonormal y hallar $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ en función de $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$.

Resp. $\mathbf{e}_1 = (1/3)(2\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + 2\mathbf{g}_3)$, $\mathbf{e}_2 = (1/3)(-2\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3)$, $\mathbf{e}_3 = (1/3)(\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 - 2\mathbf{g}_3)$

1.54. Demostrar que la suma de los cuadrados de todos los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.

1.55. Si $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{c} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, hallar (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, (c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = [\mathbf{abc}]$, (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Resp. (a) $5\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, (b) $-5\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, (c) 10, (d) $2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$

1.56. Hallar un vector unitario ortogonal a $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Resp. $\pm(1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$

1.57. Hallar la distancia d del punto P al plano S , siendo $\mathbf{a} = \mathbf{OP} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ el vector que va del punto O perteneciente a S al punto P y $\mathbf{b} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ están en S . Resp. $d = |P_{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}(\mathbf{a})|$

1.58. Demostrar que $[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3][\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3] = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{pmatrix}$.

1.59. Demostrar que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{d}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = 0$.

1.60. Demostrar que $[(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})(\mathbf{e} \times \mathbf{f})] = [\mathbf{abd}][\mathbf{cef}] - [\mathbf{abc}][\mathbf{def}]$.

1.61. Demostrar que si \mathbf{a} y \mathbf{b} están en un plano normal a un plano que contiene a \mathbf{c} y \mathbf{d} , entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 0$

1.62. Sea $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ una base arbitraria y sean $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3}{[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3]}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1}{[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3]}$, $\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2}{[\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3]}$. Demostrar que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ es dual de $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, o sea, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.

1.63. Sean $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ y $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ bases duales. Demostrar que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ tiene la misma orientación que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

1.64. Demostrar que existen dos clases de equivalencia de bases orientadas. O sea, demostrar que si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ y $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ no tienen la misma orientación que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, entonces $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ y $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ tienen la misma orientación. Así, pues, podemos decir que dos bases ordenadas tienen igual orientación o tienen orientación opuesta.

Capítulo 2

Funciones vectoriales de variable real

RECTAS Y PLANOS

Sean a y u vectores de E^3 con $u \neq 0$. Se denomina *línea recta*, o, simplemente, *recta que pasa por a y es paralela a u* , al conjunto de los x de E^3 que pueden representarse mediante la expresión:

$$x = ku + a, \quad -\infty < k < \infty \quad (2.1)$$

o, expresado por medio de sus componentes:

$$x_1 = ku_1 + a_1, \quad x_2 = ku_2 + a_2, \quad x_3 = ku_3 + a_3, \quad -\infty < k < \infty \quad (2.2)$$

Tanto la ecuación, (2.1) como la (2.2) se llaman ecuaciones paramétricas de la recta. Decimos que el punto x *engendra* la recta cuando el *parámetro* k varía sobre la recta real. Diremos que cualquier vector, linealmente dependiente de u , es *paralelo* a esta recta. Y diremos que dos rectas son paralelas si sus respectivos vectores u son linealmente dependientes.

Ejemplo 2.1.

La ecuación paramétrica de la recta que pasa por $a = e_1 + 2e_2$ y es paralela a $u = e_1 - e_3$ es

$$x = ku + a = k(e_1 - e_3) + (e_1 + 2e_2) = (k+1)e_1 + 2e_2 - ke_3$$

o, también, $x_1 = k+1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -k$.

Ejemplo 2.2.

Si a y b son puntos distintos de una recta, entonces, $b - a$ es un vector diferente de cero y paralelo a la recta. Por este motivo, la ecuación de la recta que pasa por a y b es $x = k(b - a) + a$, o, también,

$$x_1 = k(b_1 - a_1) + a_1, \quad x_2 = k(b_2 - a_2) + a_2, \quad x_3 = k(b_3 - a_3) + a_3$$

Se denomina *plano que pasa por a y es paralelo a dos vectores independientes u y v* al conjunto de los x de E^3 que se pueden representar mediante la expresión:

$$x = hu + kv + a, \quad -\infty < h < \infty, \quad -\infty < k < \infty \quad (2.3)$$

o, también, mediante las ecuaciones de sus componentes:

$$x_1 = hu_1 + kv_1 + a_1, \quad x_2 = hu_2 + kv_2 + a_2, \quad x_3 = hu_3 + kv_3 + a_3 \quad (2.4)$$

Tanto la ecuación (2.3) como la (2.4) se llaman ecuaciones paramétricas del plano. Decimos que x *engendra* el plano a medida que los parámetros h y k varían en forma independiente en el conjunto de los números reales. Se dice que un vector es paralelo al plano si es linealmente dependiente de u y v , y se dirá que es normal al plano si es ortogonal tanto a u como a v .

Si es n un vector, diferente de cero, normal al plano $x = hu + kv + a$, entonces el punto x estará en el plano si y sólo si $x - a$ es ortogonal a n , o sea

$$(x - a) \cdot n = 0 \quad (2.5)$$

Expresado mediante las componentes de x , a y u , esto viene a ser

$$(x_1 - a_1)n_1 + (x_2 - a_2)n_2 + (x_3 - a_3)n_3 = 0 \quad (2.6)$$

Si a, b, c son tres puntos no colineales del plano, entonces $b - a$ y $c - a$ son vectores linealmente independientes paralelos al plano, y $(b - a) \times (c - a)$ es un vector, diferente de cero, normal al plano, tal como lo indica la figura 2-1. De la ecuación (2.5) se desprende que la ecuación del plano que pasa por a, b, c es

$$[(x - a)(b - a)(c - a)] = 0 \quad (2.7)$$

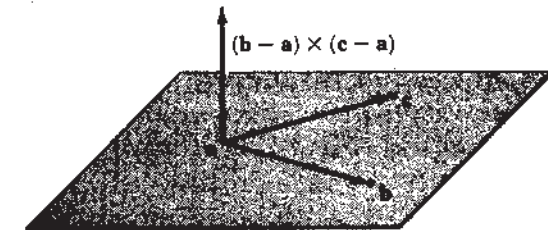


Fig. 2-1

Ejemplo 2.3.

La ecuación paramétrica del plano que pasa por $a = e_2$ y es paralelo a $u = e_1$ y $v = -e_1 + e_3$ es

$$x = hu + kv + a = (h - k)e_1 + e_2 + ke_3 \quad \text{o} \quad x_1 = h - k, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = k$$

El plano también puede venir dado por la expresión

$$[(x - a)uv] = -\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & -1 \\ x_2 - 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad x_2 - 1 = 0$$

ENTORNOS O VECINDADES

Las propiedades locales de las funciones se pueden describir en forma conveniente por medio del concepto de entorno esférico o vecindad esférica. Se llama *entorno esférico* ϵ o *esfera abierta* ϵ de un vector a , y se representa por $S_\epsilon(a)$, al conjunto de los x que cumplen la condición $|x - a| < \epsilon$. Tal como lo muestra la figura 2-2, un punto x pertenece a $S_\epsilon(a)$ si y sólo si x es interior a la esfera de radio ϵ que tiene por centro a a . En el E^2 , $S_\epsilon(a)$ es el conjunto de los puntos interiores a la circunferencia de radio ϵ que tiene por centro a a ; y en el E^1 , $S_\epsilon(a)$ es el intervalo abierto de longitud 2ϵ que tiene a a como centro, tal cual lo muestra la figura 2-3.

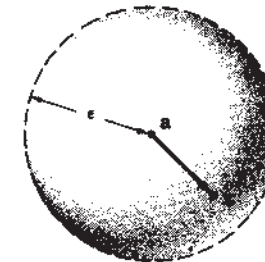


Fig. 2-2

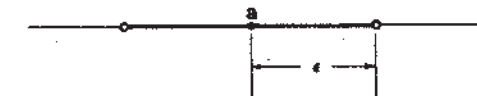


Fig. 2-3

Por otra parte, resulta conveniente considerar una vecindad o entorno esférico de a en el que se prescinde del propio a . El conjunto $S_\epsilon(a)$, excluido el propio a , se llama *vecindad* o *entorno reducido* ϵ de a y se representa por $S'_\epsilon(a)$. Puesto que $|x - a| = 0$ si y sólo si $x = a$, $S'_\epsilon(a)$ está constituido por los vectores x que satisfacen la condición $0 < |x - a| < \epsilon$.

Ejemplo 2.4.

El entorno esférico $1/10$ del vector $a = e_1 + 2e_2 + 3e_3$, o sea, $S_{1/10}(e_1 + 2e_2 + 3e_3)$, está constituido por los vectores $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ que satisfacen la condición

$$|x - a| = [(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2]^{1/2} < 1/10, \quad \text{o sea, } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2 < 1/100$$

Ejemplo 2.5.

El $S_{1/100}(5)$ de E^1 es el conjunto de números x que satisfacen la condición $|x - 5| < 1/100$, es decir, $5 - 1/100 < x < 5 + 1/100$. Obsérvese que $S_{1/100}$ es el intervalo abierto de longitud $1/50$ que tiene como punto medio a 5.

FUNCIONES VECTORIALES

Si a cada número real t de un conjunto de números reales S le asignamos un vector $f(t)$, definimos una *función vectorial* f de una sola variable t en S . Al igual que en el caso de las funciones escalares de variable real, en el presente, al conjunto S se le llama *dominio de definición* de f ; y al conjunto de vectores correspondientes, se le llama *imagen* de f y se representa por $f(S)$.

Ejemplo 2.6.

Sean a, b, c vectores fijos del espacio. La ecuación

$$f(t) = a - 2tb + t^2c, \quad -2 \leq t \leq 2$$

define una función vectorial de t cuyo dominio es $-2 \leq t \leq 2$. A continuación se muestra una tabla que contiene algunos de los vectores correspondientes.

t	-2	-1	0	1	2
$f(t)$	$a + 4b + 4c$	$a + 2b + c$	a	$a - 2b + c$	$a - 4b + 4c$

Ejemplo 2.7.

En el ejemplo 2.6 supongamos que $a = e_1 + 2e_2$, $b = e_2 - e_3$, $c = e_1 - e_3$. Entonces,

$$f(t) = (e_1 + 2e_2) - 2t(e_2 - e_3) + t^2(e_1 - e_3) = (1 + t^2)e_1 + (2 - 2t)e_2 + (2t - t^2)e_3$$

Aquí, f se expresa por medio de las tres funciones escalares $f_1(t) = 1 + t^2$, $f_2(t) = 2 - 2t$, $f_3(t) = 2t - t^2$, que son sus componentes respecto de (e_1, e_2, e_3) .

Tal como se indica en el ejemplo precedente, $f(t)$ determina únicamente tres funciones escalares $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, que son sus componentes respecto de la base. Recíprocamente, tres funciones escalares $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, en un dominio común S , sólo definen una función vectorial

$$f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3$$

en S , cuyas componentes respecto de (e_1, e_2, e_3) son f_1, f_2, f_3 .

Utilizaremos las funciones vectoriales para definir las curvas. Sea $x = f(t)$; entonces cuando t varíe, el punto x describirá una curva, tal cual se muestra en la figura 2-4. La ecuación vectorial $x = f(t)$, o expresado el hecho mediante las componentes, las tres ecuaciones escalares

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t)$$

se llamará una *representación paramétrica* de la curva, y la variable t se denominará el *parámetro* de la misma.

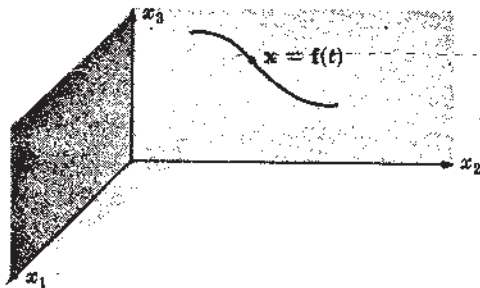


Fig. 2-4

Ejemplo 2.8.

La ecuación $x = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2$ o $x_1 = a \cos t$, $x_2 = a \sin t$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ es una representación paramétrica de la circunferencia de radio a y centro en el origen. Cuando t crece dentro del intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, el punto x describe la circunferencia en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, como se puede ver en la figura 2-5.

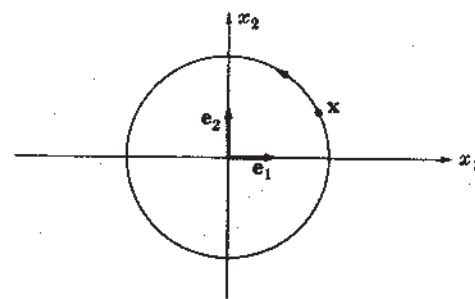


Fig. 2-5

La mayoría de las veces supondremos que nuestras funciones se definen en intervalos. Estos constan de: los intervalos finitos, abiertos y cerrados $a < t < b$ y $a \leq t \leq b$, los intervalos finitos semi-abiertos $a \leq t < b$ y $a < t \leq b$, y los intervalos infinitos tales como $-\infty < t < \infty$, $a \leq t < \infty$, $-\infty < t < a$, etc.

FUNCIONES ACOTADAS

Se dice que una función $f(t)$ es *acotada* en un intervalo I si existe un escalar $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo t de I . Obsérvese en la figura 2-6 que si $x = f(t)$, entonces $f(t)$ es acotada en I si y sólo si existe una esfera de radio M y centro en el origen, tal que el punto x sea interior a la esfera para todo t de I .

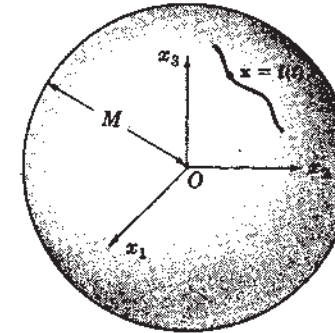


Fig. 2-6

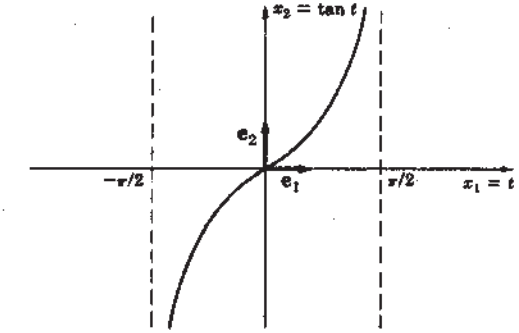


Fig. 2-7

Ejemplo 2.9.

La curva que describe el punto $x = te_1 + (\tan t)e_2$ en $-\pi/2 < t < \pi/2$ es la que se muestra en la figura 2-7. Obsérvese que $|x|$ viene a ser arbitrariamente grande cuando t se acerca a $\pi/2$. De esta suerte, x no es acotada en $-\pi/2 < t < \pi/2$. Sin embargo, obsérvese que x es acotada en el interior del intervalo $-\pi/2 + \epsilon < t < \pi/2 - \epsilon$, para cualquier $\epsilon > 0$. Para esos valores de t ,

$$|x| = |te_1 + (\tan t)e_2| \leq |t||e_1| + |\tan t||e_2| \leq |t| + |\tan t| \leq M$$

donde $M = \pi/2 - \epsilon + \tan(\pi/2 - \epsilon)$.

Se dice que una función $f(t)$ es *acotada* en $t = t_0$, si existe un $\epsilon > 0$ tal que $f(t)$ sea acotada para t en $S_\epsilon(t_0)$; o, lo que es igual, $f(t)$ es acotada en t_0 si existe un $M > 0$ y un $\epsilon > 0$ tales que $|f(t)| \leq M$ para $|t - t_0| < \epsilon$.

Es evidente que si $f(t)$ está definida y es acotada en un intervalo I , entonces es acotada en cada t_0 de I . Sin embargo, la recíproca no es verdadera, como se comprueba con el ejemplo anterior donde $f(t)$ es acotada en cada t_0 del intervalo $-\pi/2 < t < \pi/2$ pero no lo es en la totalidad del mismo.

LÍMITES

Una función vectorial $f(t)$ tiene un límite L cuando t se aproxima a t_0 , y se escribe

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

o $f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$, si para todo $\epsilon > 0$, se puede hallar un $\delta > 0$, dependiente de ϵ , tal que los vectores $f(t)$ estén en $S_\epsilon(L)$ siempre que t pertenezca a $S_\delta(t_0)$. Obsérvese en la figura 2-8 que $x = f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$, si y sólo si para toda esfera

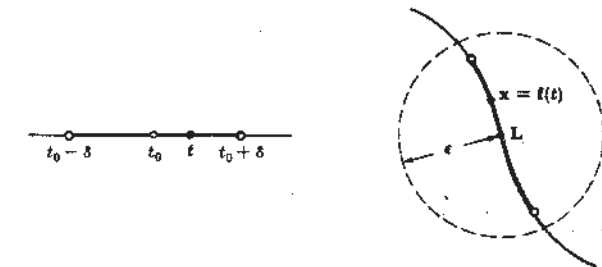


Fig. 2-8

abierta $S_\epsilon(L)$ con centro en el punto L , es posible hallar un entorno reducido $S'_\delta(t_0)$ tal que los puntos x estén en $S_\epsilon(L)$ siempre que t sea interior a $S'_\delta(t_0)$.

Obsérvese que la existencia del límite en t_0 es una propiedad local de una función y depende sólo de la naturaleza de la función en un entorno reducido de t_0 . Además, no es necesario que $f(t)$ esté definida en t_0 . Por ejemplo, su dominio podría ser el intervalo abierto $a < t < t_0$.

Ejemplo 2.10.

Sea $f(t) = a = \text{constante}$. Entonces, para cualquier t_0 , $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a$. Porque $f(t) = a$ pertenece a cada $S_\epsilon(a)$ para todo t y, por esta razón, para todo $S_\delta(t_0)$ para todo t_0 .

Ejemplo 2.11.

La función $x = f(t) = \begin{cases} te_1 + e_2, & t \geq 0 \\ te_1 - e_2, & t < 0 \end{cases}$

$$\text{o } x_1 = f_1(t) = t, \quad x_2 = f_2(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

que se representa en la figura 2-9, no tiene límite cuando $t \rightarrow 0$ porque en cualquier punto L tiene un entorno $S_\epsilon(L)$ que no intersecta simultáneamente a la recta $x_2 = 1$ y a la recta $x_2 = -1$. (Por ejemplo, tal como se ve en la figura, $S_{1/2}(0,1)$ no incluirá puntos de $x_2 = -1$.) Para este $S_\epsilon(L)$ no existirá un $\delta > 0$ tal que para todo $0 < |t| < \delta$ los puntos $x = f(t)$ estén en $S_\epsilon(L)$. Como quiera que L es arbitrario, entonces no existe límite. Por otra parte, la función tiene límite para cualquier otro valor de t_0 que se escoja. Por ejemplo, cuando $t \rightarrow \frac{1}{2}$, el límite es $\frac{1}{2}e_1 + e_2$.

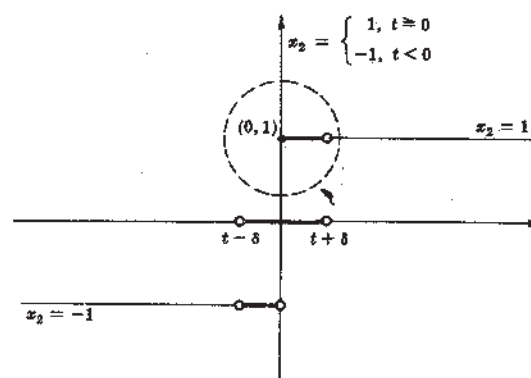


Fig. 2-9

Recordemos, ahora, que una función escalar $g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|g(t)| < \epsilon$ siempre que t sea interior a $S'_\delta(t_0)$. Si hacemos que $g(t) = |f(t) - L|$, entonces $|g(t)| = |f(t) - L| < \epsilon$ si y sólo si $f(t)$ pertenece a $S_\epsilon(L)$. De este modo, llegamos al importante

Teorema 2.1. $f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$ si y sólo si $|f(t) - L| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$.

Ejemplo 2.12.

$$\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 e_1 - (t+1)e_2) = e_1 - 2e_2, \text{ puesto que}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} |f(t) - L| = \lim_{t \rightarrow 1} |(t^2 - 1)e_1 - (t - 1)e_2| = \lim_{t \rightarrow 1} [(t^2 - 1)^2 + (t - 1)^2]^{1/2} = 0$$

Supongamos, finalmente, que $f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$. Entonces, para un $\epsilon > 0$, arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(t) - L| < \epsilon$ siempre que t pertenezca a $S'_\delta(t_0)$. Por esta razón, siempre que t pertenezca a $S_\delta(t_0)$,

$$|f(t)| = |f(t) - L + L| \leq |f(t) - L| + |L| \leq M$$

en donde $M = \max(\epsilon, |f(t_0) - L|) + |L|$. De este modo, tenemos el

Teorema 2.2. Si $f(t)$ tiene límite cuando $t \rightarrow t_0$, entonces $f(t)$ es acotada en t_0 .

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Supongamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i$, $i = 1, 2, 3$; entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3] = L_1e_1 + L_2e_2 + L_3e_3$$

Pues, sea $f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3$ y $L = L_1e_1 + L_2e_2 + L_3e_3$; entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} |f(t) - L| &= \lim_{t \rightarrow t_0} |(f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3) - (L_1e_1 + L_2e_2 + L_3e_3)| \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} [(f_1(t) - L_1)^2 + (f_2(t) - L_2)^2 + (f_3(t) - L_3)^2]^{1/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

El recíproco del teorema anterior también es verdadero. O sea, que tenemos el

Teorema 2.3. La función $f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3$ tiene límite cuando $t \rightarrow t_0$, si y sólo si $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, tienen límites cuando $t \rightarrow t_0$, y en tal caso,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) \right) e_1 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) \right) e_2 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \right) e_3$$

Ejemplo 2.13.

$$\lim_{t \rightarrow 0} ((\sin t)e_1 + (\cos t)e_2 + te_3) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \sin t \right) e_1 + \left(\lim_{t \rightarrow 0} \cos t \right) e_2 + \left(\lim_{t \rightarrow 0} t \right) e_3 = e_2$$

Ejemplo 2.14.

Sea $f(t) = t^2e_1 + te_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((2+h)^2e_1 + (2+h)e_2) - (4e_1 + 2e_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{((2+h)^2 - 4)e_1}{h} + \frac{he_2}{h} \right] = 4e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Supongamos, ahora, que $f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$; entonces, $|f(t)| \rightarrow |L|$ cuando $t \rightarrow t_0$. Pues, haciendo que $f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3$ y $L = L_1e_1 + L_2e_2 + L_3e_3$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} |f(t)| &= \lim_{t \rightarrow t_0} [f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t)]^{1/2} \\ &= \left[\left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) \right)^2 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) \right)^2 + \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= [L_1^2 + L_2^2 + L_3^2]^{1/2} = |L| \end{aligned}$$

Obsérvese, sin embargo, que el recíproco del teorema precedente no es verdadero. Es decir, $|f(t)|$ puede tener límite aunque $f(t)$ no lo tenga. Esto acontece en el ejemplo 2.11 para $t_0 = 0$.

El resultado anterior se enuncia formalmente bajo la forma del

Teorema 2.4. Si $f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$, entonces $|f(t)| \rightarrow |L|$ cuando $t \rightarrow t_0$.

Finalmente, tenemos: Si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = M$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = N$, entonces

$$[H_1] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) + g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L + M$$

$$[H_2] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (h(t)g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = NM$$

$$[H_3] \quad \text{Si } N \neq 0, \text{ entonces } \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t)/h(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) / \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = L/N.$$

$$[H_4] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L \cdot M$$

$$[H_5] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \times g(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L \times M.$$

$$[H_6] \quad \text{Si } \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0) \text{ y } \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} h(\theta) = t_0, \text{ entonces } \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f(h(\theta)) = f\left(\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} h(\theta)\right) = f(t_0).$$

Ejemplo 2.15.

Sea $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = M$, $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = N$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} [f(t)g(t)h(t)] &= \lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \cdot g(t) \times h(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} (g(t) \times h(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = [LMN] \end{aligned}$$

CONTINUIDAD

Se dice que una función vectorial $f(t)$, definida en t_0 , es *continua* en t_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiente de ϵ , tal que $f(t)$ pertenezca al $S_\epsilon(f(t_0))$ para todo t perteneciente a $S_\delta(t_0)$; o, lo que es igual, $f(t)$ es continua en t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0) \quad (2.8)$$

Se dice que la función $f(t)$ es continua en I si es continua en todo $t = t_0$ de I .

Del teorema 2.3 se deduce que $f(t)$ es continua si y sólo si sus componentes $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, lo son. De los teoremas, del $[H_1]$ al $[H_6]$, se deduce también que la suma, el producto y los productos escalar y vectorial de funciones continuas son continuos y que una función continua de una función continua (función compuesta) es continua.

Observemos, finalmente, que (2.8) es equivalente a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) - f(t_0)) = 0$$

o, si hacemos $h = t - t_0$, $\lim_{h \rightarrow 0} (f(t_0 + h) - f(t_0)) = 0$

Ejemplo 2.16.

Sea $f(t) = a + bt + ct^2$, donde $a, b, c =$ constantes. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (a + bt + ct^2) = a + bt_0 + ct_0^2 = f(t_0)$$

Por esta razón, $f(t)$ es continua para todo t .

Ejemplo 2.17.

Sea $f(t) = \begin{cases} \frac{t^2-1}{t-1} e_1 + t^3 e_2, & t \neq 1 \\ 2e_1 + e_2, & t = 1 \end{cases}$. Entonces $f(t)$ es continua para todo t . Para $t_0 \neq 1$,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{t^2-1}{t-1} e_1 + t^3 e_2 \right) = \frac{t_0^2-1}{t_0-1} e_1 + t_0^3 e_2 = f(t_0)$$

Para $t_0 = 1$,

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2-1}{t-1} e_1 + t^3 e_2 \right) = \lim_{t \rightarrow 1} ((t+1)e_1 + t^3 e_2) = 2e_1 + e_2 = f(1)$$

Ejemplo 2.18.

La función $f(t) = \begin{cases} te_1 + e_2, & t \geq 0 \\ te_1 - e_2, & t < 0 \end{cases}$ del ejemplo 2.11 es continua en todo t , excepto en $t = 0$, donde no existe el límite.

DERIVACION

El límite

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (2.9)$$

si existe, se define como la *derivada* de $f(t)$ en $t = t_0$. Si $f'(t_0)$ existe, decimos que $f(t)$ es *derivable* en t_0 .

Obsérvese que si sustituimos $t = t_0 + \Delta t$ en la expresión precedente, la derivada en t_0 puede darse también bajo la forma

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad (2.10)$$

Ejemplo 2.19.

Sea $f(t) = a + bt + ct^2$, donde $a, b, c =$ constantes. Entonces,

$$\begin{aligned} f'(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[a + b(t_0 + \Delta t) + c(t_0 + \Delta t)^2] - (a + bt_0 + ct_0^2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{b\Delta t + 2ct_0\Delta t + c(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (b + 2ct_0 + c\Delta t) = b + 2ct_0 \end{aligned}$$

De esta manera, $f(t)$ es derivable en t_0 y su derivada es $f'(t_0) = b + 2ct_0$.

Ahora bien, si $f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3$, entonces, del teorema 2.3 se deduce que

$$\begin{aligned} f'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} e_1 + \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0} e_2 + \frac{f_3(t) - f_3(t_0)}{t - t_0} e_3 \right] \\ &= \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0} \right] e_1 + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0} \right] e_2 + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_3(t) - f_3(t_0)}{t - t_0} \right] e_3 \\ &= f'_1(t_0)e_1 + f'_2(t_0)e_2 + f'_3(t_0)e_3 \end{aligned}$$

De este modo, tenemos el

Teorema 2.5. Una función $f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3$ es derivable en t_0 si y sólo si cada una de sus componentes $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, es derivable en t_0 , y en tal caso

$$f'(t_0) = f'_1(t_0)e_1 + f'_2(t_0)e_2 + f'_3(t_0)e_3$$

Si $f(t)$ es derivable en el intervalo I , entonces $f'(t)$ es nuevamente una función vectorial en I que, por lo tanto, podrá derivarse otra vez. Este proceso proporcionará la derivada de segundo orden de $f(t)$, que denotamos por $f''(t)$. Análogamente se definen las derivadas de órdenes superiores.

Al igual que en las funciones escalares, si $u = f(t)$, utilizamos la notación

$$u' = \frac{du}{dt} = f'(t), \quad u'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{d^2u}{dt^2} = f''(t), \quad \text{etc.}$$

Ejemplo 2.20.

Si $u = (t^3 + 2t)e_1 + (\sin t)e_2 + e^t e_3$, entonces

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 + 2t)e_1 + \frac{d}{dt}(\sin t)e_2 + \frac{d}{dt}(e^t)e_3 = (3t^2 + 2)e_1 + (\cos t)e_2 + e^t e_3$$

$$u'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2)e_1 + \frac{d}{dt}(\cos t)e_2 + \frac{d}{dt}(e^t)e_3 = 6te_1 - (\sin t)e_2 + e^t e_3$$

$$u''' = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt}(6t)e_1 - \frac{d}{dt}(\sin t)e_2 - \frac{d}{dt}(e^t)e_3 = 6e_1 - (\cos t)e_2 + e^t e_3$$

Ejemplo 2.21.

El vector $x = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2$ describe la circunferencia de radio a y centro en el origen, tal como se muestra en la figura 2-10. La derivada $x' = dx/dt = -a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2$ es tangente a la circunferencia en x y, como era de esperarse, ortogonal a x , puesto que $x \cdot x' = 0$.

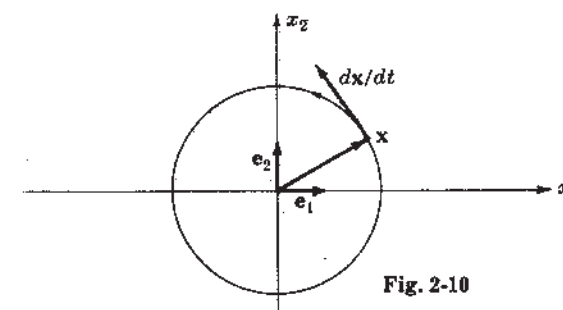


Fig. 2-10

Muchas propiedades de las funciones escalares se extienden a las funciones vectoriales. Por ejemplo, en el problema 2.26 se demuestra el

Teorema 2.6. Si $f(t)$ es derivable en t_0 , entonces $f(t)$ es continua en t_0 .

FORMULAS DE DERIVACION

Si u, v, h son funciones derivables de t en I , entonces

$$[J_1] \quad u + v \text{ es derivable en } I \text{ y } \frac{d}{dt}(u + v) = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

$$[J_2] \quad hu \text{ es derivable en } I \text{ y } \frac{d}{dt}(hu) = h \frac{du}{dt} + \frac{dh}{dt} u$$

$$[J_3] \quad u \cdot v \text{ es derivable en } I \text{ y } \frac{d}{dt}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \cdot v$$

$$[J_4] \quad u \times v \text{ es derivable en } I \text{ y } \frac{d}{dt}(u \times v) = u \times \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \times v$$

Por último, tenemos la *regla de la cadena*:

$[J_5]$ Si $u = f(t)$ es derivable en I , y $t = h(\theta)$ es derivable en I_θ , donde la imagen $h(I_\theta)$ está contenida en I , entonces, $u = g(\theta) = f(h(\theta))$ es derivable en I_θ y

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta}$$

Ejemplo 2.22.

Sea $u = a(\cos t)e_1 - a(\sin t)e_2$, $\theta = (1 + t^2)^{1/2}$, $t > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{(-a(\sin t)e_1 - a(\cos t)e_2)/[(1+t^2)^{-1/2}]}{(a/t)(1+t^2)^{1/2}((\sin t)e_1 + (\cos t)e_2)} \\ &= -(\sin t)e_1 - (\cos t)e_2 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que para funciones escalares, $\theta = h(t)$ tales que $d\theta/dt \neq 0$, se tiene $dt/d\theta = 1/(\theta/dt)$.

Ejemplo 2.23.

$$\frac{d}{dt} \left(u \cdot \frac{du}{dt} \right) = u \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + \frac{du}{dt} \cdot \frac{du}{dt} = u \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \left| \frac{du}{dt} \right|^2$$

Ejemplo 2.24.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[u \cdot \frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dt^2} \right] &= \frac{d}{dt} \left(u \cdot \frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2} \right) = u \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2} \right) + \frac{du}{dt} \cdot \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^2u}{dt^2} \right) \\ &= u \cdot \left[\left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^3u}{dt^3} \right) + \left(\frac{d^2u}{dt^2} \times \frac{d^2u}{dt^2} \right) \right] + 0 = u \cdot \left(\frac{du}{dt} \times \frac{d^3u}{dt^3} \right) = \left[u \cdot \frac{du}{dt} \frac{d^3u}{dt^3} \right] \end{aligned}$$

Por último, si u es una función vectorial de magnitud constante, es decir, si $|u| = \text{constante}$, entonces $u \cdot u = \text{constante}$, y, haciendo la derivada, se obtiene

$$u \cdot \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} \cdot u = 0 \quad \text{o} \quad u \cdot \frac{du}{dt} = 0$$

En consecuencia, u es ortogonal a du/dt . En particular, tenemos el

Teorema 2.7. Si u es una función vectorial unitaria, entonces du/dt es ortogonal a u .

Este teorema es un resultado importante que utilizaremos con frecuencia.

FUNCIONES DE CLASE C^m

En general, exigimos que nuestras funciones se puedan derivar al menos una vez y ordinariamente dos o más veces. Por otra parte, necesitaremos conocer la clase más amplia de funciones para la cual sea válido un determinado resultado. De acuerdo con esto, diremos

que una función numérica, escalar o vectorial, f , pertenece a la clase C^m en un intervalo I si existe la derivada de orden m -ésima de f y es continua en I . La clase de las funciones continuas se designa mediante C^0 y la clase de las funciones que tienen derivadas de todos los órdenes se designa por medio de C^∞ .

Como quiera que una función vectorial es continua si y sólo si sus componentes lo son, y posee derivada si y sólo si sus componentes las poseen, se tiene el

Teorema 2.8. Una función vectorial $f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3$ pertenece a C^m de I si y sólo si sus componentes $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ pertenecen a C^m de I .

Obsérvese que, puesto que una función derivable es continua, entonces, si una función pertenece a C^m , también pertenece a C^j para todo $j \leq m$.

Ejemplo 2.25.

Consideremos la función vectorial $f(t) = t^3e_1 + (\sin t)e_2 + t^{8/3}e_3$, $-\infty < t < \infty$. En este caso,

$$f'(t) = 3t^2e_1 + (\cos t)e_2 + (8/3)t^{5/3}e_3 \quad \text{y} \quad f''(t) = 6te_1 - (\sin t)e_2 + (40/9)t^{2/3}e_3$$

son continuas para todo t . Sin embargo, $f'''(t) = 6e_1 - (\cos t)e_2 + (80/27)t^{-1/3}e_3$ no existe en $t = 0$, porque $t^{1/3}$ aparece en el denominador. En consecuencia, $f(t)$ pertenece a C^2 en $-\infty < t < \infty$ pero no a C^3 . La f tiene derivadas continuas de todo orden en cualquier intervalo que no contenga el origen y, por tanto, en él f pertenece a la clase C^∞ .

Como consecuencia de las fórmulas de derivación desde la $[J_1]$ hasta la $[J_5]$, tenemos los siguientes teoremas:

Teorema 2.9. Si f, g, h pertenecen a C^m en I , entonces hf , $f + g$, $f \cdot g$ y $f \times g$ pertenecen a C^m en I .

Teorema 2.10. Si $f(t)$ pertenece a C^m en I , y si $t(\theta)$ pertenece a C^m en I_θ , donde $t(I_\theta)$ está contenido en I , entonces la función compuesta $g(\theta) = f(t(\theta))$ pertenece a la clase C^m en I_θ . En otras palabras, una función de clase C^m de una función de clase C^m es una función de clase C^m .

FORMULA DE TAYLOR

Sea $f(t)$ una función de clase C^m en I . Entonces (fórmula de Taylor), para todo t y t_0 de I , es:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1}(t-t_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + R_m(t, t_0)$$

en donde el resto, $R_m(t, t_0)$, tiene la propiedad de que

$$\frac{R_m(t, t_0)}{(t-t_0)^m} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0$$

Es evidente que, aplicando la fórmula a las componentes de una función vectorial $f(t)$, se tiene el

Teorema 2.11. Fórmula de Taylor. Sea $f(t)$ una función que pertenece a C^m en I ; entonces, para todo t y t_0 de I ,

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1}(t-t_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + R_m(t, t_0) \end{aligned}$$

$$\text{en donde, } \frac{R_m(t, t_0)}{(t-t_0)^m} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow t_0$$

Ejemplo 2.26.

Si $f(t) = (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2$, entonces $f(0) = e_1$, $f'(0) = e_2$, $f''(0) = -e_1$, $f'''(0) = -e_2$, $f^{(4)}(0) = e_1$.

Y, en consecuencia, alrededor de $t_0 = 0$ se tiene

$$(\sin t)\mathbf{e}_1 + (\cos t)\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - (e_1/2!)t^2 - (e_2/3!)t^3 + (e_1/4!)t^4 + \mathbf{R}_4(t)$$

en donde $\mathbf{R}_4(t)/t^4 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$.

Con frecuencia conviene utilizar los símbolos \mathbf{o} y \mathbf{O} , de Landau, para analizar el comportamiento de una función en la vecindad de un punto. El caso es este: Supongamos una función escalar $g(t)$, diferente de cero en algún entorno reducido de t_0 . Se dice que una función $\mathbf{f}(t)$, escalar o vectorial, es "*o minúscula*" de $g(t)$ en t_0 , y se designa por $\mathbf{f}(t) = \mathbf{o}(g(t))$, si $\mathbf{f}(t)/g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$. Se dice que una función $\mathbf{f}(t)$, escalar o vectorial, es "*o mayúscula*" de $g(t)$ en t_0 , y se designa por $\mathbf{f}(t) = \mathbf{O}(g(t))$, si $\mathbf{f}(t)/g(t)$ es acotada en t_0 .

Ejemplo 2.27.

Si $\mathbf{f}(t) = at^4 + bt^5 + ct^6$, $a, b, c = \text{constantes}$, entonces $\mathbf{f}(t) = \mathbf{o}(t^3)$ en $t = 0$. Porque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{f}(t)/t^3 = \lim_{t \rightarrow 0} (at + bt^2 + ct^3) = 0$$

Obsérvese, además, que $\mathbf{f}(t) = \mathbf{o}(t^2)$. Sin embargo, $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{o}(t^n)$, para enteros $n > 3$.

Ejemplo 2.28.

Si $\mathbf{f}(t) = (\sin^2 t)\mathbf{e}_1 + (t^2 + t^3)\mathbf{e}_2 + t^4\mathbf{e}_3$, entonces $\mathbf{f}(t) = \mathbf{O}(t^2)$. Porque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{f}(t)/t^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 t}{t^2} \mathbf{e}_1 + (1+t)\mathbf{e}_2 + t^2\mathbf{e}_3 \right] = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

Puesto que el límite existe, $\mathbf{f}(t)/t^2$ es acotada; así, pues, $\mathbf{f}(t) = \mathbf{O}(t^2)$. Obsérvese que $\mathbf{f}(t)/t \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$; de esta suerte, también $\mathbf{f}(t) = \mathbf{O}(t)$. Pero, $\mathbf{O}(t^2)$ es la mejor aproximación, pues, $|\mathbf{f}(t)/t^\alpha| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 0$ para $\alpha > 2$.

Ejemplo 2.29.

Supongamos que $\mathbf{f}(t)$ sea de clase C^m en I . De la fórmula de Taylor se deduce que, en t_0 ,

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \frac{\mathbf{f}'(t_0)}{1}(t-t_0) + \cdots + \frac{\mathbf{f}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + \mathbf{o}[(t-t_0)^m]$$

FUNCIONES ANALÍTICAS

Supongamos que $\mathbf{f}(t)$ sea de clase C^∞ en I . Entonces, para todo m y todo t y t_0 en I , tenemos

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \frac{\mathbf{f}'(t_0)}{1}(t-t_0) + \cdots + \frac{\mathbf{f}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + \mathbf{R}_m(t, t_0)$$

Ahora bien, si, además, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{R}_m(t, t_0) = 0$, entonces $\mathbf{f}(t)$ puede expresarse en I como una serie de potencias

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$$

Cuando esto ocurra, se dice que la función $\mathbf{f}(t)$ es *analítica* en I . En forma más general, se dice que $\mathbf{f}(t)$ es analítica en I si, para todo t_0 en I , existe un entorno $S_\delta(t_0)$ tal que $\mathbf{f}(t)$ admita un desarrollo en serie de potencias, tal como

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(t-t_0)^n$$

que converge a $\mathbf{f}(t)$ para todo t de $S_\delta(t_0)$. La clase de las funciones analíticas en I se designará por C^A .

Una función de la clase C^∞ no es necesariamente analítica, como lo muestra el ejemplo que aparece más adelante. Sin embargo, se puede demostrar que cualquier función, representada por una serie de potencias, se puede derivar en el interior del intervalo de convergencia y la derivada viene representada por la serie de potencias que se obtiene al derivar término a término la serie original de potencias. De este modo, toda función analítica es de clase C^∞ . Además, $\mathbf{f}^{(n)}(t_0) = \mathbf{a}_n n!$

De los teoremas relativos a la sustitución y a la suma y producto de series de potencias, se deduce que la suma, el producto y los productos escalar y vectorial de funciones analíticas son también funciones analíticas, y, además, que una función analítica de una función analítica (función compuesta) es nuevamente una función analítica.

Ejemplo 2.30.

La función $f(t) = e^{-1/t^2}$ es continua para todo t , excepto para $t = 0$. Si, por definición, $f(0) = 0$, entonces $f(t)$ será continua y, de hecho, pertenecerá a C^∞ para todo $-\infty < t < \infty$. Sin embargo, $f(t)$ no es analítica en ningún intervalo que contenga a $t = 0$. En efecto, se puede demostrar que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, etc., de manera que, si $f(t)$ admitiera un desarrollo en serie de potencias en algún $S_\delta(0)$, la serie convergería hacia cero para cualquier t de $S_\delta(0)$, lo cual es imposible, pues $f(t)$ no es idénticamente nula en cualquier $S_\delta(0)$.

Por último, observemos que las funciones elementales, es decir, los polinomios, las funciones racionales, las funciones trigonométricas y las funciones exponenciales, son analíticas en cualquier intervalo en que sean continuas, y que sus inversas son también analíticas en todo intervalo en que sean derivables.

Problemas resueltos

RECTAS Y PLANOS

2.1. Hallar un vector unitario normal al plano S que contiene los puntos

$$P(0, 1, 1), Q(1, 0, -1), R(1, -1, 0).$$

$$\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_2 & -1 & -2 \\ \mathbf{e}_3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

es normal a S , y $\pm \frac{\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}}{|\mathbf{PQ} \times \mathbf{PR}|} = \pm (1/\sqrt{11})(3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ son vectores unitarios normales a S .

2.2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1, -1, 2)$ y es paralela al eje x_3 .

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{OP}$, $\mathbf{a} = \mathbf{OA}$. Entonces P pertenece a la recta si y sólo si $\mathbf{AP} = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = k\mathbf{e}_3$, o sea,

$$(x_1 - 1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + 1)\mathbf{e}_2 + (x_3 - 2)\mathbf{e}_3 = k\mathbf{e}_3$$

o sea, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = k + 2$ ($-\infty < k < \infty$).

2.3. Supongamos que $d \geq 0$ y sea $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ un vector unitario. Demostrar que

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$$

es la ecuación del plano S cuya distancia desde el origen es d y cuyo vector unitario normal, dirigido desde el origen, es \mathbf{n} .

Sea \mathbf{x} un punto cualquiera de S . Entonces,

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}| \cos \angle(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = d \geq 0$$

implica que $\cos \angle(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \geq 0$ o sea $0 \leq \angle(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \leq \pi/2$. Es decir, \mathbf{n} está dirigido desde el origen hacia S . Tal como lo indica la figura 2-11, la distancia del origen a S es

$$|P_n(\mathbf{x})| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|/|\mathbf{n}| = |\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}| = |d| = d$$

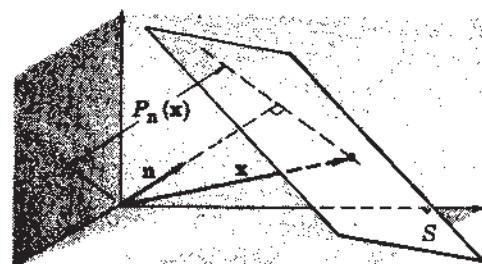


Fig. 2-11

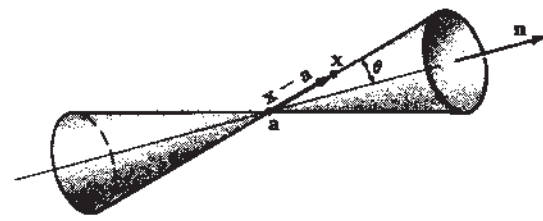


Fig. 2-12

- 2.4. Deducir la ecuación de la esfera de radio r y centro en a .

$$|x - a| = r \text{ o sea } (x - a) \cdot (x - a) = r^2$$

- 2.5. Sea a el vértice de un cono circular recto cuyo eje tiene la misma dirección y el mismo sentido que un vector unitario n , y cuyo semi-ángulo es $\theta = \cos^{-1} k$, $k > 0$. Demostrar que la ecuación del cono es

$$[(x - a) \cdot n]^2 - k^2(x - a) \cdot (x - a) = 0$$

Tal como se ve en la figura 2-12, x está sobre el cono si y sólo si $\angle(x - a, n) = \theta$ o sea $(\pi - \theta)$, es decir, si

$$|\cos \angle(x - a, n)| = |\cos \theta| = k \text{ o sea } |(x - a) \cdot n| = k|x - a|$$

o, también, elevando al cuadrado, $[(x - a) \cdot n]^2 = k^2(x - a) \cdot (x - a)$; de donde se deduce el resultado que se busca.

- 2.6. Sean: (u_1, u_2, u_3) una base arbitraria en E^3 , O un punto fijo de E^3 , y (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de P , definidas como las componentes del vector

$$x = OP = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

respecto de la base (u_1, u_2, u_3) . Un sistema de coordenadas definido en esta forma se denomina un sistema de coordenadas *afín*. Demostrar que en un sistema afín de coordenadas el cuadrado de la distancia entre dos puntos $P(x_1, x_2, x_3)$ y $Q(y_1, y_2, y_3)$ viene dado por

$$|PQ|^2 = g_{11}(x_1 - y_1)^2 + g_{12}(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + g_{13}(x_1 - y_1)(x_3 - y_3) \\ + g_{21}(x_2 - y_2)(x_1 - y_1) + g_{22}(x_2 - y_2)^2 + g_{23}(x_2 - y_2)(x_3 - y_3) \\ + g_{31}(x_3 - y_3)(x_1 - y_1) + g_{32}(x_3 - y_3)(x_2 - y_2) + g_{33}(x_3 - y_3)^2$$

o, brevemente, $|PQ|^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j)$, $i, j = 1, 2, 3$

donde g_{ij} satisface las condiciones (a) $g_{ij} = g_{ji}$, (b) $\det(g_{ij}) > 0$.

$$|PQ|^2 = |QP|^2 = |OP - OQ|^2 = |x - y|^2 = (x - y) \cdot (x - y) \\ = \left[\sum_i (x_i - y_i) u_i \right] \cdot \left[\sum_j (x_j - y_j) u_j \right] = \sum_i \sum_j (u_i \cdot u_j)(x_i - y_i)(x_j - y_j)$$

o sea $|PQ|^2 = \sum_i \sum_j g_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j)$ donde $g_{ij} = u_i \cdot u_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Es evidente que (a) $g_{ij} = u_i \cdot u_j = u_j \cdot u_i = g_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$. Además, de acuerdo con el problema 1.58,

$$(b) \det(g_{ij}) = \det \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 & u_1 \cdot u_3 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 & u_2 \cdot u_3 \\ u_3 \cdot u_1 & u_3 \cdot u_2 & u_3 \cdot u_3 \end{pmatrix} = [u_1 u_2 u_3]^2 > 0$$

FUNCIONES

- 2.7. Hacer una tabla de valores de los vectores $x = t^2 e_1 + (1 - t) e_2$, para valores enteros de t entre -4 y 4 , y hacer un gráfico de la curva que describen los puntos extremos de x .

t	x
-4	$16e_1 + 5e_2$
-3	$9e_1 + 4e_2$
-2	$4e_1 + 3e_2$
-1	$e_1 + 2e_2$
0	e_2
1	e_1
2	$4e_1 - e_2$
3	$9e_1 - 2e_2$
4	$16e_1 - 3e_2$

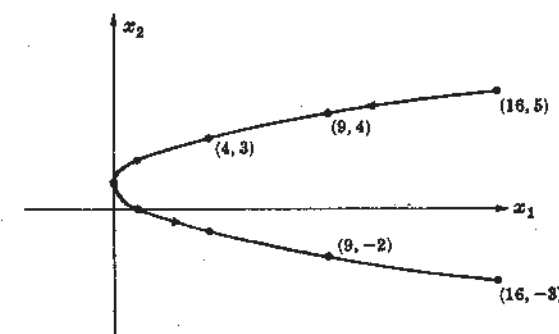


Fig. 2-13

- 2.8. Sea $f(t) = (1 + t^3)e_1 + (2t - t^2)e_2 + te_3$, $g(t) = (1 + t^2)e_1 + t^3e_2$, $h(t) = (2t - 1)$. Hallar, (a) $h(2)(f(1) + g(-1))$, (b) $|g(2)|$, (c) $f(a) \cdot g(b)$, (d) $f(t) \times g(t)$, (e) $g(2a - b)$, (f) $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$, (g) $f(h(t))$.

$$(a) h(2)(f(1) + g(-1)) = (3)[(2e_1 + e_2 + e_3) + (2e_1 - e_2)] = 12e_1 + 3e_3$$

$$(b) |g(2)| = |5e_1 + 8e_2| = \sqrt{89}$$

$$(c) f(a) \cdot g(b) = [(1 + a^3)e_1 + (2a - a^2)e_2 + ae_3] \cdot [(1 + b^2)e_1 + b^3e_2] \\ = (1 + a^3)(1 + b^2) + b^3(2a - a^2)$$

$$(d) f(t) \times g(t) = \det \begin{pmatrix} e_1 & (1 + t^3) & (1 + t^2) \\ e_2 & (2t - t^2) & t^3 \\ e_3 & t & 0 \end{pmatrix} \\ = -t^4 e_1 + (t + t^3)e_2 + (t^6 + t^4 - t^3 + t^2 - 2t)e_3$$

$$(e) g(2a - b) = (1 + (2a - b)^2)e_1 + (2a - b)^3e_2$$

$$(f) f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = [1 + (t_0 + \Delta t)^3]e_1 + [2(t_0 + \Delta t) - (t_0 + \Delta t)^2]e_2 \\ + (t_0 + \Delta t)e_3 - [1 + t_0^3]e_1 - (2t_0 - t_0^2)e_2 - t_0 e_3 \\ = (3t_0^2 \Delta t + 3t_0 \Delta t^2 + \Delta t^3)e_1 + (2\Delta t - 2t_0 \Delta t - \Delta t^2)e_2 + \Delta t e_3$$

$$(g) f(h(t)) = f(2t - 1) = (1 + (2t - 1)^3)e_1 + (2(2t - 1) - (2t - 1)^2)e_2 + (2t - 1)e_3 \\ = (8t^3 - 12t^2 + 6t)e_1 + (-4t^2 + 8t - 3)e_2 + (2t - 1)e_3$$

- 2.9. Demostrar que la curva engendrada por el vector

$$x = (-1 + \sin 2t \cos 3t)e_1 + (2 + \sin 2t \sin 3t)e_2 + (-3 + \cos 2t)e_3$$

está sobre la superficie de la esfera de radio 1 y centro en $a = -e_1 + 2e_2 - 3e_3$.

$$|x - a| = |(\sin 2t \cos 3t)e_1 + (\sin 2t \sin 3t)e_2 + (\cos 2t)e_3| \\ = (\sin^2 2t \cos^2 3t + \sin^2 2t \sin^2 3t + \cos^2 2t)^{1/2} = (\sin^2 2t + \cos^2 2t)^{1/2} = 1$$

de donde se deduce el resultado que se busca.

- 2.10. Demostrar que la curva engendrada por el vector

$$x = (-2 + \sin t)e_1 + (t^2 + 2)e_2 + (t^2 - 1 + 2 \sin t)e_3$$

está sobre el plano que pasa por $a = e_2 + 2e_3$ y es normal a $N = 2e_1 + e_2 - e_3$.

$$(x - a) \cdot N = [(-2 + \sin t)e_1 + (t^2 + 1)e_2 + (t^2 - 3 + 2 \sin t)e_3] \cdot [2e_1 + e_2 - e_3] = 0$$

Se deduce, pues, que x pertenece al plano que pasa por a y es normal a N .

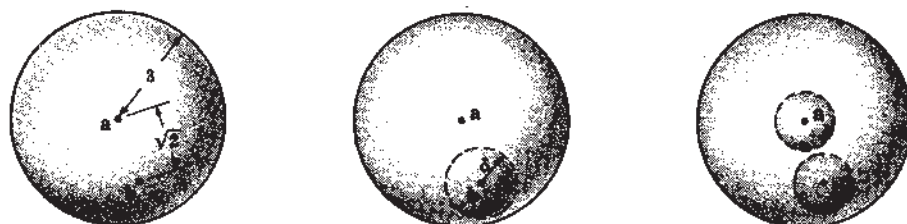
- 2.11. Sean $a = e_1 - 2e_2 + e_3$ y $b = 2e_1 - 3e_2 + e_3$. (a) Demostrar que b pertenece a $S_3(a)$. (b) Hallar un $\delta > 0$ tal que $S_\delta(b)$ esté contenido en $S_3(a)$. (c) Hallar ϵ_1 y ϵ_2 tales que $S_{\epsilon_1}(a)$ y $S_{\epsilon_2}(b)$ sean disjuntos.

(a) Puesto que $|b - a| = \sqrt{2} < 3$, b es de $S_3(a)$.

(b) Sea $\delta \leq 3 - |b - a| = 3 - \sqrt{2}$. Si x pertenece a $S_\delta(b)$, i.e. si $|x - b| < \delta$, entonces

$$|x - a| = |x - b + b - a| \leq |x - b| + |b - a| < \delta + \sqrt{2} \leq 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3$$

es decir $|x - a| < 3$, y x pertenece a $S_3(a)$. Como quiera que cualquier x perteneciente a $S_\delta(b)$ pertenece también a $S_3(a)$, $S_\delta(b)$ está contenido en $S_3(a)$. Véase la figura 2-14.



$$\delta \leq 3 - \sqrt{2}$$

Fig. 2-14

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \leq \sqrt{2}/2$$

- (c) Sea $\epsilon_1 = \epsilon_2 \leq |b - a| = \sqrt{2}/2$; entonces $S_{\epsilon_1}(a)$ y $S_{\epsilon_2}(b)$ son disjuntos. En efecto, si supusiéramos, al contrario, que y pertenece a $S_{\epsilon_1}(a)$ y $S_{\epsilon_2}(b)$; entonces $|y - a| < \sqrt{2}/2$ y $|y - b| < \sqrt{2}/2$. Pero,

$$\sqrt{2} = |b - a| = |b - y + y - a| \leq |y - b| + |y - a| < \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2$$

lo cual es imposible. Así, pues, $S_{\epsilon_1}(a)$ y $S_{\epsilon_2}(b)$ son disjuntos.

- 2.12. Demostrar que los puntos $P(t^2, -t, 2t)$ caen dentro de $S_{1/3}(1, -1, 2)$ para todo t de $S_{1/10}(1)$.

Si t pertenece a $S_{1/10}(1)$, entonces $|t - 1| < 1/10$ o sea $(t - 1)^2 < 1/100$. Además,

$$\begin{aligned} (t+1)^2 &= ((t-1)+2)^2 = (t-1)^2 + 4(t-1) + 4 \\ &\leq (t-1)^2 + 4|t-1| + 4 \leq (1/100) + (4/10) + 4 \leq 5 \end{aligned}$$

Ahora, bien, para este valor de t , la distancia entre $P(t^2, -t, 2t)$ y $(1, -1, 2)$ es

$$\begin{aligned} [(t^2-1)^2 + (-t+1)^2 + (2t-2)^2]^{1/2} &= [(t+1)^2(t-1)^2 + (t-1)^2 + 4(t-1)^2]^{1/2} \\ &\leq [(5/100) + (1/100) + (4/100)]^{1/2} \leq 1/\sqrt{10} < 1/3 \end{aligned}$$

Así, pues, P cae dentro de $S_{1/3}(1, -1, 2)$ para todo t de $S_{1/10}(1)$.

- 2.13. Hallar un $\delta > 0$ tal que los vectores $x = t^2e_1 - te_2 + 2te_3$ estén en $S_{1/100}(e_1 - e_2 + 2e_3)$ para todo t de $S_\delta(1)$.

Sea $a = e_1 - e_2 + 2e_3$. Entonces,

$$\begin{aligned} |x - a| &= |(t^2-1)e_1 - (t-1)e_2 + (2t-2)e_3| \\ &\leq |t^2-1||e_1| + |t-1||e_2| + |2t-2||e_3| \leq |t-1||t+1| + |t-1| + 2|t-1| \\ &\leq |t-1|(|t+1| + 3) = |t-1|(|t-1| + 2|1| + 3) \leq |t-1|(|t-1| + 5) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $|t - 1| < 1$; entonces, $|x - a| \leq |t - 1|6 < 1/100$ si $|t - 1| < 1/600$. De este modo, si $|t - 1| < 1/600$, es decir, si t pertenece a $S_\delta(1)$, en donde $\delta = 1/600$, entonces, evidentemente, $|t - 1| < 1$ y

$$|x - a| \leq |t - 1|(|t - 1| + 5) \leq |t - 1|6 < (1/600)6 = 1/100$$

es decir, x está en $S_{1/100}(a)$, que es lo que se buscaba.

LIMITES Y CONTINUIDAD

- 2.14. Calcular el $\lim_{t \rightarrow 2} [(3t^2 + 1)e_1 - t^3e_2 + e_3]$.

$$\lim_{t \rightarrow 2} [(3t^2 + 1)e_1 - t^3e_2 + e_3] = \left(\lim_{t \rightarrow 2} (3t^2 + 1) \right) e_1 - \left(\lim_{t \rightarrow 2} t^3 \right) e_2 + \left(\lim_{t \rightarrow 2} 1 \right) e_3 = 13e_1 - 8e_2 + e_3$$

- 2.15. Sean $f(t) = (\sin t)e_1 + te_3$ y $g(t) = (t^2 + 1)e_1 + e^te_2$. Encontrar (a) $\lim_{t \rightarrow 0} (f(t) \cdot g(t))$, (b) $\lim_{t \rightarrow 0} (f(t) \times g(t))$.

$$\begin{aligned} (a) \quad \lim_{t \rightarrow 0} (f(t) \cdot g(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} g(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} ((\sin t)e_1 + te_3) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} ((t^2 + 1)e_1 + e^te_2) \\ &= 0 \cdot (e_1 + e_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \lim_{t \rightarrow 0} (f(t) \times g(t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \times \lim_{t \rightarrow 0} g(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} ((\sin t)e_1 + te_3) \times \lim_{t \rightarrow 0} ((t^2 + 1)e_1 + e^te_2) \\ &= 0 \times (e_1 + e_2) = 0 \end{aligned}$$

- 2.16. Definir la función $f(t) = \frac{\sin t}{t}e_1 + (\cos t)e_2$ en $t = 0$ de manera que $f(t)$ sea continua en $t = 0$.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}e_1 + (\cos t)e_2 \right) = e_1 + e_2$$

De este modo, si, por definición, $f(0) = e_1 + e_2$, entonces $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0)$ y $f(t)$ será continua en $t = 0$.

- 2.17. Demostrar que si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son continuas en t_0 , entonces $[f(t) \ g(t) \ h(t)]$ es continua en t_0 .

Por la hipótesis, $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = g(t_0)$, y $\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = h(t_0)$. Del ejemplo 2.15 se deduce que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) \ g(t) \ h(t)] = [f(t_0) \ g(t_0) \ h(t_0)]$$

Y, en consecuencia, $[f(t) \ g(t) \ h(t)]$ es continua en t_0 .

- 2.18. Utilizando la definición de límite, demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow 1} (t^2e_1 + (t+1)e_2) = e_1 + 2e_2$$

Sea $f(t) = t^2e_1 + (t+1)e_2$ y $L = e_1 + 2e_2$, y consideremos que

$$\begin{aligned} |f(t) - L| &= |(t^2-1)e_1 + (t-1)e_2| \leq |t^2-1||e_1| + |t-1||e_2| \\ &\leq |t-1||t+1| + |t-1| \leq |t-1|(|t-1| + 2 + 1) \leq |t-1|(|t-1| + 3) \end{aligned}$$

Si tomamos $|t - 1| < 1$, se concluye, además, que

$$|f(t) - L| \leq |t-1|4 < \epsilon \quad \text{si} \quad |t-1| < \epsilon/4$$

Así, pues, el dar un $\epsilon > 0$, arbitrario, nos llevó a escoger un $\delta = \min(1, \epsilon/4)$. Entonces, si $|t - 1| < \delta$, es decir, si t pertenece a $S_\delta(1)$, se tiene $|t - 1| < 1$ y $|t - 1| < \epsilon/4$; y, para estos valores de t ,

$$|f(t) - L| \leq |t-1|(|t-1| + 3) = |t-1|4 < \epsilon$$

es decir, $f(t)$ pertenece a $S_\epsilon(L)$, que era lo que deseábamos demostrar.

- 2.19. Si $f(t)$ es acotada en t_0 y $g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$, demostrar que $f(t) \times g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$.

Sea un $\epsilon > 0$ arbitrariamente dado. Puesto que $f(t)$ es acotada en t_0 , existen un $M > 0$ y un $\delta_1 > 0$ tales que $|f(t)| \leq M$ para todo $0 < |t - t_0| < \delta_1$. Por otra parte, como quiera que $g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que $|g(t)| < \epsilon/M$ para $0 < |t - t_0| < \delta_2$. Escogamos ahora un $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$; entonces, para $0 < |t - t_0| < \delta$, tenemos $0 < |t - t_0| < \delta_1$ y $0 < |t - t_0| < \delta_2$. Y, en consecuencia,

$$|f(t) \times g(t) - 0| = |f(t) \times g(t)| = |f(t)| |g(t)| |\sin \angle(f, g)| \leq |f(t)| |g(t)| < M(\epsilon/M) = \epsilon$$

De esta suerte, $f(t) \times g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$.

2.20. Si $f(t) \rightarrow L$ y $g(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow t_0$, demostrar que $f(t) \times g(t) \rightarrow L \times M$ cuando $t \rightarrow t_0$.

Sea, ahora, un $\epsilon > 0$ arbitrariamente dado. Puesto que $g(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow t_0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|g(t) - M| < \epsilon/(2|L|)$ para $0 < |t - t_0| < \delta_1$. Además, $g(t)$ es acotada en t_0 y, de este modo, existen un $\delta_2 > 0$ y un $K > 0$ tales que $|g(t)| \leq K$ para $0 < |t - t_0| < \delta_2$. Por último, puesto que $f(t) \rightarrow L$ cuando $t \rightarrow t_0$, existe un $\delta_3 > 0$ tal que $|f(t) - L| < \epsilon/2K$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta_3$. Entonces, si $0 < |t - t_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, tenemos que $0 < |t - t_0| < \delta_1$, $0 < |t - t_0| < \delta_2$ y $0 < |t - t_0| < \delta_3$, y, de este modo,

$$|(f \times g) - (L \times M)| \leq |f - L| |g| + |L| |g - M| < (\epsilon/2K)(K) + |L|(\epsilon/2|L|) = \epsilon$$

DERIVACION

2.21. Sea $u = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + bte_3$, $a, b \neq 0$. Hallar: (a) $\frac{du}{dt}$, (b) $\left|\frac{du}{dt}\right|$, (c) $\frac{d^2u}{dt^2}$, (d) $\left|\frac{d^2u}{dt^2}\right|$.

$$(a) \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}a(\cos t)e_1 + \frac{d}{dt}a(\sin t)e_2 + \frac{d}{dt}(bt)e_3 = -a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2 + be_3$$

$$(b) \left|\frac{du}{dt}\right| = (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2)^{1/2} = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$(c) \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-a(\sin t)e_1 + a(\cos t)e_2 + be_3) = -a(\cos t)e_1 - a(\sin t)e_2$$

$$(d) \left|\frac{d^2u}{dt^2}\right| = (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)^{1/2} = |a|$$

2.22. Hallar la ecuación de la recta que es tangente en $t = 1$ a la curva engendrada por $x = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$.

El vector tangente a la curva en el punto x viene expresado por $dx/dt = e_1 + 2te_2 + 3t^2e_3$. Si y designa un punto cualquiera de la recta tangente, entonces la ecuación de ésta (véase la figura 2-15) viene a ser:

$$(y - x) = k \frac{dx}{dt} \text{ o sea } y = k \frac{dx}{dt} + x, \quad -\infty < k < \infty$$

En $t = 1$, $x = e_1 + e_2 + e_3$ y $dx/dt = e_1 + 2e_2 + 3e_3$. Por tanto, la ecuación de la tangente a la curva en $t = 1$ es

$$y = k(e_1 + 2e_2 + 3e_3) + (e_1 + e_2 + e_3), \quad -\infty < k < \infty$$

$$\text{o sea, } y = (k+1)e_1 + (2k+1)e_2 + (3k+1)e_3, \quad -\infty < k < \infty$$

2.23. Si $u = (3t^2 + 1)e_1 + (\sin t)e_2$ y $v = (\cos t)e_1 + e^te_3$, hallar:

$$(a) \frac{d}{dt}(u \cdot v), (b) \frac{d}{dt}(u \times v), (c) \frac{d}{dt}|u|.$$

$$(a) \frac{d}{dt}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \cdot v = ((3t^2 + 1)e_1 + (\sin t)e_2) \cdot (-\sin t)e_1 + e^te_3 + (6te_1 + (\cos t)e_2) \cdot ((\cos t)e_1 + e^te_3) = -(3t^2 + 1)\sin t + 6t \cos t$$

$$(b) \frac{d}{dt}(u \times v) = u \times \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & 3t^2 + 1 & -\sin t \\ e_2 & \sin t & 0 \\ e_3 & 0 & e^t \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} e_1 & 6t & \cos t \\ e_2 & \cos t & 0 \\ e_3 & 0 & e^t \end{pmatrix} = (\sin t)e^te_1 - (3t^2 + 1)e^te_2 + (\sin^2 t)e_3 + (\cos t)e^te_1 - 6te^te_2 - (\cos^2 t)e_3 = (\sin t + \cos t)e^te_1 - (3t^2 + 6t + 1)e^te_2 + (\sin^2 t - \cos^2 t)e_3$$

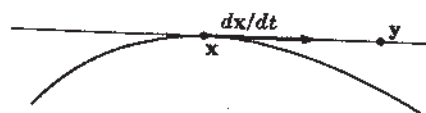


Fig. 2-15

Otro método:

$$u \times v = \begin{pmatrix} e_1 & 3t^2 + 1 & \cos t \\ e_2 & \sin t & 0 \\ e_3 & 0 & e^t \end{pmatrix} = (\sin t)e^te_1 - (3t^2 + 1)e^te_2 - (\sin t \cos t)e_3$$

y

$$\frac{d}{dt}(u \times v) = [(\sin t)e^t + (\cos t)e^t]e_1 - [(3t^2 + 1)e^t + 6te^t]e_2 - [-\sin^2 t + \cos^2 t]e_3 = (\sin t + \cos t)e^te_1 - (3t^2 + 6t + 1)e^te_2 + (\sin^2 t - \cos^2 t)e_3$$

$$(c) \frac{d}{dt}|u| = \frac{d}{dt}(u \cdot u)^{1/2} = \frac{1}{2}(u \cdot u)^{-1/2} \frac{d}{dt}(u \cdot u) = \frac{1}{2}(u \cdot u)^{-1/2} \left(u \cdot \frac{du}{dt} \right) = \frac{(u \cdot u)}{|u|} \cdot \frac{du}{dt} = [(3t^2 + 1)e_1 + (\sin t)e_2] / [(3t^2 + 1)^2 + \sin^2 t]^{1/2} \cdot (6te_1 + (\cos t)e_2) = (18t^3 + 6t + \sin t \cos t) / [(3t^2 + 1)^2 + \sin^2 t]^{1/2}$$

2.24. Sean $u = (\sin t)e_1 + 2te_2 + te_3$, ($t > 0$), y $t = \log \theta$. Hallar $du/d\theta$, (a) como función de θ , (b) como función de t .

$$(a) \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta} = ((\cos t)e_1 + 4te_2 + e_3)(1/\theta). \text{ Reemplazando por } t, \quad du/d\theta = (1/\theta)((\cos \log \theta)e_1 + 4(\log \theta)e_2 + e_3)$$

Otro método:

Sustituyendo por t , se tiene: $u = (\sin \log \theta)e_1 + 2(\log \theta)e_2 + (\log \theta)e_3$. De donde,

$$\frac{du}{d\theta} = (\cos \log \theta)(1/\theta)e_1 + 4(\log \theta)(1/\theta)e_2 + (1/\theta)e_3 = (1/\theta)((\cos \log \theta)e_1 + 4(\log \theta)e_2 + e_3)$$

$$(b) \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta} = ((\cos t)e_1 + 4te_2 + e_3)(1/\theta) = e^{-t}((\cos t)e_1 + 4te_2 + e_3)$$

Otro método:

Como es $\theta = e^t$, $d\theta/dt = e^t$. Y de aquí,

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{du}{dt} / \frac{d\theta}{dt} = e^{-t}((\cos t)e_1 + 4te_2 + e_3)$$

2.25. Utilizar la definición de derivada para demostrar que:

(a) Si $f(t) = a$, $a = \text{constante}$, entonces $f'(t) = 0$.

(b) Si $f(t) = ah(t)$, $a = \text{constante}$, entonces $f'(t) = ah'(t)$.

$$(a) f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a - a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$(b) f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{ah(t + \Delta t) - ah(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = ah'(t)$$

2.26. Demostrar el teorema 2.6, a saber: Si $f(t)$ es derivable en t_0 , entonces $f(t)$ es continua en t_0 .

Consideremos que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t) - f(t_0)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} (t - t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0) = [f'(t_0)]0 = 0$$

y, de este modo, $f(t)$ es continua en t_0 .

2.27. Si u y v son funciones derivables respecto de t , demostrar que

$$\frac{d}{dt}(u+v) = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}$$

Escribamos $w(t) = u(t) + v(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u+v) &= \frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) + v(t+\Delta t) - u(t) - v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

2.28. Si u y v son funciones derivables respecto de t , demostrar que

$$\frac{d}{dt}(u \times v) = u \times \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \times v.$$

Hagamos $w(t) = u(t) \times v(t)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u \times v) &= \frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{w(t+\Delta t) - w(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) \times v(t+\Delta t) - u(t) \times v(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{u(t+\Delta t) \times (v(t+\Delta t) - v(t))}{\Delta t} + \frac{(u(t+\Delta t) - u(t)) \times v(t)}{\Delta t} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} u(t+\Delta t) \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v(t) \\ &= u \times \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \times v \end{aligned}$$

en donde utilizamos el hecho de que $u(t)$ es continua por ser derivable. Entonces $\lim_{t \rightarrow 0} u(t+\Delta t) = u(t)$ y $v(t)$ es independiente de Δt ; de donde, resulta que $\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = v(t)$. Otro método consiste en hallar u y v en función de una base y hacer la derivada respecto de las componentes.

2.29. Demostrar que la función $u = a \cos kt + b \sin kt$, $a, b = \text{constante}$, es una solución de la ecuación $d^2u/dt^2 = -k^2u$.

$$\begin{aligned} du/dt &= a \frac{d}{dt} \cos kt + b \frac{d}{dt} \sin kt = -ak \sin kt + bk \cos kt \\ d^2u/dt^2 &= -ak^2 \cos kt - bk^2 \sin kt = -k^2(a \cos kt + b \sin kt) = -k^2u \end{aligned}$$

2.30. Demostrar que $u \cdot \frac{du}{dt} = |u| \frac{d|u|}{dt}$.

$$\frac{d}{dt}(u \cdot u) = \frac{d}{dt}|u|^2, \quad u \cdot \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} \cdot u = 2u \cdot \frac{du}{dt} = 2|u| \frac{d|u|}{dt}, \quad \text{o} \quad u \cdot \frac{du}{dt} = |u| \frac{d|u|}{dt}$$

2.31. Si $f(t)$ es derivable en t_0 , demostrar que

$$f(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + f'(t_0)\Delta t + R(t_0, \Delta t)$$

de donde $(R(t_0, \Delta t)/\Delta t) \rightarrow 0$ as $\Delta t \rightarrow 0$.

Definamos $R = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) - f'(t_0)\Delta t$. Entonces,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} R/\Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) - f'(t_0)\Delta t]/\Delta t$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} - f'(t_0) \right] = f'(t_0) - f'(t_0) = 0$$

que era lo que queríamos demostrar.

2.32. Demostrar el recíproco del problema 2.31, a saber: Si existe una función lineal $a\Delta t$ de Δt , tal que $f(t_0 + \Delta t) = f(t_0) + a\Delta t + R$, siendo $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} R/\Delta t = 0$, entonces, $f(t)$ es derivable en t_0 , y $a = f'(t_0)$.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a\Delta t + R}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R/\Delta t = a$$

Y, por tanto, $f(t)$ es derivable en t_0 y $f'(t_0) = a$.

EL TEOREMA DE TAYLOR Y LAS FUNCIONES ANALITICAS

2.33. Demostrar que

$$\begin{aligned} (\sin t)e_1 + (t^2 + 1)e_2 &= e_1 + \frac{1}{2}(\pi^2 + 4)e_2 + \pi e_2(t - \pi/2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-e_1 + 2e_2)(t - \pi/2)^2 + o[(t - \pi/2)^2] \end{aligned}$$

Hallamos los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la función $f(t) = (\sin t)e_1 + (t^2 + 1)e_2$, alrededor de $t = \pi/2$. O sea:

$$\begin{aligned} f(t) &= (\sin t)e_1 + (t^2 + 1)e_2 & f(\pi/2) &= e_1 + \frac{1}{2}(\pi^2 + 4)e_2 \\ f'(t) &= \cos t e_1 + 2te_2 & f'(\pi/2) &= \pi e_2 \\ f''(t) &= -\sin t e_1 + 2e_2 & f''(\pi/2) &= -e_1 + 2e_2 \end{aligned}$$

Así, pues, $(\sin t)e_1 + (t^2 + 1)e_2 = e_1 + \frac{1}{2}(\pi^2 + 4)e_2 + \pi e_2(t - \pi/2) + \frac{1}{2}(-e_1 + 2e_2)(t - \pi/2)^2 + R$ en donde, $\lim_{t \rightarrow \pi/2} R/(t - \pi/2)^2 = 0$.

2.34. Demostrar que en $t = 0$: (a) $to(t^2) = o(t^3)$, (b) $o(t^2) + o(t^3) = o(t^2)$, (c) $o(t^2) \cdot o(t^3) = o(t^5)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{t \rightarrow 0} to(t^2)/t^3 &= \lim_{t \rightarrow 0} (t/t)(o(t^2)/t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} o(t^2)/t^2 = 0 \\ \text{(b)} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (o(t^2) + o(t^3))/t^2 &= \lim_{t \rightarrow 0} o(t^2)/t^2 + \lim_{t \rightarrow 0} t(o(t^3)/t^3) = 0 \\ \text{(c)} \quad \lim_{t \rightarrow 0} o(t^2) \cdot o(t^3)/t^5 &= \lim_{t \rightarrow 0} o(t^2)/t^2 \lim_{t \rightarrow 0} o(t^3)/t^3 = 0 \end{aligned}$$

2.35. Si $f(t)$ es de clase C^m en I , demuéstrese que

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \dots + \frac{f^{(m-1)}(t_0)}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1} + O[(t-t_0)^m]$$

Según el teorema de Taylor,

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \dots + \frac{f^{(m-1)}(t_0)}{(m-1)!}(t-t_0)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + o[(t-t_0)^m]$$

Y, en consecuencia, basta demostrar que

$$\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + o[(t-t_0)^m] = O[(t-t_0)^m]$$

$$\begin{aligned} \text{Pero,} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \left\{ \left[\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + o[(t-t_0)^m] \right] / (t-t_0)^m \right\} \\ = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!} + \lim_{t \rightarrow t_0} o[(t-t_0)^m]/(t-t_0)^m = \frac{f^{(m)}(t_0)}{m!} \end{aligned}$$

De donde $\left[\frac{f^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + o[(t-t_0)^m] \right] / (t-t_0)^m$ es acotada, que era lo que se quería demostrar.

2.36. Si $f(t) = o(g(t))$ en t_0 , demostrar que $f(t) = O(g(t))$ en t_0 .

Puesto que $f(t) = o(g(t))$, $f(t)/g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_0$. De donde, según el teorema 2.2, $f(t)/g(t)$ es acotada en t_0 . Y, de este modo, $f(t) = O(g(t))$ en t_0 .

2.37. Si $f_1(t) = o(g_1(t))$ y $f_2(t) = O(g_2(t))$ en t_0 , demostrar que

$$f_1(t) \times f_2(t) = o(g_1(t)g_2(t)) \text{ en } t_0$$

o, como también puede decirse, $o(g_1(t)) \times O(g_2(t)) = o(g_1(t)g_2(t))$.

Puesto que $f_1(t)/g_1(t) \rightarrow 0$ y $f_2(t)/g_2(t)$ es acotada en $t = t_0$, del problema 2.19 se deduce que

$$\frac{f_1(t) \times f_2(t)}{g_1(t)g_2(t)} = \frac{f_1(t)}{g_1(t)} \times \frac{f_2(t)}{g_2(t)} \rightarrow 0$$

De donde, $f_1(t) \times f_2(t) = o(g_1(t)g_2(t))$.

2.38. Si $|g_1(t)| \leq |g_2(t)|$, en algún $S_2(t_0)$, demostrar que, en t_0 , es

$$o(g_1(t)) + o(g_2(t)) = o(g_2(t))$$

Consideremos:

$$\left| \frac{o(g_1(t)) + o(g_2(t))}{g_2(t)} \right| \leq \left| \frac{o(g_1(t))}{g_2(t)} \right| + \left| \frac{o(g_2(t))}{g_2(t)} \right| \leq \left| \frac{o(g_1(t))}{g_1(t)} \right| + \left| \frac{o(g_2(t))}{g_2(t)} \right|$$

en donde, utilizamos $|g_1(t)| \leq |g_2(t)|$ y, así, $\left| \frac{o(g_1(t))}{g_2(t)} \right| \leq \left| \frac{o(g_1(t))}{g_1(t)} \right|$. Puesto que $o(g_1(t))/g_1(t) \rightarrow 0$ y $o(g_2(t))/g_2(t) \rightarrow 0$, para un entorno suficientemente pequeño de t_0 , entonces

$$\left| \frac{o(g_1(t))}{g_1(t)} \right| < \epsilon/2 \quad \text{y} \quad \left| \frac{o(g_2(t))}{g_2(t)} \right| < \epsilon/2$$

para un $\epsilon > 0$ arbitrario. De donde, $\left| \frac{o(g_1(t)) + o(g_2(t))}{g_2(t)} \right| < \epsilon$ y, de ese modo,

$$\left| \frac{o(g_1(t)) + o(g_2(t))}{g_2(t)} \right| \rightarrow 0 \quad \text{o sea,} \quad o(g_1(t)) + o(g_2(t)) = o(g_2(t))$$

Problemas propuestos

- 2.39. Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(1, 0, -1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(-1, -1, 0)$.
Resp. $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1$
- 2.40. Hallar la ecuación del plano que pasa por $A(1, -1, 0)$ y es normal a la recta $x_1 = -k + 1$, $x_2 = k + 1$, $x_3 = 3$. Resp. $x_1 - x_2 = 2$
- 2.41. Hallar la ecuación de la recta de intersección de los planos $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ y $2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1$. Resp. $x_1 = -k + 1$, $x_2 = 5k - 1$, $x_3 = 13k$, $(-\infty < k < \infty)$
- 2.42. Demostrar que la ecuación de la recta que pasa por a y es normal al plano $x \cdot n = d$, $|n| \neq 0$, es $x = kn + a$, $-\infty < k < \infty$.
- 2.43. Demostrar que la ecuación de la recta que pasa por a y es ortogonal a c y d , $c \times d \neq 0$, es $x = k(c \times d) + a$.
- 2.44. Hallar la ecuación del cono que tiene el vértice en el punto $A(0, 1, 1)$, el eje es paralelo al eje x_1 y el semi-ángulo del vértice es $\theta = 60^\circ$. Resp. $3x_1^2 - (x_2 - 1)^2 - (x_3 - 1)^2 = 0$

- 2.45. Calcular los vectores $x = (t^3 + 1)e_1 + (1 - t^2)e_2$ para valores enteros de t pertenecientes al intervalo $-4 \leq t \leq 4$, y dibujarlos.
- 2.46. Sean: $f(t) = (t^2 + 1)e_1 + t^3e_3$ y $g(t) = (\sin t)e_1 - (\cos t)e_2$. Hallar: (a) $f(a + b)$, (b) $g(t + \Delta t)$, (c) $f(\sin t) \times g(t^2 + 1)$.
Resp. (a) $(a^2 + 2ab + b^2 + 1)e_1 + (a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3)e_3$
(b) $\sin(t + \Delta t)e_1 - \cos(t + \Delta t)e_2$
(c) $(\cos(t^2 + 1)\sin^3 t)e_1 + (\sin(t^2 + 1)\sin^3 t)e_2 - (\cos(t^2 + 1)(1 + \sin^2 t))e_3$
- 2.47. Si $a = 2e_1 - e_2 + e_3$ y $b = e_1 + e_2 + e_3$, demostrar que b pertenece a $S_4(a)$ y hallar un $\delta > 0$ tal que $S_\delta(b)$ esté contenido en $S_4(a)$.
- 2.48. Calcular $\lim_{t \rightarrow -1} [(t^2 + 1)e_1 + e^t e_2 + [(t^2 - 1)/(t + 1)]e_3]$. Resp. $2e_1 + (1/e)e_2 - 2e_3$
- 2.49. Determinar los valores de t para los cuales $f(t) = [(t^2 + 1)/(t^2 - 1)]e_1 + (\tan t)e_2$ es discontinua. Resp. $t = 1, -1, \frac{1}{2}\pi \pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- 2.50. Sean: $f(t) = (t^2 - 1)e_2 + (\cos t)e_3$ y $g(t) = (\sin t)e_1 + e^t e_2$. Hallar: (a) $\lim_{t \rightarrow 0} (f(t) \cdot g(t))$, (b) $\lim_{t \rightarrow 0} (f(t) \times g(t))$. Resp. (a) -1 , (b) $-e_1$
- 2.51. Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son continuas en I , demostrar que $f(t) \times (g(t) \times h(t))$ es continua en I .
- 2.52. Si $u = (t^2 + 1)e_1 - te^t e_2 + (\log t)e_3$, $t > 0$, hallar: (a) du/dt , (b) d^2u/dt^2 .
Resp. (a) $2te_1 - (t + 1)e^t e_2 + (1/t)e_3$, (b) $2e_1 - (t + 2)e^t e_2 - (1/t^2)e_3$
- 2.53. Hallar la ecuación de la recta tangente en $t = 1$, a la curva que describe el vector $x = (t^2 - 2)e_1 + (t + 3)e_2 + (t^3 + 4t + 1)e_3$. Resp. $x = (2k - 1)e_1 + (k + 4)e_2 + (8k + 6)e_3$, $-\infty < k < \infty$
- 2.54. Si $u = (2 + t)e_2 + (\log t)e_3$ y $v = (\sin t)e_1 - (\cos t)e_2$, $t > 0$, hallar: (a) $\frac{d}{dt}(u \cdot v)$, (b) $\frac{d}{dt}(u \times v)$.
Resp. (a) $(2 + t)\sin t - \cos t$
(b) $[(1/t)\cos t - \log t \sin t]e_1 + [(1/t)\sin t + \log t \cos t]e_2 - [(2 + t)\cos t + \sin t]e_3$
- 2.55. Dados $u = e^t e_1 + 2(\sin t)e_2 + (t^2 + 1)e_3$ y $t = \theta^2 + 2$, $\theta \geq 2$. Hallar: $du/d\theta$ y $d^2u/d\theta^2$ como funciones de t .
Resp. $du/d\theta = 2(t - 2)^{1/2}(e^t e_1 + 2(\cos t)e_2 + 2te_3)$
 $d^2u/d\theta^2 = (4t - 6)e^t e_1 + [4\cos t - (8t - 16)\sin t]e_2 + (12t - 16)e_3$
- 2.56. Demostrar que: $\frac{d}{dt}\left(u \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt} \cdot v\right) = u \cdot \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{d^2u}{dt^2} \cdot v$.
- 2.57. Hallar los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de $f(t) = (\cos t)e_1 + (t^2 + 2t + 1)e_2$ en torno a $t = 0$. Resp. $(e_1 + e_2) + 2e_2t - e_1t^2/2 + t^2e_2$
- 2.58. Utilizando la definición de derivada (según el proceso de la Δ), demostrar que $\frac{d}{dt}[(t^2 + 1)e_1 + (1/(t + 1))e_2 + e_3] = 2te_1 - (1/(t + 1)^2)e_2$
- 2.59. Si u y v son funciones de t , derivables, demostrar que $\frac{d}{dt}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt} \cdot v$.
- 2.60. Hallar todas las u tales que $du/dt = (3t^2 + 1)e_1 + t^3e_2 - (\sin t)e_3$.
Resp. $u = (t^3 + t + C_1)e_1 + (t^4/4 + C_2)e_2 + (\cos t + C_3)e_3$
- 2.61. Hallar todas las u tales que $d^2u/dt^2 = at^2 + bt + c$, $a, b, c = \text{constantes}$.
Resp. $u = \frac{1}{12}at^4 + \frac{1}{6}bt^3 + \frac{1}{2}ct^2 + C_1t + C_2$
- 2.62. Demostrar que $u \times du/dt = 0$, si y sólo si u tiene dirección constante.
- 2.63. Demostrar que $(\tan^2 t)e_1 + (2t^3 + t^4)e_2 = O(t^2)$ en $t = 0$.
- 2.64. Suponiendo que $f(t)$ sea analítica en $t = t_0$ y que $f'(t_0) = 0$, $f''(t_0) = 0$, ..., $f^{(n)}(t_0) = 0$, $f^{(n+1)}(t_0) \neq 0$

demostrar que $f^{(n+1)}(t_0)$ representa un vector tangente a la curva $x = f(t)$ en $f(t_0)$.

2.65. Si $f(t) = \begin{cases} e^{-(1/t)^3} & \text{para } t \neq 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \end{cases}$, demostrar que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n .

2.66. Demostrar que los vectores $x = (t^2 + 1)e_1 + (t + 1)e_2 - te_3$ están en $S_{1/10}(5e_1 + 3e_2 - 2e_3)$ para todo t de $S_{1/100}(2)$.

2.67. Si $\lim_{t \rightarrow t_0} [f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + f_3(t)e_3] = L_1e_1 + L_2e_2 + L_3e_3$, demostrar que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = L_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

2.68. Si $f(t) \rightarrow L$ y $g(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow t_0$, demostrar que $f(t) \cdot g(t) \rightarrow L \cdot M$ cuando $t \rightarrow t_0$.

2.69. Demostrar que $[at^2 + o(t^3)] \cdot [bt + o(t^2)] = a \cdot bt^3 + o(t^4)$, a, b , = constantes.

2.70. Demostrar que $g(t) = O(g(t))$.

2.71. Demostrar que $o(g_1(t)) \cdot O(g_2(t)) = o(g_1(t)g_2(t))$.

2.72. Demostrar que $O(g_1(t)) \times O(g_2(t)) = O(g_1(t)g_2(t))$.

2.73. Si $f(t) \rightarrow f(t_0)$ cuando $t \rightarrow t_0$, y $h(\theta) \rightarrow t_0$ cuando $\theta \rightarrow \theta_0$, demostrar que $f(h(\theta)) \rightarrow f(t_0)$ cuando $\theta \rightarrow \theta_0$.

2.74. Demostrar la regla de la cadena, a saber: Si $u = f(t)$ y $t = h(\theta)$ son funciones de t y θ , derivables, entonces $\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta}$.

Capítulo 3

Concepto de curva

REPRESENTACIONES REGULARES

Se denomina *representación paramétrica regular* a una función vectorial

$$x = x(t), \quad t \in I \quad (3.1)$$

de t en un intervalo I , la cual goza de las siguientes propiedades:

- (i) $x(t)$ es de clase C^1 en I
- (ii) $x'(t) \neq 0$ para todo t de I

La variable t se llama *parámetro* de la representación.

Si en E^3 se escoge una base, la ecuación $x = x(t)$ equivale a las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad t \in I \quad (3.2)$$

que son las componentes de $x = x(t)$ respecto de las bases. Es evidente que $x = x(t)$ es una representación paramétrica regular si y sólo si cada una de las $x_i(t)$ pertenece a la clase C^1 y si para todo t de I , al menos una de las $x'_i(t) \neq 0$.

Ejemplo 3.1.

La función $x = (t+1)e_1 + (t^2+3)e_2, \quad -\infty < t < \infty$

es una representación paramétrica regular, pues $x' = e_1 + 2te_2$ es continua y $x' \neq 0$, para todo t . La imagen de la función es la parábola que se muestra en la figura 3-1.

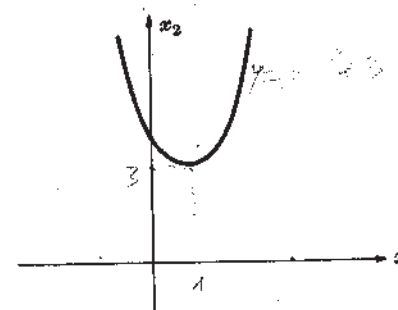


Fig. 3-1

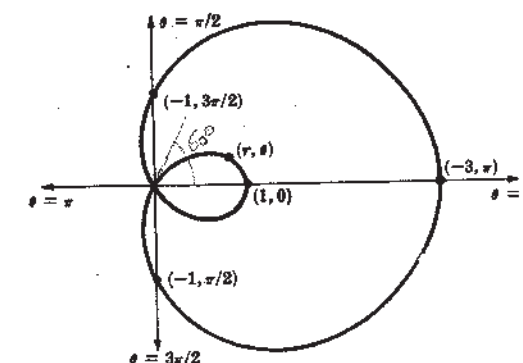


Fig. 3-2

Ejemplo 3.2.

En la figura 3-2 se muestra el gráfico de la ecuación $r = 2 \cos \theta - 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, en coordenadas polares. Las coordenadas rectangulares y las polares se relacionan mediante las ecuaciones: $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$. Al sustituir la r , se obtiene la representación

$$x_1 = (\cos \theta)(2 \cos \theta - 1), \quad x_2 = (\sin \theta)(2 \cos \theta - 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x = (\cos \theta)(2 \cos \theta - 1)e_1 + (\sin \theta)(2 \cos \theta - 1)e_2$$

Esta representación es regular porque

$$\mathbf{x}' = [-4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta] \mathbf{e}_1 + [2 \cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta - \cos \theta] \mathbf{e}_2$$

es continua, y haciendo el cálculo se ve que $|\mathbf{x}'| = \sqrt{5 - 4 \cos \theta} \neq 0$ para cualquier valor de θ y, por tanto, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ para todo valor de θ .

Una representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, definida en I , puede poseer puntos múltiples, es decir, pueden existir en I valores $t_1 \neq t_2$ para los cuales $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$. Sin embargo, *localmente* no ocurrirá tal cosa. Por ello, en el problema 3.7 demostraremos el

Teorema 3.1. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una representación paramétrica regular definida en I , entonces para todo t_0 de I existe un entorno de t_0 en el cual $\mathbf{x}(t)$ es inyectiva.

Ejemplo 3.3.

La función $\mathbf{x} = a(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + a(\operatorname{sen} \theta) \mathbf{e}_2$, $a \neq 0$, $(-\infty < \theta < \infty)$ es una representación regular de la circunferencia de radio igual a $|a|$ y centro en el origen, pues $d\mathbf{x}/d\theta = -a(\operatorname{sen} \theta) \mathbf{e}_1 + a(\cos \theta) \mathbf{e}_2$ es continua para todo valor de θ y

$$|d\mathbf{x}/d\theta| = |-a(\operatorname{sen} \theta) \mathbf{e}_1 + a(\cos \theta) \mathbf{e}_2| = |a| \neq 0$$

Obsérvese que cada uno de los puntos de esta representación es un punto múltiple, pues para cualquier valor de θ_0 , es

$$a \cos(\theta_0 + 2\pi) \mathbf{e}_1 + a \operatorname{sen}(\theta_0 + 2\pi) \mathbf{e}_2 = a(\cos \theta_0) \mathbf{e}_1 + a(\operatorname{sen} \theta_0) \mathbf{e}_2$$

Sin embargo, si la restringimos al intervalo $\theta_0 - \frac{1}{2}\pi < \theta < \theta_0 + \frac{1}{2}\pi$, por ejemplo, la función $\mathbf{x} = a(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + a(\operatorname{sen} \theta) \mathbf{e}_2$ es inyectiva.

Ejemplo 3.4.

$$\text{La función} \quad x_1 = t^2, \quad x_2 = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ t^2 \operatorname{sen} 1/t, & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad -\infty < t < \infty$$

que se representa en la figura 3-3 posee derivadas continuas para todo valor de t ; sin embargo, en $t = 0$, $dx_1/dt = dx_2/dt = 0$ y, por tanto, no es una representación regular. Obsérvese que esta función tiene puntos múltiples en todo entorno de $t = 0$. En efecto, consideremos un $\delta > 0$ arbitrario. Y escojamos un entero $N > 0$ de modo que $1/2\pi N < \delta$, y consideremos $t_1 = -(1/2\pi N)$ y $t_2 = +(1/2\pi N)$. Es evidente que $-\delta < t_1 < t_2 < \delta$; además,

$$x_1(t_1) = 1/4\pi^2 N^2 = x_1(t_2)$$

$$\text{y} \quad x_2(t_1) = 0 = (1/4\pi^2 N^2) \operatorname{sen} 2\pi N = x_2(t_2)$$

Y, de esta forma, tenemos un punto múltiple en $-\delta < t < \delta$.

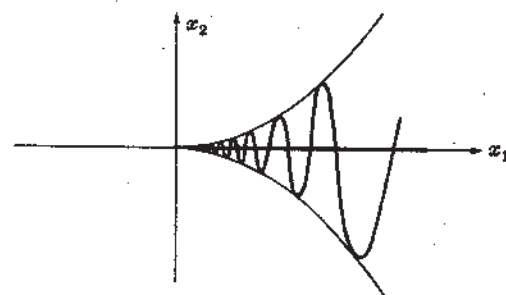


Fig. 3-3

CURVAS REGULARES

Se dice que una función numérica en el campo real $t = t(\theta)$ en un intervalo I_θ es un *cambio admisible de parámetro*, si

- (i) $t(\theta)$ es de clase C^1 en I_θ , (ii) $dt/d\theta \neq 0$ para todo θ en I_θ

Obsérvese que si $t = t(\theta)$ representa un cambio admisible de parámetro en I_θ , entonces $dt/d\theta$ es continua y $dt/d\theta \neq 0$. Y, en consecuencia, o $dt/d\theta > 0$ en I_θ , en cuyo caso $t(\theta)$ es una función "suave" creciente, o, bien, es $dt/d\theta < 0$ en I_θ y $t(\theta)$, y en ese caso la función "suave" es decreciente. Todo lo anterior nos permite demostrar (véase el problema 3.13) el siguiente

Teorema 3.2. Si $t = t(\theta)$ representa un cambio admisible de parámetro en I_θ , entonces

- (i) $t = t(\theta)$ es una aplicación inyectiva de I_θ en un intervalo $I_t = t(I_\theta)$.
(ii) La función inversa $\theta = \theta(t)$ es, a su vez, un cambio admisible de parámetro en I_t .

Ejemplo 3.5.

- (a) La función $t = (b-a)\theta + a$, $0 \leq \theta \leq 1$, $a < b$, representa un cambio admisible de parámetro que transforma el intervalo $0 \leq \theta \leq 1$ en el $a \leq t \leq b$. La inversa, $\theta = (t-a)/(b-a)$, es, también, un cambio admisible de parámetro que hace pasar del intervalo $a \leq t \leq b$ al $0 \leq \theta \leq 1$.
(b) La función $t = \tan(\pi\theta/2)$, $0 \leq \theta < 1$, es un cambio admisible de parámetro el cual lleva del intervalo $0 \leq \theta < 1$ al $0 \leq t < \infty$. La inversa es $\theta = (2/\pi) \tan^{-1} t$ que cambia $0 \leq t < \infty$ en $0 \leq \theta < 1$.

Se dice que una representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I_t$, es *equivalente* a una representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$, $\theta \in I_\theta$, si existe un cambio admisible de parámetro $t = t(\theta)$ en I_θ , tal que

$$(i) \quad t(I_\theta) = I_t, \quad (ii) \quad \mathbf{x}(t(\theta)) = \mathbf{x}^*(\theta)$$

En el problema 3.14 se demostrará que las condiciones anteriores definen una relación de equivalencia sobre el conjunto de las representaciones regulares. De esta suerte, *definimos una curva regular diciendo que es una clase de equivalencia de las representaciones paramétricas regulares*.

Obsérvese que una representación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ determina únicamente una curva C que consta de todas las representaciones que se relacionan con ella mediante un cambio admisible de parámetro. Por esto, podemos decir: "la curva C dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$...". Sin embargo, puede ocurrir que alguna propiedad de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ no sea necesariamente una propiedad de la curva. Cualquier propiedad de la curva debe ser común a todas las representaciones, o, como suele decirse, es "independiente del parámetro".

Ejemplo 3.6.

Supongamos que en la representación del ejemplo 3.2,

$$\mathbf{x} = (\cos \theta)(2 \cos \theta - 1) \mathbf{e}_1 + (\operatorname{sen} \theta)(2 \cos \theta - 1) \mathbf{e}_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

se introduzca el cambio admisible de variable representado por $\theta = t + 1$, $-1 \leq t \leq 2\pi - 1$. Así se obtiene la siguiente representación paramétrica equivalente:

$$\mathbf{x} = [\cos(t+1)][2 \cos(t+1) - 1] \mathbf{e}_1 + [\operatorname{sen}(t+1)][2 \cos(t+1) - 1] \mathbf{e}_2, \quad -1 \leq t \leq 2\pi - 1$$

Cuando t crece dentro del intervalo $-1 \leq t \leq 2\pi - 1$, entonces $\theta = t + 1$ crece suavemente dentro de $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y la ecuación transformada describe el mismo conjunto de puntos en la misma dirección de la anterior, tal como se muestra en la figura 3-4(a). Si introducimos el cambio admisible en el parámetro $\theta = -t$, $-2\pi \leq t \leq 0$, podemos obtener la representación equivalente siguiente:

$$\mathbf{x} = (\cos t)(2 \cos t - 1) \mathbf{e}_1 - (\operatorname{sen} t)(2 \cos t - 1) \mathbf{e}_2, \quad -2\pi \leq t \leq 0$$

En este caso, cuando t crece dentro del intervalo $-2\pi \leq t \leq 0$, entonces $\theta = -t$ decrece dentro del intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y el conjunto de puntos resulta descrito en el *sentido opuesto* del anterior, como se muestra en la figura 3-4(b). De esta suerte, el sentido en que se describe una curva es una propiedad de la representación y no de la curva en sí misma. Si introducimos el cambio de parámetro definido por

$$\theta = \theta(t) = \begin{cases} t, & \text{para } 0 \leq t \leq \pi/3 \\ -t + 2\pi, & \text{para } \pi/3 < t < 5\pi/3 \\ t, & \text{para } 5\pi/3 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

que, según se observa, no es un cambio admisible de parámetro, la ecuación transformada

$$\mathbf{x} = [\cos \theta(t)][2 \cos \theta(t) - 1] \mathbf{e}_1 + [\operatorname{sen} \theta(t)][2 \cos \theta(t) - 1] \mathbf{e}_2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

describe el mismo conjunto de puntos, pero en el sentido que muestra la figura 3-4(c). De acuerdo con nuestra definición, esta curva no es la misma que la anterior. Así, pues, una curva deberá considerarse no simplemente como un conjunto de puntos de E^3 , sino como un método general que sirve para repasar el conjunto de puntos que se especifican mediante una colección de representaciones paramétricas equivalentes.

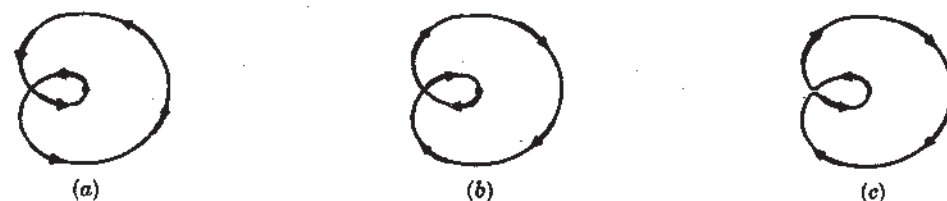


Fig. 3-4

Ejemplo 3.7.

Un ejemplo importante de una curva espacial es la hélice circular dada por

$$\mathbf{x} = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + bte_3, \quad a, b \neq 0, \quad -\infty < t < \infty$$

$$o \quad x_1 = a \cos t, \quad x_2 = a \sin t, \quad x_3 = bt, \quad a, b \neq 0, \quad -\infty < t < \infty$$

y que se muestra en la figura 3-5. La curva se halla sobre el cilindro circular de radio $|a|$: $x_1 = a \cos t$, $x_2 = a \sin t$, $-\infty < x_3 < \infty$. La ecuación $x_3 = bt$ "hace mover" los puntos de la curva con movimiento uniforme en la dirección y sentido de x_3 . Cuando t crece en 2π , entonces x_1 y x_2 vuelven a sus valores iniciales, mientras que x_3 crece [si $(b > 0)$] o decrece [si $(b < 0)$] en $2\pi|b|$, que es el llamado *paso* de la hélice.

Ejemplo 3.8.

Es interesante hacer ver que el intervalo unidad $0 \leq t \leq 1$ se puede aplicar en forma continua sobre el cuadrado unidad Q : $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ de E^2 , construyendo una "curva" que cubra una región de dos dimensiones. Tal curva y, por tanto, la aplicación, existe y se llama curva de Peano. Se construye del modo siguiente: Dividimos Q en cuatro cuadrados iguales que, juntamente con sus contornos, se designan con Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 . Luego, suponemos que cada uno de los Q_i se divide nuevamente en cuatro cuadrados iguales $Q_{i0}, Q_{i1}, Q_{i2}, Q_{i3}$, y cada uno de estos últimos se subdivide nuevamente en la misma forma, etc. Suponemos, además, que los cuadrados se marcan con subíndices en forma tal que, si pasamos de uno a otro de los cuadrados en el orden creciente de los subíndices, obtendremos un arco que no se corta a sí mismo, tal como se aprecia en la figura 3-6. La posibilidad de hacer esto se deja al lector como ejercicio.

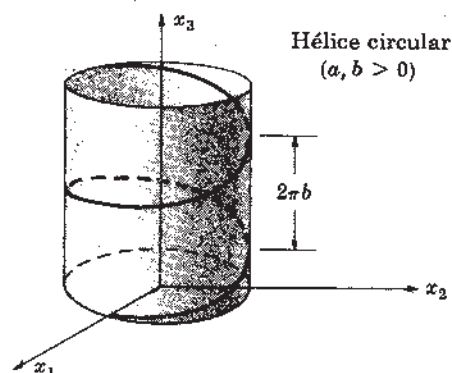


Fig. 3-5

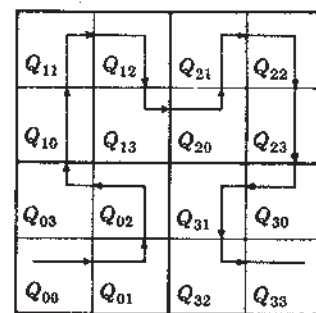


Fig. 3-6

Cada t_0 de $0 \leq t \leq 1$ se puede expresar en forma única como un decimal de infinitas cifras:

$$t_0 = .a_1a_2a_3 \dots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots$$

Esto es también cierto cuando se trabaja en base cuatro; es decir, que cada t_0 se puede expresar en forma única como una serie

$$t_0 = \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \frac{a_3}{4^3} + \dots$$

con enteros $0 \leq a_i \leq 3$. (Esta unicidad se obtiene omitiendo series que terminen en 3, es decir, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2}$.)

Ahora, bien, a cada $t_0 = \sum a_i/4^i$ le asignamos el único punto P_0 de Q que es común a la sucesión infinita de cuadrados cerrados $Q_{a_1}, Q_{a_1a_2}, Q_{a_1a_2a_3}, \dots$ encajados. Esta correspondencia o aplicación así establecida es sobreyectiva en Q , pues se puede demostrar que cada punto P de Q es común a una sucesión admisible de intervalos encajados.

Por último, esta aplicación es continua. En efecto, sea $S_\epsilon(P_0)$ un entorno arbitrario de P_0 . Tal como se ve en la figura 3-7, escogemos el $Q_{a_1a_2 \dots a_n}$, que contiene a P_0 , tan pequeño que él y los cuadrados que le son contiguos y del mismo tamaño, estén contenidos en $S_\epsilon(P_0)$.

Pero, en ese caso, todo t perteneciente al siguiente intervalo abierto que contenga a t_0 , es decir, tal que

$$\frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \dots + \frac{a_n - 1}{4^n} < t < \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{4^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{4^n}$$

se aplicará en el interior de $S_\epsilon(P_0)$. Y, en consecuencia, la aplicación es continua.

Esta correspondencia o aplicación no es inyectiva porque los puntos que pertenecen a los contornos de los cuadrados son comunes a más de una sucesión de cuadrados encajados. De hecho, es posible demostrar que una aplicación no continua del segmento sobre el cuadrado puede ser inyectiva.

Se dice que una curva regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I$, es *simple* si no tiene puntos múltiples, es decir, si $t_1 \neq t_2$ implica que $\mathbf{x}(t_1) \neq \mathbf{x}(t_2)$. Es evidente que esta es una propiedad de la curva y no de su representación analítica.

Se dice que una curva regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in I$, es un *arco regular* si I es un intervalo cerrado $a \leq t \leq b$. Los puntos $\mathbf{x}(a)$ y $\mathbf{x}(b)$ se denominan *extremos* del arco. Se llama *segmento de arco* de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sobre I a un arco $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $t \in I^*$, donde I^* es cualquier intervalo cerrado contenido en I y $\mathbf{x}^*(t)$ es la restricción de $\mathbf{x}(t)$ a I^* .

Ejemplo 3.9.

La curva del ejemplo 3.2 es un arco regular, pues

$$\begin{aligned} x_1 &= (\cos \theta)(2 \cos \theta - 1) \\ x_2 &= (\sin \theta)(2 \cos \theta - 1) \end{aligned} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es una representación regular sobre el intervalo cerrado $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Obsérvese que en este caso los puntos extremos de la curva son iguales. La parte de la curva, restringida al intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, por ejemplo, es un segmento de arco simple de la curva que se muestra en la figura 3-8.

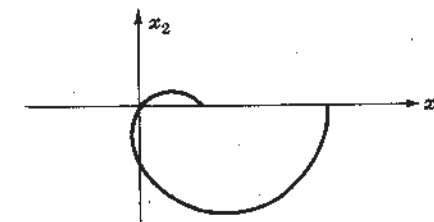


Fig. 3-8

Por último, sean $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ dos representaciones de una curva regular. Si $dt/d\theta > 0$, entonces t crece al crecer θ , y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ describen la curva en el mismo sentido. Si $dt/d\theta < 0$, entonces t decrece al crecer θ , y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ describirán la curva en sentidos opuestos. Se llama *curva regular orientada* a una curva a lo largo de la cual se ha escogido un sentido específico. En otras palabras, una curva regular orientada es un conjunto de representaciones paramétricas regulares tales que dos cualesquiera de ellas se relacionan entre sí mediante un cambio admisible de parámetro con derivada positiva.

PROYECCIONES ORTOGONALES

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ representa una curva C , como se muestra en la figura 3-9. Para un valor fijo t_0 , la expresión

$$\mathbf{x} = x_1(t_0)\mathbf{e}_1 + x_2(t_0)\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3, \quad -\infty < k < \infty$$

o sea,

$$x_1 = x_1(t_0), \quad x_2 = x_2(t_0), \quad x_3 = k, \quad -\infty < k < \infty$$

es la ecuación de la recta ortogonal al plano x_1x_2 y que pasa por el punto $\mathbf{x}(t_0)$. De esto se deduce que la familia de rectas

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = k, \quad -\infty < k < \infty \quad (3.3)$$

engendra una superficie cilíndrica ortogonal al plano x_1x_2 y que contiene la curva C .

La intersección del cilindro (3.3) con el plano x_1x_2 , es decir, $x_3 = 0$, se llama la *proyección ortogonal* Γ de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sobre el plano x_1x_2 . Y, en consecuencia, la proyección ortogonal, de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ viene dada por

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = 0$$

Las proyecciones ortogonales de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sobre los planos x_2x_3 y x_1x_3 son, respectivamente,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t)$$

y

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = 0, \quad x_3 = x_3(t)$$

Ejemplo 3.10.

La proyección ortogonal de la curva espacial $x_1 = t, x_2 = t^2, x_3 = t^3, -\infty < t < \infty$, sobre el plano x_1x_2 , es la parábola $x_1 = t, x_2 = t^2, x_3 = 0$. La proyección sobre el plano x_1x_3 es la cúbica $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = t^3$. La curva en cuestión es la intersección de los dos cilindros siguientes:

$$x_1 = t, \quad x_2 = t^2, \quad -\infty < x_3 < \infty \quad \text{y} \quad x_1 = t, \quad x_3 = t^3, \quad -\infty < x_2 < \infty$$

tal como se ve en la figura 3-10.

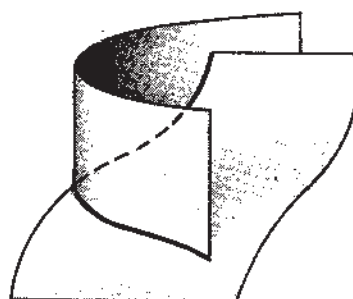


Fig. 3-10

REPRESENTACIONES IMPLICITAS DE CURVAS

Toda curva del espacio se puede determinar como la intersección de dos superficies, es decir, como el conjunto de los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfacen dos relaciones de la forma

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{y} \quad F_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (3.4)$$

Si en un punto (x_1, x_2, x_3) que cumple las condiciones anteriores ocurre, además, que

$$\det \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial x_1 & \partial F_1 / \partial x_2 \\ \partial F_2 / \partial x_1 & \partial F_2 / \partial x_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

entonces, de acuerdo con el teorema de las funciones implícitas, se deduce que en algún entorno de x_3 se pueden resolver las (3.4) para x_1 y x_2 como funciones de x_3 y se obtiene así una representación de la forma

$$x_1 = x_1(x_3), \quad x_2 = x_2(x_3), \quad x_3 = x_3$$

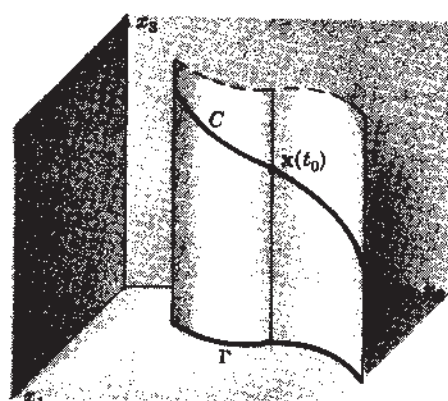


Fig. 3-9

donde el propio x_3 hace las veces de parámetro. Esto define, al menos localmente, una curva regular.

Ejemplo 3.11.

La intersección de dos superficies de segundo grado $x_2 - x_3^2 = 0$ y $x_3x_1 - x_2^2 = 0$ es la curva de tercer grado $x_1 = t^3, x_2 = t^2, x_3 = t$ juntamente con el eje de las $x_1, x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = 0$. Esto se obtiene del siguiente modo: Si $x_3 \neq 0$ podemos despejar x_1 y x_2 en función de x_3 en las expresiones dadas y obtenemos

$$x_2 = x_3^2, \quad x_1 = x_2^2/x_3 = x_3^4/x_3 = x_3^3$$

o, también, si hacemos $x_3 = t, x_1 = t^3, x_2 = t^2, x_3 = t$

Si $x_3 = 0$, entonces, $x_2 = x_3^2 = 0$ y x_1 puede ser arbitrario. Se obtiene así el eje de las $x_1, x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = 0$. Obsérvese que el punto $(0, 0, 0)$ es la intersección de las dos curvas.

CURVAS REGULARES DE CLASE C^m

Decimos que una representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en I es una *representación paramétrica regular de clase C^m* ($m \geq 1$) si $\mathbf{x}(t)$ es de clase C^m en I . Análogamente, decimos que un cambio admisible de parámetro $t = t(\theta)$ en I_0 es un *cambio admisible de parámetro de clase C^m* si $t(\theta)$ es de clase C^m en I_0 . Por último, dos representaciones paramétricas regulares de clase C^m definen la misma *curva regular de clase C^m* si se relacionan entre sí mediante un cambio admisible de parámetro de clase C^m . De esta suerte, una curva regular de clase C^m es un conjunto de representaciones de clase C^m , de las cuales dos cualesquiera se relacionan entre sí mediante un cambio admisible de parámetro de clase C^m .

Si bien, una representación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de clase C^m es también de clase C^j para todo $j \leq m$, la *curva* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de clase C^m no es una curva de clase C^j para $j < m$, porque la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de clase C^m contiene únicamente representaciones relacionadas con $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ mediante cambios admisibles de parámetro de clase C^m , mientras que la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de clase C^j para $j < m$ contiene, por añadidura, representaciones que se relacionan con $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ mediante cambios admisibles de parámetro que son, por ejemplo, de clase C^j pero no son de clase C^m .

Ejemplo 3.12.

La función vectorial $\mathbf{w}(t) = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + bte_3, -\infty < t < \infty$, es analítica. De este modo, la hélice $\mathbf{x} = \mathbf{w}(t)$ se puede considerar como una curva analítica regular siempre que consideremos únicamente aquellas representaciones que se relacionan con ella mediante un cambio analítico efectuado en el parámetro.

Ejemplo 3.13.

La representación

$$\mathbf{x} = \begin{cases} te_1 + e^{-1/t^2}e_3 & \text{para } t < 0 \\ 0 & \text{para } t = 0 \\ te_1 + e^{-1/t^2}e_2 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

es de clase C^∞ (véase el ejemplo 2.30 de la página 33), y, junto con todas las representaciones relacionadas de clase C^∞ , define la curva de clase C^∞ que se muestra en la figura 3-11. Obsérvese que para todo $t < 0$ la curva está en el plano x_1x_3 , y para todo $t > 0$ la curva está en el plano x_1x_2 .

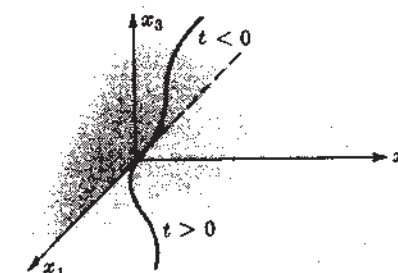


Fig. 3-11

DEFINICION DE LONGITUD DE ARCO

La longitud de un arco se define a partir de las longitudes de arcos poligonales aproximados. Así: Supongamos que un arco C , no necesariamente regular, venga dado por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \leq t \leq b$, y consideremos una subdivisión del intervalo $a \leq t \leq b$, del tipo siguiente

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Esto determina la sucesión de puntos de E^2

$$x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x(t_1), \quad \dots, \quad x_n = x(t_n)$$

que se unen en forma sucesiva para formar un arco poligonal aproximado P tal como se ve en la figura 3-12. La longitud del segmento determinado por dos puntos consecutivos x_{i-1} y x_i es $|x_i - x_{i-1}|$. De aquí, resulta que la longitud de P es

$$s(P) = \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| = \sum_{i=1}^n |x(t_i) - x(t_{i-1})| \quad (3.5)$$

Supongamos ahora que introducimos una mejor aproximación del arco poligonal P' , intercalando puntos adicionales, como se ve en la figura. Como quiera que la longitud de un lado de un polígono es menor que, o igual a, la suma de las longitudes de otros, se deduce que la longitud de P es menor que, o igual a, la longitud de P' , es decir, $s(P) \leq s(P')$.

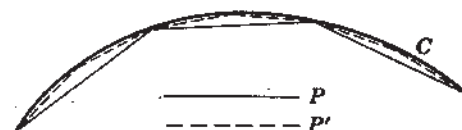


Fig. 3-12

Lo anterior, nos ha llevado, pues, a definir la longitud del arco C como la mayor de las longitudes de todos los posibles arcos poligonales aproximados P . De manera específica, se dice que un arco $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, es *rectificable* si el conjunto S de todos los posibles $s(P)$ es acotado superiormente. En este caso, el conjunto S tiene un superior que es, por definición, la *longitud* del arco.

Se dice que un conjunto S de números reales es acotado superiormente si existe un número real M tal que $x \leq M$ para todo x perteneciente a S . En este caso, el número M se llama una cota superior de S . Obsérvese que si M es una cota superior de S , entonces cualquier L , tal que $M \leq L$, también es una cota superior del conjunto. Una de las propiedades fundamentales de los números reales es que si S tiene una cota superior M , entonces tiene una cota superior mínima, llamada superior, es decir, una cota superior s tal que si L es una cota superior cualquiera, entonces $L \geq s$.

Es de observar que la longitud de un arco C es independiente del parámetro. En efecto, supongamos que $x = x(t)$ en I_1 y $x = x^*(\theta)$ en I_2 sean dos representaciones del arco C tales que $t = t(\theta)$ sea inyectiva. De este modo, a cada subdivisión $\theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n$ de I_2 , le corresponde una única subdivisión $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de I_1 , o, teniendo en cuenta la orientación, $t_n < t_{n-1} < \dots < t_0$, en donde $t_i = t_i(\theta)$, $i = 1, \dots, n$, que origina el mismo arco poligonal P , y, recíprocamente. Así, pues, el conjunto S de las longitudes de todos los arcos poligonales aproximados es independiente del parámetro y, en consecuencia, también lo es el superior de S , que es la longitud de C .

Ejemplo 3.14.

El arco $x = te_1 + t^2e_2$, $0 \leq t \leq 1$, es rectificable; porque, si consideramos una subdivisión $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, la longitud del arco poligonal aproximado es

$$\begin{aligned} s(P) &= \sum_{i=1}^n |(t_i e_1 + t_i^2 e_2) - (t_{i-1} e_1 + t_{i-1}^2 e_2)| \\ &= \sum_{i=1}^n |(t_i - t_{i-1})e_1 + (t_i^2 - t_{i-1}^2)e_2| \\ &\leq \sum_{i=1}^n [(t_i - t_{i-1})|e_1| + |t_i^2 - t_{i-1}^2||e_2|] \\ &\leq \sum_{i=1}^n [(t_i - t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1})(t_i + t_{i-1})] \\ &\leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})(1 + t_i + t_{i-1}) \\ &\leq 3 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = 3 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho de que para $0 \leq t_{i-1} < t_i \leq 1$, $1 + t_{i-1} + t_i \leq 3$, y $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = t_n - t_0 = 1$.

De esta suerte, para cualquier P , el valor de $s(P)$ está acotado por 3. Por consiguiente, el arco es rectificable y su longitud es igual al superior de $s(P)$.

Ejemplo 3.15.

La curva

$$\begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= \begin{cases} t \cos(1/t) & \text{para } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{para } t = 0 \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1) \end{aligned}$$

que se muestra en la figura 3-13 no es rectificable. En efecto, si utilizamos la subdivisión $0, 1/(N-1)\pi, \dots, 1/2\pi, 1/\pi, 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} s(P) &= \left| \frac{1}{(N-1)\pi} e_1 + \frac{1}{(N-1)\pi} [\cos(N-1)\pi] e_2 \right| \\ &\quad + \left| \left[\frac{1}{(N-2)\pi} - \frac{1}{(N-1)\pi} \right] e_1 + \left[\frac{1}{(N-2)\pi} \cos(N-2)\pi - \frac{1}{(N-1)\pi} \cos(N-1)\pi \right] e_2 \right| \\ &\quad + \dots + \left| \left[1 - \frac{1}{\pi} \right] e_1 + \left[\cos 1 - \frac{1}{\pi} \cos \pi \right] e_2 \right| \end{aligned}$$

Si despreciamos los términos primero y último, entonces

$$\begin{aligned} s(P) &\geq \sum_{n=1}^{N-2} \left| \left[\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi} \right] e_1 + \left[\frac{1}{n\pi} \cos n\pi - \frac{1}{n+1} \cos(n+1)\pi \right] e_2 \right| \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} \left| \left[\frac{1}{n\pi} \cos n\pi - \frac{1}{n+1} \cos(n+1)\pi \right] e_2 \right| \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} \left| (-1)^n \frac{1}{n\pi} - (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)\pi} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{N-2} \left| \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{(n+1)\pi} \right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

en donde, para pasar de la primera línea a la segunda hemos utilizado la desigualdad $|ae_1 + be_2| \geq |be_2|$. Pero, la suma $\sum_{n=1}^{N-2} \frac{1}{n+1}$ diverge hacia el infinito. Es decir, $s(P)$ se puede hacer tan grande como se quiera con sólo tomar a N suficientemente grande. Así, pues, la curva no es rectificable.

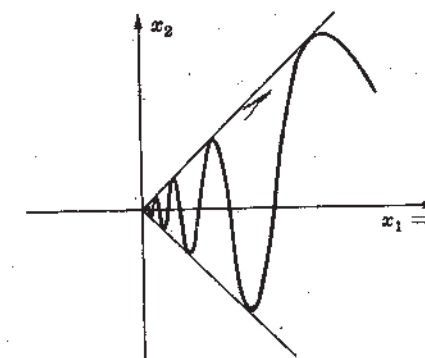


Fig. 3-13

En el problema 3.24 demostraremos el

Teorema 3.3. Un arco regular $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, es rectificable y su longitud viene dada por la integral

$$s = \int_a^b \left| \frac{dx}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt} \right)^2} dt \quad (3.6)$$

Ejemplo 3.16.

La longitud del arco de hélice $x = (a \cos t)e_1 + (a \sin t)e_2 + bte_3$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2)^{1/2} dt = 2\pi(a^2 + b^2)^{1/2}$$

LA LONGITUD DE ARCO COMO PARAMETRO

Sea $x = x(t)$ una curva regular en I , y considérese la función

$$s = s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{dx}{dt} \right| dt \quad (3.7)$$

Si es $t \geq t_0$, entonces $s \geq 0$ y es igual a la longitud del arco de la curva comprendido entre $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{x}(t)$. Si $t < t_0$, entonces $s < 0$ y es igual a la longitud del arco, tomada con signo menos, entre $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{x}(t)$.

Ahora, bien, del teorema fundamental del cálculo se deduce que (3.7) tiene derivada continua, no nula, que viene dada por la expresión

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$$

Y, en consecuencia, $s = s(t)$ es un cambio admisible de parámetro en I . Además, $s(t)$ es de clase C^m en I si $\mathbf{x}(t)$ es de clase C^m . De modo que la longitud de arco s se puede introducir como un parámetro a lo largo de la curva.

Obsérvese que una representación en función de la longitud de arco no es única, pues depende del punto inicial t_0 que se escoja (y en él, $s = 0$) y de la orientación; es decir, que se podría tener

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = - \int_t^{t_0} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt$$

Por esta razón, para ser más precisos, decimos, por definición, que una representación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en I , es una *representación en función de la longitud de arco* o, también, una *representación natural* si $|d\mathbf{x}/ds| = 1$. Con base en este hecho, demostraremos (en los problemas números 3.19 y 3.20) el siguiente

Teorema 3.4. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una representación natural de una curva C , entonces

- (i) $|s_2 - s_1|$ es la longitud del segmento de arco de C entre $\mathbf{x}(s_1)$ y $\mathbf{x}(s_2)$.
- (ii) Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(s^*)$ es cualquier otro tipo de representación natural de C , entonces $s = \pm s^* + \text{constante}$.
- (iii) Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ es cualquier representación de C de la misma orientación que la $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, entonces, $ds/dt = |d\mathbf{x}/dt|$. De lo contrario, $ds/dt = -|d\mathbf{x}/dt|$.

Obsérvese que si $s = s(t)$ está definida por la integral que aparece en (3.7), entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t(s))$ es una representación natural, puesto que, en ese caso, se tiene

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \frac{1}{|d\mathbf{x}/dt|} = 1$$

Ejemplo 3.17.

Obtener una representación natural de la hélice

$$\mathbf{x} = (a \cos t)\mathbf{e}_1 + (a \sin t)\mathbf{e}_2 + bte_3$$

Consideremos que $s = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \int_0^t (a^2 + b^2)^{1/2} dt = (a^2 + b^2)^{1/2} t$

Si sustituimos $t = (a^2 + b^2)^{-1/2} s$ en lo anterior, obtendremos la representación natural siguiente:

$$\mathbf{x} = a \cos[(a^2 + b^2)^{-1/2} s] \mathbf{e}_1 + a \sin[(a^2 + b^2)^{-1/2} s] \mathbf{e}_2 + b(a^2 + b^2)^{-1/2} s \mathbf{e}_3$$

A menos que se diga lo contrario, la derivación respecto de un parámetro natural s se designará mediante puntos y la derivación respecto de cualquier otro tipo de parámetro se denotará mediante tildes; por ejemplo,

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}, \quad \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \text{ etc.}$$

Problemas resueltos

REPRESENTACIONES REGULARES

3.1. Demostrar que $\mathbf{x} = te_1 + (t^2 + 1)e_2 + (t - 1)^3e_3$ es una representación paramétrica regular para todo valor de t y hallar sus proyecciones sobre los planos x_1x_2 y x_1x_3 .

$d\mathbf{x}/dt = e_1 + 2te_2 + 3(t - 1)^2e_3$ es continua y $|d\mathbf{x}/dt| = [1 + 4t^2 + 9(t - 1)^4]^{1/2} \neq 0$ para todo valor de t . Por tanto, \mathbf{x} es regular para todo valor de t . La proyección sobre el plano x_1x_2 es la parábola $x_1 = t$, $x_2 = t^2 + 1$, $x_3 = 0$, o sea $x_2 = x_1^2 + 1$, $x_3 = 0$. La proyección sobre el plano x_1x_3 es la cúbica $x_1 = t$, $x_3 = (t - 1)^3$, $x_2 = 0$, o sea $x_3 = (x_1 - 1)^3$, $x_2 = 0$. La curva es la intersección de los cilindros $x_2 = x_1^2 + 1$ y $x_3 = (x_1 - 1)^3$.

3.2. Demostrar que la representación $x_1 = (1 + \cos \theta)$, $x_2 = \sin \theta$, $x_3 = 2 \sin(\theta/2)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, es regular y está sobre la esfera de radio igual a 2 y centro en el origen y sobre el cilindro $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$.

$dx_1/d\theta = -\sin \theta$, $dx_2/d\theta = \cos \theta$, $dx_3/d\theta = \cos(\theta/2)$ son continuas y

$$\left[\left(\frac{dx_1}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} = [1 + \cos^2(\theta/2)]^{1/2} \neq 0$$

Por tanto, la representación es regular. Como quiera que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \sin^2(\theta/2)$

$$= (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 2(1 - \cos \theta) = 4$$

y $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, la curva está sobre la esfera de radio 2 y sobre el cilindro circular $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$. Es, pues, la intersección de esas dos superficies tal como se ve en la figura 3-14.

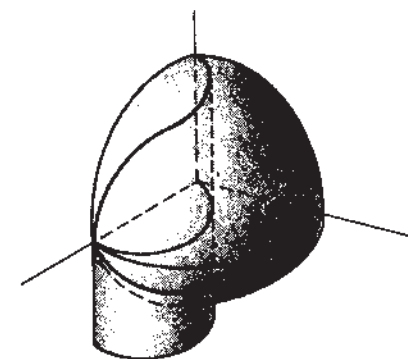


Fig. 3-14

3.3. La ecuación de la *cisoide de Diocles* en coordenadas polares es $r = 2 \sin \theta \tan \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Dibujar la curva y hallar una representación paramétrica suya en coordenadas rectangulares.

θ	$2 \sin \theta$	$\tan \theta$	r
$-\pi/2^+$	-2	$-\infty$	∞
$-\pi/4$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$
0	0	0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
$\pi/2^-$	2	$+\infty$	∞

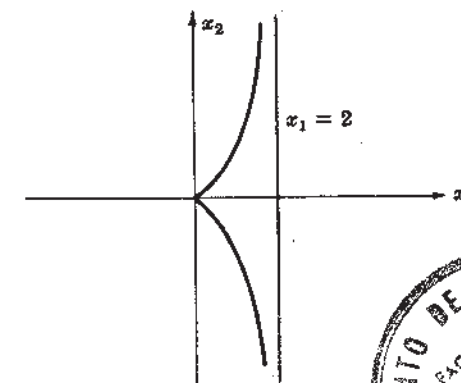


Fig. 3-15

Puesto que $x_1 = r \cos \theta$ y $x_2 = r \sin \theta$, tenemos la representación paramétrica

$$x_1 = 2 \sin^2 \theta, \quad x_2 = 2 \sin \theta \tan \theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

Obsérvese que $x_1 \rightarrow 2$ cuando $\theta \rightarrow -\pi/2$ o cuando $\theta \rightarrow \pi/2$. Obsérvese, además, que la representación anterior no es regular en $\theta = 0$, pues

$$dx_1/d\theta = 4 \sin \theta \cos \theta \quad \text{y} \quad dx_2/d\theta = 2 \sin \theta \sec^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta \tan \theta$$

se anulan en $\theta = 0$.



- 3.4. La *epicicloide* es una curva plana engendrada por el movimiento de un punto P de la circunferencia de un círculo C que rueda sin resbalar sobre el exterior de un círculo fijo C_0 , como puede verse en la figura 3-16. Hallar una representación paramétrica de la epicicloide si C tiene radio r , C_0 tiene centro en el origen y radio r_0 , y P está situado inicialmente en $(r_0, 0)$.

Sea A el centro de C y θ el ángulo que forma OA con e_1 . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{OA} &= |\mathbf{OA}|(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + |\mathbf{OA}|(\sin \theta)\mathbf{e}_2 \\ &= (r_0 + r)(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (r_0 + r)(\sin \theta)\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Si β es el ángulo que forma AP con e_1 , entonces

$$\beta = \angle OAP + \theta - \pi \quad \text{o} \quad \beta = \frac{r_0}{r}\theta + \theta - \pi = \frac{r_0 + r}{r}\theta - \pi$$

De donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= |\mathbf{AP}|(\cos \beta)\mathbf{e}_1 + |\mathbf{AP}|(\sin \beta)\mathbf{e}_2 = r \left[\cos \left(\frac{r_0 + r}{r}\theta - \pi \right) \right] \mathbf{e}_1 + r \left[\sin \left(\frac{r_0 + r}{r}\theta - \pi \right) \right] \mathbf{e}_2 \\ &= -r \left[\cos \left(\frac{r_0 + r}{r}\theta \right) \right] \mathbf{e}_1 - r \left[\sin \left(\frac{r_0 + r}{r}\theta \right) \right] \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Y, por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{OP} &= \mathbf{OA} + \mathbf{AP} = \left[(r_0 + r) \cos \theta - r \cos \left(\frac{r_0 + r}{r}\theta \right) \right] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left[(r_0 + r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{r_0 + r}{r}\theta \right) \right] \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

que es el resultado deseado.

- 3.5. Si en el problema precedente es $r_0 = 3$ y $r = 1$, la ecuación de la epicicloide es

$$x_1 = 4 \cos \theta - \cos 4\theta, \quad x_2 = 4 \sin \theta - \sin 4\theta$$

Determinar los puntos singulares (no regulares) y hacer el dibujo correspondiente.

$$\begin{aligned} dx_1/d\theta &= -4 \sin \theta + 4 \sin 4\theta = 0 \quad \text{sii} \quad \sin \theta = \sin 4\theta, \quad \text{o} \quad \theta = 2n\pi/3, (2n+1)\pi/5, \quad n = 0, \pm 1, \dots \\ dx_2/d\theta &= 4 \cos \theta - 4 \cos 4\theta = 0 \quad \text{sii} \quad \cos \theta = \cos 4\theta, \quad \text{o} \quad \theta = 2n\pi/3, 2n\pi/5, \quad n = 0, \pm 1, \dots \end{aligned}$$

De donde se deduce que ambas derivadas se anulan si y solamente si $\theta = 2n\pi/3$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Obsérvese que la curva tiene un período igual a 2π .

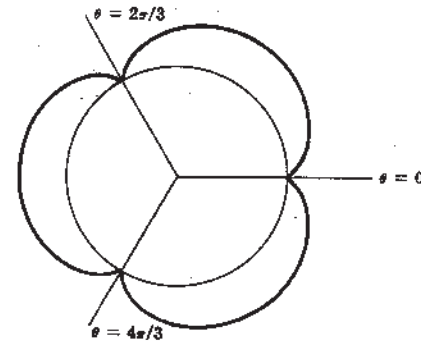


Fig. 3-17

- 3.6. Buscar una representación paramétrica para la intersección del cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1$ con el plano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ en la que no intervengan radicales.

Se debe tomar $x_1 = \cos \theta$ y $x_2 = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces $x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 1 - \cos \theta - \sin \theta$. De esta manera,

$$\mathbf{x} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 + (1 - \cos \theta - \sin \theta) \mathbf{e}_3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es una representación paramétrica de la intersección.

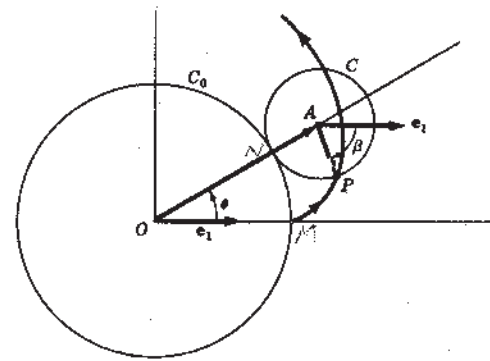


Fig. 3-16

- 3.7. Si $g(t)$ es continua en $t = t_0$ y $g(t_0) \neq 0$, demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que $g(t) \neq 0$ si está t en $S_\delta(t_0)$. Utilícese este hecho para demostrar el teorema 3.1, a saber: Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una representación regular en I , entonces para cualquier t_0 de I existe un entorno de t_0 en el que $\mathbf{x}(t)$ es inyectiva.

Tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}|g(t_0)|$. Puesto que $g(t)$ es continua en t_0 , existe un $\delta > 0$ tal que $|g(t) - g(t_0)| < \epsilon$ para t de $S_\delta(t_0)$. Y, en consecuencia, para un t de $S_\delta(t_0)$,

$$|g(t_0)| = |g(t_0) - g(t) + g(t)| \leq |g(t_0) - g(t)| + |g(t)| < \epsilon + |g(t)| \leq \frac{1}{2}|g(t_0)| + |g(t)|$$

o sea, $|g(t)| \geq \frac{1}{2}|g(t_0)|$. Como $g(t_0) \neq 0$, entonces $g(t) \neq 0$ si es t de $S_\delta(t_0)$.

Como quiera que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es regular en I y t_0 pertenece a I , al menos una de las derivadas, por ejemplo, la $x_1'(t_0) \neq 0$. Además $x_1'(t)$ es continua en t_0 . De aquí se infiere que existe un $\delta > 0$ tal que $x_1'(t) \neq 0$ para todo t de $S_\delta(t_0)$. Ahora, bien: en $S_\delta(t_0)$, $\mathbf{x}(t)$ es inyectiva, pues de lo contrario existiría un $t_1 \neq t_2$ de $S_\delta(t_0)$ tal que $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$. Y, por tanto, $x_1(t_1) = x_1(t_2)$. Pero, aplicando el teorema del valor medio, se tiene

$$0 = \frac{x_1(t_1) - x_1(t_2)}{t_1 - t_2} = x_1'(t'), \quad t_1 < t' < t_2$$

lo cual es imposible, pues $x_1'(t) \neq 0$ en $S_\delta(t_0)$. Y el teorema queda demostrado.

- 3.8. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una representación regular en I y $x_1'(t_0) \neq 0$, demostrar que existe un entorno de t_0 en el cual $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ se puede representar en la forma implícita siguiente: $x_2 = F_1(x_1)$, $x_3 = F_2(x_1)$.

Puesto que $x_1'(t_0) \neq 0$, en algún $S_\delta(t_0)$, $x_1 = x_1(t)$ es inyectiva y admite la inversa $t = t(x_1)$. Sustituyendo ésta en las ecuaciones paramétricas $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ se obtiene $x_2 = x_2(t(x_1))$, $x_3 = x_3(t(x_1))$ o sea, $x_2 = F_1(x_1)$, $x_3 = F_2(x_1)$.

CURVAS REGULARES

- 3.9. Demostrar que $t = \theta^2/(\theta^2 + 1)$ es un cambio admisible de parámetro dentro de $0 < \theta < \infty$ y que trasforma el intervalo $0 < \theta < \infty$ en el $0 < t < 1$.

$dt/d\theta = 2\theta/(\theta^2 + 1)^2$ es continua y $dt/d\theta \neq 0$ en $0 < \theta < \infty$. Y, en consecuencia, se trata de un cambio admisible de parámetro dentro de $0 < \theta < \infty$. Como quiera que $\theta^2/(\theta^2 + 1)|_{\theta=0} = 0$ y $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^2/(\theta^2 + 1) = 1$, el cambio de parámetro permite transformar el intervalo $0 < \theta < \infty$ sobre el $0 < t < 1$.

- 3.10. Dada la circunferencia $x_1 = a \cos \theta$, $x_2 = a \sin \theta$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, introducir a lo largo de ella el parámetro $t = \tan^{-1}(\theta/4)$.

Conocidas identidades relativas al ángulo medio permiten obtener

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos^4(\theta/4) - 6 \cos^2(\theta/4) \sin^2(\theta/4) + \sin^4(\theta/4) \\ &= \frac{1}{(t^2 + 1)^2} - 6 \frac{t^2}{(t^2 + 1)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t^4 - 6t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

y

$$\sin \theta = 4(\sin(\theta/4) \cos^3(\theta/4) - \sin^3(\theta/4) \cos(\theta/4)) = 4 \frac{t}{(t^2 + 1)^2} - \frac{t^3}{(t^2 + 1)^2} = \frac{4t(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$$

De esta suerte, $x_1 = a \frac{(t^4 - 6t^2 + 1)}{(t^2 + 1)^2}$, $x_2 = a \frac{4t(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}$, $-1 \leq t \leq 1$, es la representación que se buscaba.

- 3.11. Dada la cisoide

$$x_1 = 2 \sin^2 \theta, \quad x_2 = 2 \sin^2 \theta \tan \theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

introducir a lo largo de ella el parámetro $t = 2 \sin \theta$ y obtener los dos primeros términos, no nulos, del desarrollo en serie de potencias de x_1 y x_2 alrededor del punto singular $t = 0$. (Véase el problema 3.3.)

$$x_1 = 2(\frac{1}{2}t)^2 = \frac{1}{2}t^2, \quad x_2 = \frac{1}{2}t^2 \tan(\text{Sen}^{-1} \frac{1}{2}t) = \frac{1}{2}t^3(4 - t^2)^{-1/2}$$

El desarrollo de $(4-t^2)^{-1/2}$ es $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}t^2 + o(t^2)$. De modo que $x_1 = \frac{1}{2}t^2$, $x_2 = \frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{32}t^5 + o(t^5)$. Obsérvese que en la vecindad de $t = 0$, la curva tiene la forma de la cúspide $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1^{3/2} + o(x_1^2)$.

- 3.12. Demostrar que existe un cambio admisible de parámetro $t = t(\theta)$ que puede llevar cualquier intervalo I a uno de los tres intervalos siguientes: (i) $0 \leq t \leq 1$, (ii) $0 < t < 1$, (iii) $0 \leq t < 1$. Y, por tanto, toda curva regular tiene una representación que se define en uno de los tres intervalos anteriores.

Tal como se ve en el ejemplo 3.5 de la página 47, la función lineal $t = (\theta - a)/(b - a)$ constituye un cambio admisible de parámetro que lleva a $a \leq \theta \leq b$ sobre $0 \leq t \leq 1$, $a < \theta < b$ sobre $0 < t < 1$, y $a \leq \theta < b$ sobre $0 \leq t < 1$. La función lineal $t = -(\theta - a)/(b - a) + 1$ llevará $a < \theta \leq b$ sobre $0 \leq t < 1$. Sólo falta considerar los intervalos infinitos. La función $\theta = \tan^{-1}s$ transforma el intervalo $-\infty < s < \infty$ en el $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, y la $t = (\theta + \frac{1}{2}\pi)/\pi$ lleva el intervalo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ al $0 < t < 1$. Por tanto, la función compuesta $t = (\pi/2 + \tan^{-1}s)/\pi$ transforma $-\infty < s < \infty$ en $0 < t < 1$. La función $\theta = \tan^{-1}s$ cambia el intervalo $a \leq s < \infty$ en el $\tan^{-1}a \leq \theta < \pi/2$ y la $t = (\theta - \tan^{-1}a)/(\pi/2 - \tan^{-1}a)$ cambia $\tan^{-1}a \leq \theta < \pi/2$ en $0 \leq t < 1$. Y, en consecuencia, la función compuesta, $t = \frac{\tan^{-1}s - \tan^{-1}a}{\pi/2 - \tan^{-1}a}$, cambia $a \leq s < \infty$ en $0 \leq t < 1$. Los casos restantes se dejan al lector como ejercicios.

Obsérvese que todas las funciones anteriores son analíticas. De esta suerte, existen, de hecho, cambios admisibles de parámetro de cualquier clase que producen los resultados anteriores.

- 3.13. Demostrar el teorema 3.2, a saber: Si $t = t(\theta)$ representa un cambio admisible de parámetro en I_θ , entonces $t(\theta)$ es inyectiva y su inversa $\theta = \theta(t)$ representa, también, un cambio admisible de parámetro en $I_t = t(I_\theta)$.

Puesto que $dt/d\theta$ es continua y $dt/d\theta \neq 0$, se deduce que es $dt/d\theta > 0$, o $dt/d\theta < 0$ en I_θ . Supongamos que sea $dt/d\theta > 0$ en I_θ ; entonces, $t(\theta)$ es estrictamente creciente. Porque, si no, es decir, si $t(\theta_1) \geq t(\theta_2)$, siendo $\theta_1 < \theta_2$, entonces, utilizando el teorema del valor medio, sería

$$0 \geq \frac{t(\theta_1) - t(\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} = t'(\theta')$$

lo cual es imposible, pues $dt/d\theta > 0$ en I_θ . Ya que $t(\theta)$ es estrictamente creciente, es inyectiva, y, en consecuencia, tiene la inversa $\theta(t)$. Ahora, bien, puesto que $t(\theta)$ es creciente y continua, se deduce que su inversa $\theta(t)$ es creciente y continua. La prueba de este hecho se deja al lector como ejercicio. Pero, entonces $\theta(t)$ también tiene derivada

$$\frac{d\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = 1 / \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta \theta} = 1 / \frac{dt}{d\theta}$$

que es continua y diferente de cero porque $dt/d\theta$ es continua y diferente de cero, con lo cual se completa la demostración.

- 3.14. Recordemos que una representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en I_t es, por definición, equivalente a otra representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ en I_θ , si existe un cambio admisible de parámetro $t = t(\theta)$ tal que $t(I_\theta) = I_t$ y $\mathbf{x}(t(\theta)) = \mathbf{x}^*(\theta)$. Demostrar que esto define una relación de equivalencia en el conjunto de las representaciones regulares.

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es equivalente a sí misma bajo el cambio de parámetro definido por la identidad $t = \theta$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es equivalente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ en virtud del cambio de parámetro $t = t(\theta)$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ es equivalente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ bajo la función inversa $\theta = \theta(t)$, porque es $\theta(I_t) = I_\theta$ y $\mathbf{x}^*(\theta(t)) = \mathbf{x}(t(\theta(t))) = \mathbf{x}(t)$. Por último, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es equivalente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\phi)$ bajo $t = t(\phi)$, y que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ es equivalente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\phi)$ bajo $\theta = \theta(\phi)$. Consideremos la función compuesta $t = t(\theta(\phi))$. Se deduce que $\frac{dt}{d\phi} = \frac{dt}{d\theta} \frac{d\theta}{d\phi}$ es continua y $dt/d\phi \neq 0$ en I_ϕ . Y, en consecuencia, $t = t(\theta(\phi))$ es un cambio admisible de parámetro en I_ϕ . Por otra parte, es $t(\theta(I_\phi)) = t(I_\theta) = I_t$ y $\mathbf{x}(t(\theta(\phi))) = \mathbf{x}^*(\theta(\phi)) = \mathbf{x}^{**}(\phi)$. Y, de esta suerte, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es equivalente a $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\phi)$, con lo cual queda completa la demostración.

LONGITUD DE ARCO

- 3.15. Obtener la longitud del arco $\mathbf{x} = 3(\cosh 2t)\mathbf{e}_1 + 3(\sinh 2t)\mathbf{e}_2 + 6t\mathbf{e}_3$, $0 \leq t \leq \pi$.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\pi \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \int_0^\pi |6\sinh 2t\mathbf{e}_1 + 6\cosh 2t\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3| dt \\ &= \int_0^\pi 6[\sinh^2 2t + \cosh^2 2t + 1]^{1/2} dt \\ &= \int_0^\pi 6[2\cosh^2 2t]^{1/2} dt = \int_0^\pi 6\sqrt{2}\cosh 2t dt = 3\sqrt{2}\sinh 2\pi \end{aligned}$$

- 3.16. Hallar la longitud de un arco de epicicloide como función de θ a lo largo de la curva.

$$x_1 = (r_0 + r)\cos\theta - r\cos\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right), \quad x_2 = (r_0 + r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right)$$

Véase el problema 3.4.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\theta \left[\left(\frac{dx_1}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta \\ &= \int_0^\theta (r_0 + r) \left[\left(-\sin\theta + \sin\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right) \right)^2 + \left(\cos\theta - \cos\left(\frac{r_0 + r}{r}\theta\right) \right)^2 \right]^{1/2} d\theta \\ &= (r_0 + r) \int_0^\theta [2 - 2\cos(r_0\theta/r)]^{1/2} d\theta = 2(r_0 + r) \int_0^\theta \sin(r_0\theta/2r) d\theta \\ &= 4 \frac{(r_0 + r)r}{r_0} \cos(r_0\theta/2r) \Big|_0^\theta = 4 \frac{(r_0 + r)r}{r_0} [\cos(r_0\theta/2r) - 1] \end{aligned}$$

- 3.17. Introducir la longitud de arco como parámetro a lo largo de la curva

$$\mathbf{x} = (e^t \cos t)\mathbf{e}_1 + (e^t \sin t)\mathbf{e}_2 + e^t\mathbf{e}_3, \quad -\infty < t < \infty$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \int_0^t |(e^t \cos t - e^t \sin t)\mathbf{e}_1 + (e^t \sin t + e^t \cos t)\mathbf{e}_2 + e^t\mathbf{e}_3| dt \\ &= \int_0^t [e^{2t}(-2\cos t \sin t + 1) + e^{2t}(2\cos t \sin t + 1) + e^{2t}]^{1/2} dt = \sqrt{3} \int_0^t e^t dt = \sqrt{3}(e^t - 1) \end{aligned}$$

Despejando a t se tiene: $t = \log(s/\sqrt{3} + 1)$, $-\sqrt{3} < s < \infty$. E introduciendo ahora la longitud de arco s como parámetro, se tendrá

$$\mathbf{x} = (s/\sqrt{3} + 1)(\cos \log(s/\sqrt{3} + 1)\mathbf{e}_1 + \sin \log(s/\sqrt{3} + 1)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

- 3.18. Demostrar que

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 1})\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 + 1})^{-1}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\log(s + \sqrt{s^2 + 1}))\mathbf{e}_3$$

es una representación natural, es decir, $|d\mathbf{x}/ds| = 1$.

Hagamos $u = s + \sqrt{s^2 + 1}$. Entonces $\mathbf{x} = \frac{1}{2}u\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}u^{-1}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}(\log u)\mathbf{e}_3$ y

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{du} \frac{du}{ds} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}u^{-2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}u^{-1}\mathbf{e}_3 \right) \left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 + 1}} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Por tanto, } \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| &= \left| \frac{d\mathbf{x}}{du} \right| \left| \frac{du}{ds} \right| = \frac{1}{2}(1 + u^{-4} + 2u^{-2})^{1/2} \frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{\sqrt{s^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{2}(1 + u^{-2}) \frac{u}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{1}{2} \frac{u^2 + 1}{u\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{s^2 + s\sqrt{s^2 + 1} + 1}{(s + \sqrt{s^2 + 1})\sqrt{s^2 + 1}} = 1 \end{aligned}$$

Puesto que $|d\mathbf{x}/ds| = 1$, s es un parámetro natural.

3.19. Demostrar el teorema 3.4(i), a saber: Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una representación natural en I_s , entonces $|s_2 - s_1|$ representa la longitud del arco $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ entre los puntos correspondientes a $\mathbf{f}(s_1)$ y $\mathbf{f}(s_2)$.

Si $s_1 \leq s_2$, la longitud del arco es $\int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| ds = \int_{s_1}^{s_2} 1 ds = s_2 - s_1 = |s_2 - s_1|$.

Si $s_1 > s_2$, la longitud del arco es $\int_{s_2}^{s_1} \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| ds = \int_{s_2}^{s_1} 1 ds = s_1 - s_2 = |s_2 - s_1|$.

3.20. Demostrar el teorema 3.4(ii), a saber: Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(s^*)$ son representaciones naturales de la misma curva, entonces $s = \pm s^* + \text{constante}$.

Hagamos $s = s(s^*)$. Entonces $\frac{d\mathbf{x}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{ds^*}$ y $\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds^*} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| \left| \frac{ds}{ds^*} \right|$.

Pero, $\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds^*} \right| = 1$. Por tanto, es $\left| \frac{ds}{ds^*} \right| = 1$ o es $\frac{ds}{ds^*} = \pm 1$, o sea $s = \pm s^* + \text{constante}$.

3.21. Demostrar que el arco $\mathbf{x} = t^2 \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2$, $0 \leq t \leq \pi/2$, es rectificable.

Consideremos una subdivisión arbitraria, como la $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \pi/2$ y determinemos la longitud de la poligonal

$$\begin{aligned} s(P) &= \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| = \sum_{i=1}^n |(t_i^2 \mathbf{e}_1 + (\sin t_i) \mathbf{e}_2) - (t_{i-1}^2 \mathbf{e}_1 + (\sin t_{i-1}) \mathbf{e}_2)| \\ &\leq \sum_{i=1}^n [(t_i^2 - t_{i-1}^2) |\mathbf{e}_1| + |\sin t_i - \sin t_{i-1}| |\mathbf{e}_2|] \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema del valor medio y tenemos

$$\begin{aligned} s(P) &\leq \sum_{i=1}^n [(t_i - t_{i-1})(t_i + t_{i-1}) + |\cos \theta_i| (t_i - t_{i-1})] \\ &\leq \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) [t_i + t_{i-1} + |\cos \theta_i|] \quad t_{i-1} < \theta_i < t_i \end{aligned}$$

Como $|\cos \theta_i| \leq 1$ y $(t_i + t_{i-1}) \leq \pi$ para $0 \leq t_{i-1} < t_i \leq \pi/2$, entonces

$$s(P) \leq (\pi + 1) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \leq (\pi/2)(\pi + 1)$$

Y como $s(P)$ es acotada, el arco es rectificable.

3.22. Si $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$, $a \leq t \leq b$, es un arco rectificable, demostrar que dados $\delta > 0$ y $\epsilon > 0$, arbitrariamente escogidos, existe una subdivisión $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ a la cual corresponde una aproximación poligonal P tal que

$$(i) \quad t_i - t_{i-1} < \delta, \quad i = 1, \dots, n \quad (ii) \quad |s - s(P)| < \epsilon$$

donde s y $s(P)$ son, en su orden, las longitudes de $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$ y P .

Como s es el superior de todos los posibles $s(P)$, existe una subdivisión $a = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n = b$ a la que corresponde una aproximación poligonal P' tal que $s(P') > s - \epsilon$. Porque, de lo contrario, para todo $s(P)$, sería $s(P) \leq s - \epsilon$, de modo que $s - \epsilon$ sería una cota superior de $s(P)$, menor que el superior s , lo cual es imposible. Ahora, bien, si la subdivisión anterior no satisface a (i), introduciendo puntos adicionales se puede obtener una subdivisión más fina, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, que satisfaga la condición de ser $(t_i - t_{i-1}) < \delta$. Pero, el nuevo arco de poligonal P' , obtenido de esta manera, satisface la condición $s(P) \leq s(P') \leq s$ y, por tanto, también la condición $|s - s(P)| < \epsilon$ tal como se deseaba.

3.23. Demostrar que un arco regular $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$, $a \leq t \leq b$, es rectificable.

Consideremos una subdivisión arbitraria $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Entonces,

$$\begin{aligned} s(P) &= \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}| = \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n |(f_1(t_i) - f_1(t_{i-1}))\mathbf{e}_1 + (f_2(t_i) - f_2(t_{i-1}))\mathbf{e}_2 + (f_3(t_i) - f_3(t_{i-1}))\mathbf{e}_3| \\ &\leq \sum_{i=1}^n [|f_1(t_i) - f_1(t_{i-1})| + |f_2(t_i) - f_2(t_{i-1})| + |f_3(t_i) - f_3(t_{i-1})|] \\ &\leq \sum_{i=1}^n [|f'_1(\theta_i)|(t_i - t_{i-1}) + |f'_2(\theta'_i)|(t_i - t_{i-1}) + |f'_3(\theta''_i)|(t_i - t_{i-1})] \end{aligned}$$

en donde utilizamos el teorema del valor medio para las $f_i(t)$. Puesto que las $f'_i(t)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leq t \leq b$, están acotadas, por ejemplo por valores M_i , en el intervalo $a \leq t \leq b$. En consecuencia,

$$s(P) \leq (M_1 + M_2 + M_3) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \leq (M_1 + M_2 + M_3)(b - a)$$

Así, pues, todos los $s(P)$ son acotados por $(M_1 + M_2 + M_3)(b - a)$ y por ello el arco es rectificable.

3.24. Demostrar que la longitud de un arco regular $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$, $a \leq t \leq b$, viene dada por la integral $s = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt$. Este hecho, conjuntamente con el problema 3.23, demuestran el teorema 3.3. de la página 53.

Sea un ϵ arbitrario. Como quiera que las $f'_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, son continuas en el intervalo cerrado $a \leq t \leq b$, son uniformemente continuas en el mismo intervalo. Es decir, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$(i) \quad |f'_i(t) - f'_i(t')| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}, \quad i = 1, 2, 3$$

para todo $|t - t'| < \delta_1$. Además, de acuerdo con la definición de integral, existe un δ_2 tal que para $|t_i - t_{i-1}| < \delta_2$, tenemos

$$(ii) \quad \left| \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt - \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(\theta_i)|(t_i - t_{i-1}) \right| < \epsilon/3 \quad t_{i-1} \leq \theta_i \leq t_i$$

Supongamos ahora que sea $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Del problema 3.22 se deduce que existe una subdivisión $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y una aproximación poligonal P tales que $(t_i - t_{i-1}) < \delta$ y

$$(iii) \quad |s - s(P)| < \epsilon/3$$

Consideremos ahora la expresión

$$\begin{aligned} I &= \left| s - \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt \right| \leq |s - s(P)| + \left| s(P) - \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(t_i) - \mathbf{f}'(t_{i-1})| - \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^n [(f'_1(t_i) - f'_1(t_{i-1}))\mathbf{e}_1 + (f'_2(t_i) - f'_2(t_{i-1}))\mathbf{e}_2 + (f'_3(t_i) - f'_3(t_{i-1}))\mathbf{e}_3] - \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt \right| \end{aligned}$$

El teorema del valor medio nos permite deducir que

$$I \leq \epsilon/3 + \left| \sum_{i=1}^n [f'_1(t'_i)\mathbf{e}_1 + f'_2(t'_i)\mathbf{e}_2 + f'_3(t'_i)\mathbf{e}_3](t_i - t_{i-1}) - \int_a^b |\mathbf{f}'(t)| dt \right|$$

y, sumando y restando $\sum_{i=1}^n |\mathbf{f}'(t_i)|(t_i - t_{i-1})$, se tiene

$$\begin{aligned} I &\leq \epsilon/3 + \left| \sum_{i=1}^n \mathbf{f}'(t_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b \mathbf{f}'(t) dt \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n [f'_1(t'_i)\mathbf{e}_1 + f'_2(t'_i)\mathbf{e}_2 + f'_3(t'_i)\mathbf{e}_3] - |\mathbf{f}'(t_i)|(t_i - t_{i-1}) \right| \end{aligned}$$

Utilizando la (ii) precedente y la desigualdad $||a| - |b|| \leq |a + b|$, tenemos

$$I < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \sum_{i=1}^n [|f'_1(t'_i) - f'_1(t_i)| + |f'_2(t'_i) - f'_2(t_i)| + |f'_3(t'_i) - f'_3(t_i)|](t_i - t_{i-1})$$

Finalmente, utilizando la (i), tenemos

$$I < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3(b-a)} \sum_1^n (t_i - t_{i-1}) < \epsilon$$

Y, puesto que ϵ es arbitrario,

$$I = \left| s - \int_a^b |f'(t)| dt \right| = 0 \text{ o sea: } s = \int_a^b |f'(t)| dt$$

Problemas propuestos

- 3.25. Demostrar que la representación

$$\mathbf{x} = t\mathbf{e}_1 + (t^2 + 2)\mathbf{e}_2 + (t^3 + t)\mathbf{e}_3$$

es regular para todo t y dibujar las proyecciones sobre los planos x_1x_3 y x_1x_2 .

- 3.26. La conoide de Nicomedes en coordenadas polares tiene la ecuación $r = \frac{a}{\cos \theta} + c$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Dibujar la curva y hallar una representación suya en coordenadas cartesianas rectangulares. Resp. $x_1 = a + c \cos \theta$, $x_2 = a \tan \theta + c \sin \theta$

- 3.27. Hallar una representación, sin radicales, de la intersección de los cilindros $x_3^2 = x_1$, $x_2^2 = 1 - x_1$. Sugerencia. $x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Resp. $x_1 = \cos^2 \theta$, $x_2 = \sin \theta$, $x_3 = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

- 3.28. La hipocicloide es la curva plana engendrada por un punto P de la circunferencia de un círculo C cuando C rueda sin resbalar en el interior de un círculo fijo C_0 , como se muestra en la figura 3-18. Hallar una representación de la hipocicloide si C tiene radio igual a r y C_0 tiene centro en el origen y radio igual a r_0 y, además, P está situado inicialmente en $(r_0, 0)$

$$\text{Resp. } x_1 = (r_0 - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{r_0 - r}{r} \theta \right)$$

$$x_2 = (r_0 - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{r_0 - r}{r} \theta \right)$$

- 3.29. Si en el problema anterior, $r_0 = 5$ y $r = 2$, la ecuación de la hipocicloide es

$$x_1 = 3 \cos \theta + 2 \cos 3\theta/2, \quad x_2 = 3 \sin \theta - 2 \sin 3\theta/2$$

Hallar los puntos singulares y dibujar la curva.

Resp. $\theta = (4/5)n\pi$, $n = 0, \pm 1, \dots$

- 3.30. Demostrar que $\theta = 3t^5 + 10t^3 + 15t + 1$ es un cambio admisible de parámetro para todo t .

- 3.31. Hallar un cambio admisible de parámetro que aplique el intervalo $0 < t \leq 2$ sobre $-\infty < \theta \leq 0$.

- 3.32. Calcular la longitud del arco $\mathbf{x} = e^t(\cos t)\mathbf{e}_1 + e^t(\sin t)\mathbf{e}_2 + e^t\mathbf{e}_3$, $0 \leq t \leq \pi$. Resp. $\sqrt{3}(e^\pi - 1)$

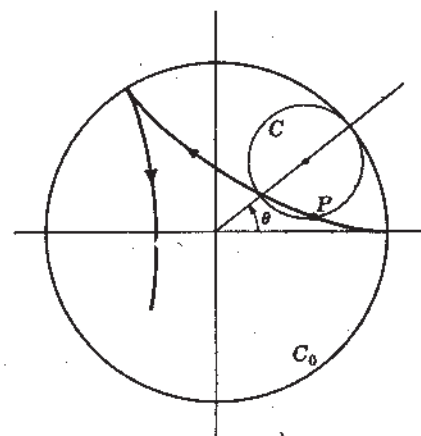


Fig. 3-18

- 3.33. En el problema 3.28, hallar la longitud del arco como función de θ a lo largo de la hipocicloide siguiente

$$x_1 = (r_0 - r) \cos \theta + r \cos \left(\frac{r_0 - r}{r} \theta \right), \quad x_2 = (r_0 - r) \sin \theta - r \sin \left(\frac{r_0 - r}{r} \theta \right), \quad r_0 > r$$

$$\text{Resp. } s = \frac{4r(r_0 - r)}{r_0} [1 - \cos(r_0\theta/2r)]$$

- 3.34. Demostrar que $\mathbf{x} = t\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2 + e^t\mathbf{e}_3$, $-\infty < t < \infty$

$$\text{y } \mathbf{x} = (\log t)\mathbf{e}_1 + \sin(\log t)\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3, \quad 0 < t < \infty$$

son representaciones de la misma curva orientada.

- 3.35. Demostrar que una curva regular orientada admite una representación que puede definirse en uno de los siguientes intervalos: (i) $0 \leq t \leq 1$, (ii) $0 < t < 1$, (iii) $0 \leq t < 1$, (iv) $0 < t \leq 1$.

- 3.36. Supongamos que se llamen equivalentes dos representaciones regulares, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en I_t y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta)$ en I_θ , si representan la misma curva orientada, vale decir, si existe un cambio admisible de parámetro $t = t(\theta)$ tal que $dt/d\theta > 0$, $t(I_\theta) = I_t$ y $\mathbf{x}(t(\theta)) = \mathbf{x}^*(\theta)$. Demostrar que se trata de una relación de equivalencia en el conjunto de las representaciones regulares. De esta suerte, una curva regular orientada es una clase de equivalencia de representaciones regulares relacionadas por cambios admisibles de parámetro con derivada positiva.

- 3.37. Demostrar que un segmento de arco $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en I^* de un arco rectificable $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en I es rectificable.

- 3.38. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en $a \leq t \leq b$ es un arco rectificable de longitud s y $a < t_0 < b$, demostrar que el segmento de arco $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en $a \leq t \leq t_0$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en $t_0 \leq t \leq b$ son ambos rectificables de longitudes respectivas s_1 y s_2 y, además, $s = s_1 + s_2$.

- 3.39. Demostrar el teorema 3.4(iii), a saber: Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una representación natural de una curva C orientada y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ es cualquier otra representación de C , entonces $ds/dt = |d\mathbf{x}/dt|$.

Capítulo 4

Curvatura y torsión

INTRODUCCION

Uno de los problemas fundamentales de la geometría es determinar con exactitud, cuantificándolos, los elementos geométricos que distinguen unas figuras de otras. Por ejemplo, los segmentos de recta quedan determinados únicamente por su longitud, las circunferencias y círculos por su radio, los triángulos por dos lados y el ángulo que comprenden, etc. Se demuestra que este problema se puede resolver en general para curvas regulares suficientemente suaves. Veremos que una curva regular viene determinada por sólo dos cantidades escalares, llamadas curvatura y torsión, las cuales se expresan como funciones del parámetro natural.

VECTOR TANGENTE UNITARIO

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ una representación natural de una curva regular C . Utilizaremos la derivada $d\mathbf{x}/ds = \dot{\mathbf{x}}(s)$ para definir la dirección de la *tangente* a C en el punto $\mathbf{x}(s)$. Esto está de acuerdo con nuestra intuición geométrica, pues

$\dot{\mathbf{x}}(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(s + \Delta s) - \mathbf{x}(s)}{\Delta s}$ es una secante de C como se

aprecia en la figura 4-1. El vector $\dot{\mathbf{x}}$, además, tiene la unidad de longitud, porque en una representación natural $|d\mathbf{x}/ds| = |\dot{\mathbf{x}}| = 1$.

Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s^*)$ es cualquier otra representación natural de C , entonces, de acuerdo con el teorema 3.4 de la página 54, $s = \pm s^* + \text{constante}$ y

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \pm \frac{d\mathbf{x}}{ds}$$

Es decir, $d\mathbf{x}/ds^*$ tiene el mismo u opuesto sentido que $d\mathbf{x}/ds$; ello depende de la orientación de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s^*)$. Así, pues, $\dot{\mathbf{x}}$ es una cantidad *orientada*. En la figura 4-1 se muestra que esto ocurre en el sentido de los valores crecientes de s .

El vector $\dot{\mathbf{x}}(s)$ se denomina *vector tangente unitario* de la curva orientada $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en $\mathbf{x}(s)$ y se designará por $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s)$.

Ejemplo 4.1.

A lo largo de la hélice $\mathbf{x} = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + bte_3$, $a, b \neq 0$, se tiene

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

Entonces,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1/2} (-a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3)$$

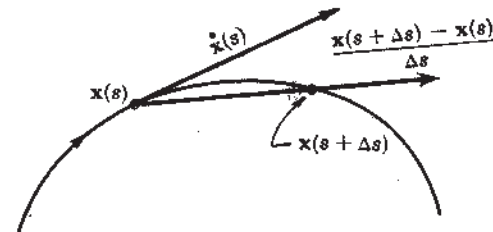


Fig. 4-1

en donde hemos utilizado el hecho de que $ds/dt = |d\mathbf{x}/dt|$ (teorema 3.4). Obsérvese que a lo largo de la hélice, la tangente unidad \mathbf{t} forma un ángulo constante $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3) = \cos^{-1} b(a^2 + b^2)^{-1/2}$ con el eje de las x_3 .

Al igual que en el caso de la tangente unidad, a lo largo de la curva se definirán otras cantidades geométricas, con base en una representación natural. Sin embargo, al emplear la regla de la cadena y la relación $ds/dt = |d\mathbf{x}/dt|$, esas cantidades se podrán derivar respecto de un parámetro arbitrario, como se vio en el ejemplo precedente.

Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una representación arbitraria de la curva C y tiene la misma orientación que la $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, entonces

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = t|\mathbf{x}'|$$

en donde nuevamente utilizamos $ds/dt = |d\mathbf{x}/dt|$. De esta manera, como era de esperarse, la derivada \mathbf{x}' tiene la misma dirección que \mathbf{t} , vale decir, es también un vector tangente a la curva. De este modo, tenemos la fórmula,

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}'/|\mathbf{x}'| \quad (4.1)$$

RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL

La recta que pasa por un punto \mathbf{x} de una curva regular C y tiene la misma dirección que el vector tangente en \mathbf{x} , se denomina *recta tangente* a C en el punto \mathbf{x} . Véase la figura 4-2. De la ecuación (2.1) de la página 22, se infiere que la recta tangente en el punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ viene dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + kt_0, \quad -\infty < k < \infty$$

siendo $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(t_0)$ una tangente unitaria en \mathbf{x}_0 .

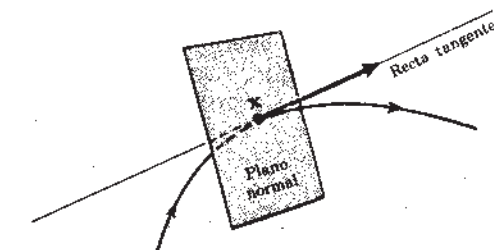


Fig. 4-2

El plano que pasa por \mathbf{x} y es ortogonal a la tangente en ese punto, se denomina *plano normal* a C en \mathbf{x} . De la ecuación (2.5) de la página 22, se deduce que el plano normal en \mathbf{x}_0 viene dado por

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_0 = 0,$$

Para designar un punto genérico de una figura, conviene introducir una segunda variable, por ejemplo, la y , que esté relacionada con la $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Haciendo uso de este hecho, podemos expresar la ecuación de la recta tangente en un punto arbitrario \mathbf{x} de C , en la forma siguiente

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{t}, \quad -\infty < k < \infty \quad (4.2)$$

y el plano normal en \mathbf{x} , en la forma $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} = 0$ (4.3)

Por último, observamos que \mathbf{x}' es paralelo a \mathbf{t} , de modo que la recta tangente y el plano normal también pueden venir dados por las ecuaciones siguientes

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{x}', \quad -\infty < k < \infty$$

y $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' = 0$

respectivamente.

Ejemplo 4.2.

La tangente a la curva $\mathbf{x} = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2 + t^3\mathbf{e}_3$ en $t = 1$ es

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(1) + k\mathbf{x}'(1) \text{ o sea, } \mathbf{y} = (1+k)\mathbf{e}_1 + (1+2k)\mathbf{e}_2 + (1+3k)\mathbf{e}_3, \quad -\infty < k < \infty$$

El plano normal en $t = 1$ es

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}(1)) \cdot \mathbf{x}'(1) = 0 \text{ o sea, } (y_1 - 1) + (y_2 - 1)2 + (y_3 - 1)3 = 0$$

o sea $y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 6$.

CURVATURA

Suponemos ahora que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una curva regular de clase ≥ 2 . Entonces el vector tangente $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s)$ es de clase C^1 , y podemos considerar su derivada

$$d\mathbf{t}/ds = \dot{\mathbf{t}}(s) = \ddot{\mathbf{x}}(s)$$

Como se sabe, el sentido de la tangente unitaria \mathbf{t} depende de la orientación de C ; en cambio la $\dot{\mathbf{t}}$ es independiente de ella. En efecto, sean: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s^*)$ cualquier otra representación natural de C y, por ejemplo, $\mathbf{t}^* = d\mathbf{x}/ds^*$, una tangente unitaria. Entonces, $s = \pm s^* + \text{constante}$ y

$$\frac{d\mathbf{t}^*}{ds^*} = \frac{d}{ds^*} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds^*} \right) = \frac{d}{ds^*} \left(\pm \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \pm \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) \frac{ds}{ds^*} = (\pm 1)^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

De donde se ve que $\dot{\mathbf{t}}$ es independiente de la orientación.

El vector $\dot{\mathbf{t}}(s)$ se denomina *vector curvatura* de C en el punto $\mathbf{x}(s)$ y se simboliza con la expresión $\mathbf{k} = \mathbf{k}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s)$.

Como quiera que \mathbf{t} es un vector unidad, de acuerdo con el teorema 2.7 de la página 30, se deduce que $\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}}$ es ortogonal a \mathbf{t} y, por tanto, paralelo al plano normal. Cuando este vector es distinto de cero, tiene sentido concordante con aquel en que se gira la curva, como se indica en la figura 4-3.

La longitud del vector curvatura se da mediante la expresión

$$|\kappa| = |\mathbf{k}(s)| \quad (4.4)$$

y se llama simplemente la *curvatura* de C en $\mathbf{x}(s)$. El recíproco de la curvatura se designa por

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|} = \frac{1}{|\mathbf{k}(s)|} \quad (4.5)$$

y se denomina *radio de curvatura* en $\mathbf{x}(s)$.

Se llama *punto de inflexión* un punto de la curva C en el que el vector curvatura es $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. De esta suerte, en un punto de inflexión, la curvatura $|\kappa|$ es nula y el radio de curvatura ρ es infinito.

En el problema 4.9 de la página 77, demostraremos que la curvatura es igual al valor del cambio de dirección de la tangente respecto de la longitud del arco. Y así, una curva en la que la dirección de la tangente cambia rápidamente con relación a la longitud del arco, como es el caso de una circunferencia de radio pequeño, tiene una curvatura relativamente grande, o lo que es igual, un radio de curvatura relativamente pequeño.

Ejemplo 4.3.

En la circunferencia de radio a , $\mathbf{x} = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2$, $a > 0$, tenemos

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = a$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \left/ \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \right. = -(\sin t)\mathbf{e}_1 + (\cos t)\mathbf{e}_2$$

$$y \quad \mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \left/ \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \right. = -\frac{1}{a}((\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2)$$

Obsérvese que \mathbf{k} está dirigido hacia el origen. La curvatura es constante e igual a $|\kappa| = |\mathbf{k}| = 1/a$ y el radio de curvatura es $\rho = 1/|\kappa| = a$. De donde, como era de esperarse, el radio de curvatura de una circunferencia es simplemente el radio de ésta.

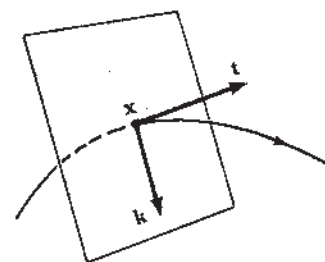


Fig. 4-3

Ejemplo 4.4.

En la hélice $\mathbf{x} = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$, $a > 0$, $b \neq 0$, tenemos

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \left/ \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \right. = (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} &= \frac{d\mathbf{t}}{dt} \left/ \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \right. \\ &= (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a(\cos t)\mathbf{e}_1 - a(\sin t)\mathbf{e}_2) / (a^2 + b^2)^{1/2} \\ &= -\frac{a}{a^2 + b^2}((\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Obsérvese que \mathbf{k} es paralelo al plano x_1x_2 y está dirigido hacia el origen, según se muestra en la figura 4-4. La curvatura es constante e igual a $|\kappa| = |\mathbf{k}| = a/(a^2 + b^2)$.

Si la curvatura es idénticamente nula a todo lo largo de la curva C , es decir, si $|\mathbf{k}| \equiv 0$, entonces $\dot{\mathbf{t}} \equiv \mathbf{0}$ e, integrando,

$$\mathbf{t} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \text{constante} \neq \mathbf{0}$$

Puesto que $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}}$, tenemos, mediante una nueva integración

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}s + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \text{constante}$$

es decir, C es una recta que pasa por (b_1, b_2, b_3) y es paralela a $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$. Recíprocamente, si C es la recta

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

entonces,

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \left/ \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \right. = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \quad y \quad |\mathbf{k}| = \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

De esta manera, tenemos el

Teorema 4.1. Una curva regular de clase ≥ 2 es una recta si y sólo si su curvatura es idénticamente nula.

Es posible obtener una fórmula que exprese la curvatura directamente como función de las derivadas de una representación arbitraria. Es así como en el problema 4.7 de la página 77, demostraremos el

Teorema 4.2. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una representación arbitraria de una curva de clase ≥ 2 , entonces

$$|\kappa| = |\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''| / |\mathbf{x}'|^3$$

VECTOR UNITARIO NORMAL PRINCIPAL

Puesto que C es de clase ≥ 2 , el vector curvatura $\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{x}}$ varía continuamente a lo largo de C ; sin embargo, el vector unitario en la dirección de \mathbf{k} , es decir,

$$\mathbf{u}_\kappa = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$$

no está definido cuando $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, y puede dar un salto, como se verá en los ejemplos que aparecen más adelante. Y así, nos vemos precisados a considerar no el propio vector \mathbf{u}_κ , sino un

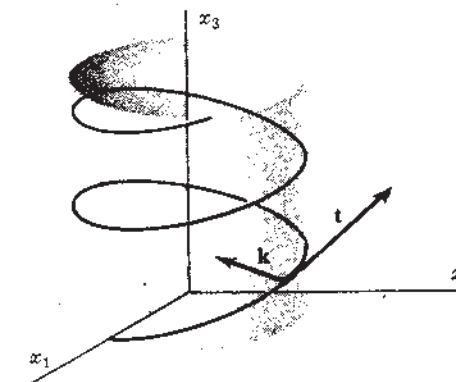


Fig. 4-4

vector unitario paralelo a \mathbf{k} , cuyo sentido se escoja arbitrariamente, pero de modo que sea continuo a lo largo de C , siempre que ello sea posible. Este vector se designará con $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ y se denomina *vector unitario normal principal* a C en el punto $\mathbf{x}(s)$.

Obsérvese que en caso de que C no tenga puntos de inflexión, es decir, si $\mathbf{k}(s) \neq \mathbf{0}$, para todo valor de s , podemos escoger sencillamente a

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}(s)/|\mathbf{k}(s)|$$

como el vector unitario en la dirección de \mathbf{k} . Obsérvese, además, que a lo largo de una recta se tiene $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, de manera que, en ese caso, el vector unitario normal principal \mathbf{n} está indeterminado.

Una vez escogido $\mathbf{n}(s)$, existirá a todo lo largo de C una función continua $\kappa(s)$ tal que

$$\mathbf{k}(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \quad (4.6)$$

En todo punto de la curva donde \mathbf{n} tenga la misma dirección y el mismo sentido de \mathbf{k} , será $\kappa = |\mathbf{k}|$; en donde \mathbf{n} sea de sentido opuesto al de \mathbf{k} , $\kappa = -|\mathbf{k}|$; y en los puntos de inflexión, $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ y $\kappa = 0$.

La cantidad $\kappa(s)$, definida mediante la ecuación (4.6), se llama también la *curvatura* de C en el punto $\mathbf{x}(s)$. Es de observar, sin embargo, que por ser inicialmente arbitrario el sentido de \mathbf{n} , la función $\kappa(s)$ sólo está determinada si tiene asociado un signo; y, localmente, sólo su valor absoluto $|\kappa| = |\mathbf{k}|$, (es decir, la curvatura tal como se definió previamente), es una propiedad intrínseca de la curva.

Si multiplicamos (4.6) por \mathbf{n} y utilizamos la igualdad $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{n}|^2 = 1$, tendremos la fórmula

$$\kappa = \mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \quad (4.7)$$

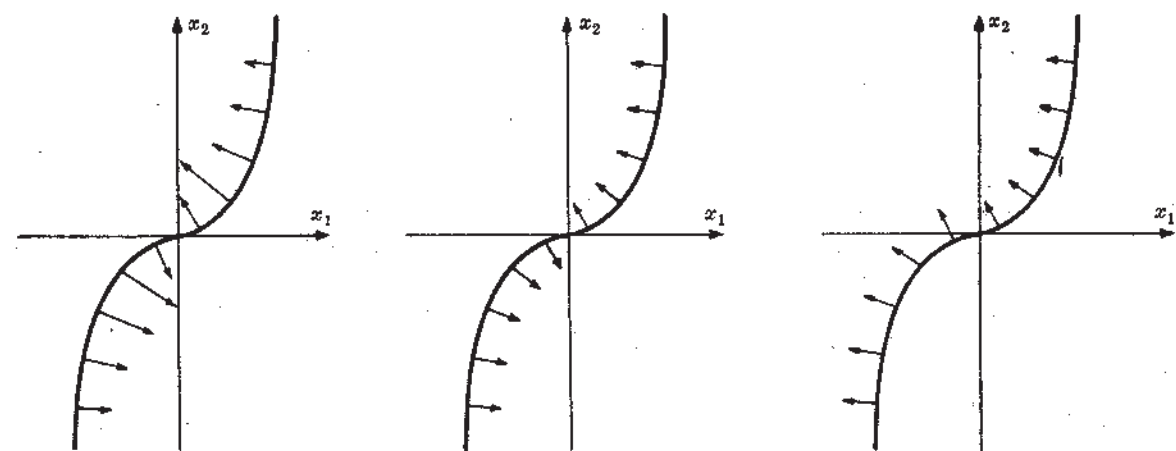
Ejemplo 4.5.

En toda la extensión de la curva de tercer grado $\mathbf{x} = t\mathbf{e}_1 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{e}_2$ que aparece en la figura 4-5, se tiene

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (1+t^4)^{1/2}, \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (1+t^4)^{-1/2}(\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2)$$

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = -2t(1+t^4)^{-2}(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$$

En la figura 4-5(a) se muestra la dirección de \mathbf{k} .



(a) El vector \mathbf{k}

(b) El vector $\mathbf{u}_k = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$

(c) El vector $\mathbf{n} = \begin{cases} -\mathbf{u}_k & \text{para } t < 0 \\ \mathbf{e}_2 & \text{para } t = 0 \\ \mathbf{u}_k & \text{para } t > 0 \end{cases}$

Fig. 4-5

En $t = 0$, $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ y tenemos un punto de inflexión. Aquí, \mathbf{u}_k presenta un cambio de sentido, tal como se muestra en la figura 4-5(b). En efecto, el límite de \mathbf{u}_k cuando t se aproxima a 0 por valores positivos, es

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathbf{u}_k = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t}{|t|(1+t^4)^{1/2}} (t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)}{(1+t^4)^{1/2}} = \mathbf{e}_2$$

mientras que, cuando t se acerca a 0 por valores negativos, el límite de \mathbf{u}_k es

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \mathbf{u}_k = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-t}{|t|(1+t^4)^{1/2}} (t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{(1+t^4)^{1/2}} = -\mathbf{e}_2$$

aquí hemos utilizado el hecho de que $\frac{t}{|t|} = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0 \\ -1 & \text{para } t < 0 \end{cases}$. Si escogemos

$$\mathbf{n} = \begin{cases} -\mathbf{k}/|\mathbf{k}| & \text{para } t < 0 \\ \mathbf{e}_2 & \text{para } t = 0 \\ \mathbf{k}/|\mathbf{k}| & \text{para } t > 0 \end{cases} = -(1+t^4)^{-1/2}(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$$

\mathbf{n} variará continuamente sobre la curva, como lo muestra la figura 4-5(c). Para este \mathbf{n} , de acuerdo con la ecuación (4.7), tenemos que

$$\kappa = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = [-2t(1+t^4)^{-2}(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)] \cdot [-(1+t^4)^{-1/2}(t^2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)] = 2t(1+t^4)^{-3/2}$$

Ejemplo 4.6.

Consideremos la siguiente curva de clase C^∞ (véase el ejemplo 3.13 de la página 51):

$$\mathbf{x} = \begin{cases} t\mathbf{e}_1 + e^{-1/t^2}\mathbf{e}_3 & \text{para } t < 0 \\ \mathbf{0} & \text{para } t = 0 \\ t\mathbf{e}_1 + e^{-1/t^2}\mathbf{e}_2 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Tal como aparece en la figura 4-6, la curva está toda en el plano x_1x_3 para $t < 0$ y en el plano x_1x_2 para $t > 0$. De esto se deduce que \mathbf{k} está en el plano x_1x_3 si $t < 0$ y en el plano x_1x_2 si $t > 0$. En este caso, es imposible definir a \mathbf{n} de modo que sea continuo en $t = 0$, pues \mathbf{k} da un salto del plano x_1x_3 al plano x_1x_2 .

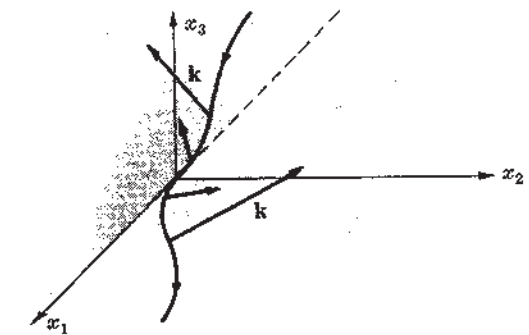


Fig. 4-6

Como se ve por el ejemplo anterior, es posible que una curva de clase C^∞ carezca de normal principal definida en un punto de inflexión. Sin embargo, si la curva es analítica, siempre existirá una normal principal continua. Es así como en el problema 4.15 de la página 79, demostraremos el

Teorema 4.3. Una curva analítica, que no sea una línea recta, posee un vector unitario normal principal, definido y continuo, en algún entorno de un punto de inflexión.

NORMAL PRINCIPAL Y PLANO OSCULADOR

La recta que pasa por un punto \mathbf{x} de una curva C y es paralela a la normal unitaria principal, como se ve en la figura 4-7, se denomina *recta normal principal* de C en \mathbf{x} . De esto se sigue que la ecuación de la normal principal en \mathbf{x} es

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \kappa\mathbf{n}, \quad -\infty < \kappa < \infty \quad (4.8)$$

El plano paralelo a la tangente unitaria y a la normal unitaria principal se denomina *plano osculador* de C en \mathbf{x} . Del ejemplo 2.3 de la página 23, se desprende que la ecuación del plano osculador en \mathbf{x} viene dada por medio del triple producto escalar siguiente

$$[(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{t}\mathbf{n}] = 0 \quad (4.9)$$

Si utilizamos el hecho de que $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}}$, y que $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{x}}$ es paralelo a \mathbf{n} , entonces la ecuación del plano osculador, en un punto en que $k \neq 0$, viene dada por la expresión

$$[(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{x}}] = 0 \quad (4.10)$$

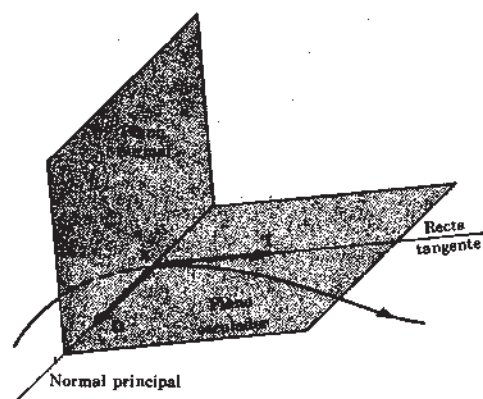


Fig. 4-7

Recordemos que la tangente a una curva en un punto se puede definir como la posición límite de una recta que pasa por dos puntos vecinos de la curva, cuando éstos se aproximan al punto en cuestión. De este modo, se obtiene una recta que en cierto sentido se ajusta mejor a la curva en el punto que se considere. Análogamente, se puede definir el plano osculador en un punto como la posición límite de un plano que pasa por tres puntos vecinos de la curva cuando éstos se aproximan al punto considerado. La recta tangente y el plano osculador son ejemplos de figuras geométricas que tienen cierto orden de *contacto* con la curva. En el próximo capítulo se estudiará la teoría del contacto entre curvas y superficies y, desde este punto de vista, se volverá a considerar el plano osculador.

Ejemplo 4.7.

Consideremos la hélice $\mathbf{x} = (\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3$.

$$\mathbf{x}' = (-\sin t)\mathbf{e}_1 + (\cos t)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad |\mathbf{x}'| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}'/|\mathbf{x}'| = (1/\sqrt{2})(-\sin t)\mathbf{e}_1 + (\cos t)\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \mathbf{t}'/|\mathbf{x}'| = -(1/2)((\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2)$$

y, como quiera que $k \neq 0$ para cualquier t ,

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| = -((\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2)$$

La ecuación de la normal principal en $t = \pi/2$ es

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\pi/2) + kn(\pi/2), \text{ o sea, } \mathbf{y} = (1-k)\mathbf{e}_2 + \pi/2\mathbf{e}_3, \quad -\infty < k < \infty$$

y la ecuación del plano osculador en $t = \pi/2$ es

$$[(\mathbf{y} - \mathbf{x}(\pi/2)) \cdot \mathbf{t}(\pi/2)\mathbf{n}(\pi/2)] = 0$$

$$\text{o sea} \quad \det \begin{pmatrix} y_1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ y_2 - 1 & 0 & -1 \\ y_3 - \pi/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{o} \quad y_1 + y_3 = \pi/2$$

BINORMAL. TRIEDRO MOVIL

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ una curva regular C de clase ≥ 2 y supongamos que a todo lo largo de ella \mathbf{n} sea continua. Entonces, en todos los puntos de C tendremos dos vectores unitarios continuos y ortogonales, a saber: la tangente unidad \mathbf{t} y el vector normal principal unitario \mathbf{n} . Consideremos ahora el vector

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

Obsérvese que \mathbf{b} es continuo y de longitud igual a la unidad, y que $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ forman una terna ortonormal dextrógira, tal como aparece en la figura 4-8. El vector $\mathbf{b}(s)$ se denomina *vector unitario binormal* a C en el punto $\mathbf{x}(s)$, y la terna $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ recibe el nombre de *triedro móvil* de C .

La recta que pasa por \mathbf{x} y es paralela a \mathbf{b} se llama *recta binormal* a C en \mathbf{x} . De esta definición se colige que la ecuación de la binormal en \mathbf{x} es la siguiente

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{b}, \quad -\infty < k < \infty \quad (4.11)$$

El plano paralelo a \mathbf{t} y \mathbf{b} y que, además, pasa por un punto \mathbf{x} de C , recibe el nombre de *plano rectificante* en \mathbf{x} . Su ecuación es la siguiente

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.12)$$

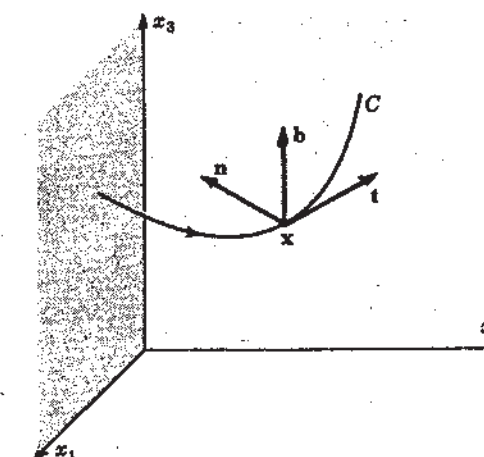


Fig. 4-8

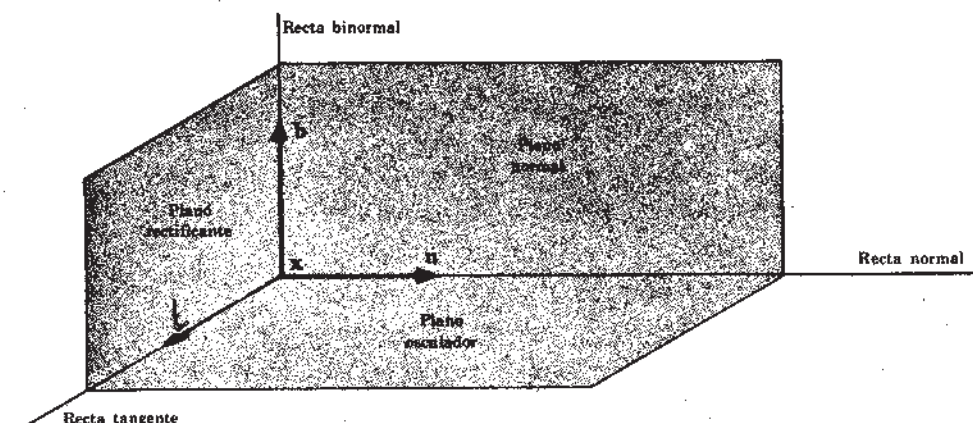


Fig. 4-9

De este modo, en todo punto \mathbf{x} de C tenemos las tres rectas y los tres planos característicos siguientes:

Recta tangente:	$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{t}$
Recta normal principal:	$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{n}$
Recta binormal:	$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{b}$
Plano normal:	$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} = 0$
Plano rectificante:	$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0$
Plano osculador:	$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} = 0$

Ejemplo 4.8.

Con relación a la hélice del ejemplo 4.4 tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3, \quad a > 0, \quad b \neq 0 \\ \mathbf{t} &= (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{k} &= -\frac{a}{a^2 + b^2}((\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = -((\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & -a(a^2 + b^2)^{-1/2} \sin t & -\cos t \\ \mathbf{e}_2 & a(a^2 + b^2)^{-1/2} \cos t & -\sin t \\ \mathbf{e}_3 & b(a^2 + b^2)^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= (a^2 + b^2)^{-1/2}(b(\sin t)\mathbf{e}_1 - b(\cos t)\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

La ecuación de la binormal en $t = t_0$ es

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0) + k\mathbf{b}(t_0)$$

$$\text{o sea, } \mathbf{y} = (a \cos t_0 + kb(a^2 + b^2)^{-1/2} \sin t_0)\mathbf{e}_1 + (a \sin t_0 - kb(a^2 + b^2)^{-1/2} \cos t_0)\mathbf{e}_2 + (bt_0 + ak(a^2 + b^2)^{-1/2})\mathbf{e}_3, \quad -\infty < k < \infty$$

Ahora, bien, si introducimos el cambio de parámetro $\theta = k(a^2 + b^2)^{-1/2}$, tendremos

$$\mathbf{y} = (a \cos t_0 + \theta b \sin t_0)\mathbf{e}_1 + (a \sin t_0 - \theta b \cos t_0)\mathbf{e}_2 + (bt_0 + a\theta)\mathbf{e}_3, \quad -\infty < \theta < \infty$$

La ecuación del plano rectificante en $t = t_0$ es

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{n}(t_0) = 0$$

$$\text{o sea, } (y_1 - a \cos t_0)(-\cos t_0) + (y_2 - a \sin t_0)(-\sin t_0) = 0$$

$$\text{o } y_1 \cos t_0 + y_2 \sin t_0 = a$$

Obsérvese que los planos rectificantes son paralelos al eje x_3 .

TORSION.

Supongamos ahora que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una curva regular de clase ≥ 3 y que a todo lo largo de ella $\mathbf{n}(s)$ sea de clase C^1 . En ese caso, podremos hacer la derivada de $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$, y obtendremos

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) \times \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s) = \kappa(s)[\mathbf{n}(s) \times \mathbf{n}(s)] + \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{t}(s) \times \dot{\mathbf{n}}(s) \quad (4.13)$$

en donde hemos hecho uso de la ecuación (4.6) y del hecho de que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todo \mathbf{a} . Como quiera que \mathbf{n} es un vector unitario, $\dot{\mathbf{n}}$ es ortogonal a \mathbf{n} y, por esta razón, paralelo al plano rectificante. De esto se deduce que $\dot{\mathbf{n}}$ es una combinación lineal de \mathbf{t} y \mathbf{b} , por ejemplo

$$\dot{\mathbf{n}}(s) = \mu(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)$$

Sustituyendo en (4.13), se tiene

$$\dot{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{t}(s) \times [\mu(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)] = \tau(s)[\mathbf{t}(s) \times \mathbf{b}(s)]$$

$$\text{o } \dot{\mathbf{b}}(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s) \quad (4.14)$$

en donde utilizamos el hecho de que $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ es una terna ortonormal dextrógira y, en consecuencia, $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$.

La función continua $\tau(s)$ que define la ecuación (4.14) se denomina *segunda curvatura* o *torsión* de C en $\mathbf{x}(s)$. Obsérvese que si hacemos el producto escalar de (4.14) por \mathbf{n} , obtendremos la fórmula

$$\tau(s) = -\dot{\mathbf{b}}(s) \cdot \mathbf{n}(s) \quad (4.15)$$

Es de observar que el signo de τ es independiente del sentido de \mathbf{n} y de la orientación de C y, por tanto, es una propiedad intrínseca de la curva. En efecto, supongamos, en primer lugar, que cambiamos el sentido de \mathbf{n} , es decir, que hacemos $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$, entonces $\mathbf{b}^* = \mathbf{t} \times \mathbf{n}^* = \mathbf{t} \times (-\mathbf{n}) = -\mathbf{b}$ y, de acuerdo con la ecuación (4.15), tendremos

$$\tau^* = -\dot{\mathbf{b}}^* \cdot \mathbf{n}^* = -(-\dot{\mathbf{b}}) \cdot (-\mathbf{n}) = -\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} = \tau$$

Y, de esta suerte, τ es independiente del sentido de \mathbf{n} . En segundo lugar, supongamos que se cambia la orientación de la curva, es decir, que hacemos $s = -s^* + \text{constante}$. Entonces $\mathbf{t}^* = -\mathbf{t}$. Además,

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{t}^* \times \mathbf{n} = -(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = -\mathbf{b}$$

y

$$\frac{d\mathbf{b}^*}{ds^*} = \frac{d\mathbf{b}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = -\frac{d\mathbf{b}}{ds}(-1) = \frac{d\mathbf{b}}{ds}$$

$$\text{de modo que nuevamente, } \tau^* = -\frac{d\mathbf{b}^*}{ds^*} \cdot \mathbf{n} = -\frac{d\mathbf{b}}{ds} \cdot \mathbf{n} = \tau$$

que es el resultado buscado.

Ejemplo 4.9.

Consideremos de nuevo la hélice

$$\mathbf{x} = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3, \quad a > 0, \quad b \neq 0$$

Remitiéndonos al ejemplo 4.8, tendremos

$$\mathbf{b} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(b(\sin t)\mathbf{e}_1 - b(\cos t)\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} \left/ \frac{dx}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1/2}(b(\cos t)\mathbf{e}_1 + b(\sin t)\mathbf{e}_2)$$

La torsión es constante e igual a

$$\tau = -\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} = -(a^2 + b^2)^{-1/2}(b(\cos t)\mathbf{e}_1 + b(\sin t)\mathbf{e}_2) \cdot ((-\cos t)\mathbf{e}_1 - (\sin t)\mathbf{e}_2) = b/(a^2 + b^2)$$

Obsérvese que si $b > 0$ (de modo que $\tau > 0$) la hélice será una curva dextrógira, tal como lo muestra la figura 4-10(a). Si $b < 0$ (de modo que $\tau < 0$), la hélice será una curva levógira tal como lo muestra la figura 4-10(b). Y como el signo de τ es una propiedad intrínseca, concluimos que estas dos curvas no se pueden superponer.



(a) Hélice dextrógira, $\tau > 0$



(b) Hélice levógira, $\tau < 0$

Fig. 4-10

Si la torsión es idénticamente nula a todo lo largo de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, o sea, si $\tau \equiv 0$, entonces $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n} \equiv \mathbf{0}$. Y, por tanto, $\mathbf{b} = \text{constante} = \mathbf{b}_0$. Consideremos ahora la

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_0) = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}_0$$

Puesto que \mathbf{t} y \mathbf{b}_0 son ortogonales, entonces $\frac{d}{ds}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_0) \equiv 0$ e, integrando nuevamente,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_0 = \text{constante} \quad (4.16)$$

Es decir, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una *curva plana* situada sobre el plano $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}_0 = \text{constante}$. En particular, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ está en su plano osculador, como se muestra en la figura 4-11. La recíproca es también verdadera. De este modo se llega al

Teorema 4.4. Si una curva es de clase ≥ 3 y a todo lo largo de ella \mathbf{n} es de clase C^1 , entonces se tratará de una curva plana si y sólo si su torsión es idénticamente nula.

A no ser que digamos otra cosa, supondremos que las curvas con las que trabajamos son curvas regulares de clase ≥ 3 y que a todo lo largo de ellas \mathbf{n} es de clase C^1 . En este caso, se deduce que τ es continua y que κ , \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} son de clase C^1 .

Es posible, además, disponer de una fórmula conveniente para la torsión por medio de una representación arbitraria. En el problema 4.19 de la página 81, se demostrará el

Teorema 4.5. En un punto de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en el que $\kappa \neq 0$, es

$$\tau = \frac{[\mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{x}''']}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|^2}$$

INDICATRICES ESFERICAS

Los vectores unitarios tangentes, al desplazarse a todo lo largo de la curva C , engendran una curva Γ sobre la esfera que tiene el centro en el origen y el radio igual a 1, tal como se muestra en la figura 4-12. La curva Γ recibe el nombre de *indicatriz esférica* de \mathbf{t} .

Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una representación natural de C , entonces $\mathbf{x}_1 = \mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s)$ será una representación de Γ . Sin embargo, en general s no es un parámetro natural en toda la extensión de $\mathbf{x}_1 = \mathbf{t}(s)$, porque

$$\left| \frac{d\mathbf{x}_1}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = |\dot{\mathbf{t}}| = |\kappa|$$

De hecho, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{t}(s)$ es una representación natural de Γ si y sólo si a todo lo largo de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ la curvatura es $|\kappa| = 1$.

En forma parecida, consideramos la indicatriz esférica de la normal unitaria $\mathbf{x}_2 = \mathbf{n}(s)$ y la indicatriz esférica $\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}(s)$ de la binormal unitaria.

Ejemplo 4.10.

Remitiéndonos a la hélice de los ejemplos 4.8 y 4.9, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3 & a > 0, b \neq 0 \\ \mathbf{t} &= (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{n} &= -((\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{b} &= (a^2 + b^2)^{-1/2}(b(\sin t)\mathbf{e}_1 - b(\cos t)\mathbf{e}_2 + a\mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

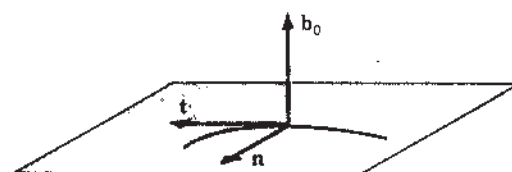


Fig. 4-11

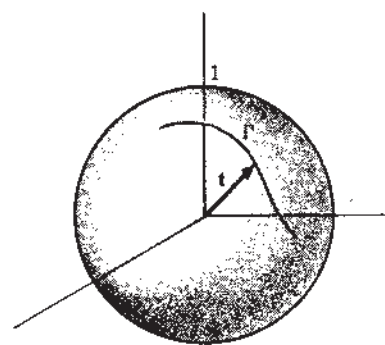


Fig. 4-12

Obsérvese que \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} tienen constantes sus componentes respecto de \mathbf{e}_3 , de suerte que sus imágenes esféricas son circunferencias con centro en el eje x_3 .

El radio de la indicatriz esférica de \mathbf{t} y, por tanto, su radio de curvatura, es

$$\rho_t = \left(1 - \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right)^{1/2} = \frac{a}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$$

Los radios de curvatura de las indicatrices esféricas de \mathbf{n} y \mathbf{b} son $\rho_n = 1$ y $\rho_b = \frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$, respectivamente.

Problemas resueltos

RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL

4.1. Hallar las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva siguiente

$$\mathbf{x} = (1+t)\mathbf{e}_1 - t^2\mathbf{e}_2 + (1+t^3)\mathbf{e}_3$$

en $t = 1$.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_1 - 2t\mathbf{e}_2 + 3t^2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}(1) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}'(1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3.$$

La ecuación de la tangente en $t = 1$ es

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(1) + k\mathbf{x}'(1), \text{ o sea, } \mathbf{y} = (2+k)\mathbf{e}_1 - (1+2k)\mathbf{e}_2 + (2+3k)\mathbf{e}_3$$

La ecuación del plano normal es

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}(1)) \cdot \mathbf{x}'(1) = 0, \text{ o sea, } (y_1 - 2) + (y_2 + 1)(-2) + (y_3 - 2)3 = 0, \text{ o, } y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 10$$

4.2. Hallar las intersecciones del plano x_1x_2 con las rectas tangentes a la hélice descrita por

$$\mathbf{x} = (\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3 \quad (t > 0)$$

La tangente en un punto \mathbf{x} cualquiera es

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{x}', \text{ o sea, } \mathbf{y} = (\cos t - k \sin t)\mathbf{e}_1 + (\sin t + k \cos t)\mathbf{e}_2 + (t+k)\mathbf{e}_3$$

o, también, utilizando a \mathbf{x} como vector de posición,

$$x_1 = \cos t - k \sin t, \quad x_2 = \sin t + k \cos t, \quad x_3 = t + k$$

La ecuación del plano x_1x_2 es $x_3 = 0$. Y, en consecuencia, sobre él, a todo lo largo de la intersección, será $t + k = 0$, o sea, $k = -t$. De modo que las intersecciones forman la curva

$$x_1 = \cos t + t \sin t, \quad x_2 = \sin t - t \cos t, \quad x_3 = 0$$

4.3. Demostrar que los vectores tangentes a lo largo de la curva $\mathbf{x} = at\mathbf{e}_1 + bt^2\mathbf{e}_2 + t^3\mathbf{e}_3$, (siendo $2b^2 = 3a$), forman un ángulo constante con el vector $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

$$\mathbf{x}' = a\mathbf{e}_1 + 2bt\mathbf{e}_2 + 3t^2\mathbf{e}_3$$

$$|\mathbf{x}'| = (a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4)^{1/2} = (a^2 + 6at^2 + 9t^4)^{1/2} = a + 3t^2$$

en donde hemos hecho uso de la igualdad $2b^2 = 3a$. Entonces, el ángulo que forma la tangente \mathbf{x}' con \mathbf{a} es el

$$\cos^{-1} \left\{ \frac{(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{a})}{|\mathbf{x}'| |\mathbf{a}|} \right\} = \cos^{-1} \left\{ \frac{a + 3t^2}{(a + 3t^2)\sqrt{2}} \right\} = \cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$$

- 4.4. Se da el nombre de *hélice general*, o *hélice cilíndrica* o *curva de pendiente constante*, a una curva que, como en el ejemplo precedente, tenga un vector fijo en el espacio, al cual se le llama *eje de la hélice*, tal que el ángulo α que forme cada vector tangente con el eje sea constante. Se excluye el caso en que sea $\alpha = 0$, para el cual los vectores tangentes son todos paralelos; entonces (véase el problema 4.28) la curva es la línea recta. Demostrar que una hélice general tiene una representación natural de la forma

$$\mathbf{x} = x_1(s^*)\mathbf{e}_1 + x_2(s^*)\mathbf{e}_2 + s^*(\cos \alpha)\mathbf{e}_3$$

Supongamos que la hélice está situada en forma que el origen sea un punto de la curva y \mathbf{e}_3 paralelo al eje de la hélice. Entonces,

$$\cos \alpha = \cos \angle(\mathbf{t}, \mathbf{e}_3) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 = \dot{x}_3 = \dot{s}^*$$

Integrando $\dot{x}_3 = \cos \alpha$, se tiene

$$x_3 = s \cos \alpha + c, \quad c = \text{constante}$$

Si $\alpha \neq \pi/2$ hacemos $s^* = s \cos \alpha + c/(\cos \alpha)$. Entonces $x_3 = s^* \cos \alpha$ y tendremos una representación natural de la forma

$$\mathbf{x} = x_1(s^*)\mathbf{e}_1 + x_2(s^*)\mathbf{e}_2 + s^*(\cos \alpha)\mathbf{e}_3$$

como se deseaba. Si $\alpha = \pi/2$, entonces $x_3 = c = 0$, pues el origen es un punto de la curva. De esta suerte,

$$\mathbf{x} = x_1(s)\mathbf{e}_1 + x_2(s)\mathbf{e}_2$$

En este caso, la curva está en el plano $x_3 = 0$.

CURVATURA

- 4.5. Hallar el vector curvatura \mathbf{k} y la curvatura $|\kappa|$ de la curva descrita por

$$\mathbf{x} = t\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}t^2\mathbf{e}_2 + \frac{1}{3}t^3\mathbf{e}_3$$

en el punto $t = 1$.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 + t^2\mathbf{e}_3, \quad |\mathbf{x}'| = (1 + t^2 + t^4)^{1/2}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}'/|\mathbf{x}'| = (1 + t^2 + t^4)^{-1/2}(\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 + t^2\mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{t}' = (1 + t^2 + t^4)^{-1/2}(\mathbf{e}_2 + 2t\mathbf{e}_3) - (\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 + t^2\mathbf{e}_3)(1 + t^2 + t^4)^{-3/2}(t + 2t^3)$$

$$= -(1 + t^2 + t^4)^{-3/2}[(2t^3 + t)\mathbf{e}_1 + (t^4 - 1)\mathbf{e}_2 - (t^3 + 2t)\mathbf{e}_3]$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{t}'/|\mathbf{t}'| = -(1 + t^2 + t^4)^{-2}[(2t^3 + t)\mathbf{e}_1 + (t^4 - 1)\mathbf{e}_2 - (t^3 + 2t)\mathbf{e}_3]$$

En $t = 1$ se tiene $\mathbf{k} = -\frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3)$ y $|\kappa| = |\mathbf{k}| = \frac{1}{3}\sqrt{2}$.

- 4.6. Demostrar que la curvatura $|\kappa^*|$ de la proyección de una hélice general (véase el problema 4.4) sobre un plano normal a su eje, viene dada por $|\kappa^*| = |\kappa|/\sin^2 \alpha$, donde $\alpha \neq 0$ es el ángulo que forma el eje con los vectores tangentes a la hélice y $|\kappa|$ es la curvatura de la hélice.

Sea la hélice $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ cuyo eje es un vector \mathbf{u} de longitud igual a la unidad. Como puede verse en la figura 4-13, la proyección de la hélice sobre un plano perpendicular a \mathbf{u} y que pasa por el origen, es la curva

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(s) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}(s))\mathbf{u}$$

Obsérvese que, en general, s no será un parámetro natural de la proyección $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(s)$. Si derivamos, se obtiene

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \mathbf{t} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})\mathbf{u} = \mathbf{t} - (\cos \alpha)\mathbf{u}$$

y

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| &= \left[\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right]^{1/2} \\ &= [(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) - 2(\cos \alpha)(\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) + (\cos^2 \alpha)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})]^{1/2} \\ &= [1 - 2\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha]^{1/2} = \sin \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi \end{aligned}$$

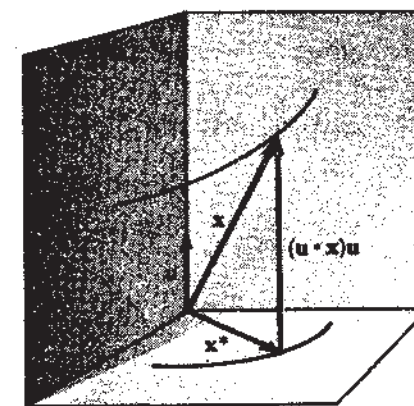


Fig. 4-13

Así, pues, $\mathbf{t}^* = \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = \frac{\mathbf{t} - (\cos \alpha)\mathbf{u}}{\sin \alpha}$ y $\frac{dt^*}{ds} = \dot{\mathbf{t}}/\sin \alpha$

y por último, $|\kappa^*| = |\dot{\mathbf{t}}^*| = \left| \frac{d\mathbf{t}^*}{ds} \right| / \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = |\dot{\mathbf{t}}|/\sin^2 \alpha = |\kappa|/\sin^2 \alpha$

- 4.7. Demostrar el teorema 4.2, a saber: En todo punto de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de clase ≥ 2 , $|\kappa| = |\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|/|\mathbf{x}'|^3$.

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{\mathbf{x}}s', \quad \mathbf{x}'' = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}}s') = \dot{\mathbf{x}} \frac{ds'}{dt} + s' \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}s'' + (s')^2 \ddot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = (\dot{\mathbf{x}}s') \times (\dot{\mathbf{x}}s'' + \ddot{\mathbf{x}}(s')^2) = (s')^3(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) = |\mathbf{x}'|^3(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})$$

en donde utilizamos la expresión $s' = ds/dt = |\mathbf{x}'|$. Entonces,

$$|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''| = |\mathbf{x}'|^3 |\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| = |\mathbf{x}'|^3 |\dot{\mathbf{x}}| |\ddot{\mathbf{x}}| \sin \angle(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$$

Pero, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{t}$ y $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{t}}$ son ortogonales, $|\dot{\mathbf{x}}| = 1$, $|\ddot{\mathbf{x}}| = |\dot{\mathbf{t}}| = |\kappa|$. Por tanto, $|\kappa| = |\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|/|\mathbf{x}'|^3$.

- 4.8. Demostrar que una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de clase ≥ 2 es una línea recta si $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}''(t)$ son linealmente dependientes para todo valor de t .

Puesto que $|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''| = 0$ si \mathbf{x}' y \mathbf{x}'' son dependientes, tenemos que $|\kappa| = |\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|/|\mathbf{x}'|^3 = 0$ para cualquier valor de t . Y, en consecuencia, de acuerdo con el teorema 4.1 de la página 67, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una recta.

- 4.9. Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es de clase ≥ 2 y que $\Delta\theta$ representa el ángulo que forman la tangente unitaria $\mathbf{t}(s)$ en $\mathbf{x}(s)$ y $\mathbf{t}(s + \Delta s)$ en un punto vecino $\mathbf{x}(s + \Delta s)$, $\Delta s > 0$, como se muestra en la figura 4-14(a). Demostrar que la curvatura viene dada por

$$|\kappa| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

Es decir, $|\kappa|$ es la medida de la rapidez de variación de la dirección de la tangente respecto de la longitud de arco.

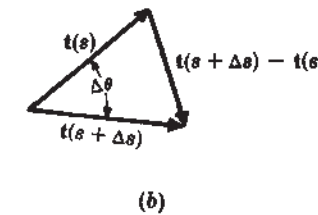
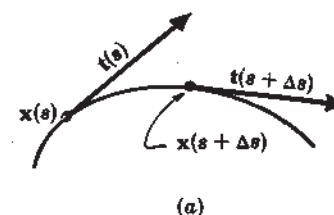


Fig. 4-14

Como \mathbf{t} es un vector unitario, entonces $|\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)|$ es la base de un triángulo isósceles cuyos lados son iguales a 1, como se ve en la figura 4-14(b). En consecuencia,

$$|\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)| = 2 \sin(\frac{1}{2}\Delta\theta) = \Delta\theta + o(\Delta\theta)$$

en donde utilizamos el desarrollo de Taylor para expresar la función seno. Entonces,

$$\begin{aligned} |\kappa| &= |\dot{\mathbf{t}}| = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{t}(s + \Delta s) - \mathbf{t}(s)}{\Delta s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta + o(\Delta\theta)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\theta}{\Delta s} \left(1 + \frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \right) \right] \end{aligned}$$

Y como $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\theta = 0$, entonces, $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{o(\Delta\theta)}{\Delta\theta} = 0$ y $|\kappa| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$.

4.10. Demostrar que, si todas las tangentes a una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ de clase ≥ 2 tienen una intersección común, aquella es una recta.

Supongamos que \mathbf{y}_0 es la intersección común de las rectas tangentes $\mathbf{y} = \mathbf{x}(s) + k\mathbf{t}(s)$. Entonces, para cada s , a todo lo largo de la curva, existe un $k = k(s)$ tal que

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}(s) + k(s)\mathbf{t}(s)$$

Obsérvese que sobre una recta tangente $\mathbf{y} = \mathbf{x}(s) + k\mathbf{t}(s)$, se tiene que $k = 0$ si y sólo si \mathbf{y} pertenece a la curva. De esta suerte, si suponemos que la curva es simple (que es el caso, localmente), entonces $k(s) \neq 0$, excepto, tal vez, para un solo valor de s , llamémoslo s_0 . Derivando la expresión anterior, se tiene

$$0 = \dot{\mathbf{x}} + \dot{k}\mathbf{t} + k\dot{\mathbf{t}} = (1 + \dot{k})\mathbf{t} + k\dot{\mathbf{t}}$$

Multiplicando por $\dot{\mathbf{t}}$

$$0 = (1 + \dot{k})(\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}}) + k(\dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{t}})$$

Puesto que $\dot{\mathbf{t}}$ es ortogonal a \mathbf{t} , entonces $0 = k|\dot{\mathbf{t}}|^2$, o sea, $0 = k|\kappa|^2$. Y, puesto que $k(s) \neq 0$ para $s \neq s_0$, $|\kappa| = 0$ para $s \neq s_0$. Pero, $|\kappa|$ es continua. Por tanto, $|\kappa| = 0$ para cualquier s y, del teorema 4.1 de la página 67, se deduce que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una recta.

TRIEDRO MOVIL

4.11. Hallar una normal principal unitaria y una binormal unitaria, continuas, a todo lo largo de la curva siguiente

$$\mathbf{x} = (3t - t^3)\mathbf{e}_1 + 3t^2\mathbf{e}_2 + (3t + t^3)\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}' = (3 - 3t^2)\mathbf{e}_1 + 6t\mathbf{e}_2 + (3 + 3t^2)\mathbf{e}_3$$

$$|\mathbf{x}'| = 3[(1 - t^2)^2 + (2t)^2 + (1 + t^2)^2]^{1/2} = 3\sqrt{2}(1 + 2t^2 + t^4)^{1/2} = 3\sqrt{2}(1 + t^2)$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)} [(1 - t^2)\mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2 + (1 + t^2)\mathbf{e}_3]$$

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{x}'|} = \frac{-2t\mathbf{e}_1 + (1 - t^2)\mathbf{e}_2}{3(1 + t^2)^2}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{[(2t)^2 + (1 - t^2)^2]^{1/2}}{3(1 + t^2)^2} = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

Puesto que $\mathbf{k} \neq 0$ para todo valor de t , podemos escoger

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{-2t}{1 + t^2}\mathbf{e}_1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\mathbf{e}_2$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)^2} \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 - t^2 & -2t \\ \mathbf{e}_2 & 2t & 1 - t^2 \\ \mathbf{e}_3 & 1 + t^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)^2} [-(1 + t^2)(1 - t^2)\mathbf{e}_1 - 2t(1 + t^2)\mathbf{e}_2 + (1 + t^2)^2\mathbf{e}_3] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 + t^2)} [(t^2 - 1)\mathbf{e}_1 - 2t\mathbf{e}_2 + (1 + t^2)\mathbf{e}_3] \end{aligned}$$

4.12. Demostrar que, en toda la extensión de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, el vector \mathbf{x}'' es paralelo al plano osculador y que sus componentes respecto de \mathbf{t} y \mathbf{n} son $|\mathbf{x}'|'$ y $\kappa|\mathbf{x}'|^2$, respectivamente.

Derivando $\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t}s'$ respecto de t , se tiene

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{t}s'' + \mathbf{t}'s' = \mathbf{t}s'' + \dot{\mathbf{t}}s'^2 = \mathbf{t}s'' + \kappa s'^2$$

en donde $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, de acuerdo con la ecuación (4.6). De aquí se deduce que \mathbf{x}'' es paralelo al plano osculador y que sus componentes respecto de \mathbf{t} y \mathbf{n} son $|\mathbf{x}'|' = s''$ y $\kappa|\mathbf{x}'|^2 = \kappa s'^2$, respectivamente.

4.13. (a) Si \mathbf{x}' y \mathbf{x}'' son linealmente independientes en un punto \mathbf{x} en toda la extensión de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, demostrar que el plano osculador en \mathbf{x} es $[(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{x}'\mathbf{x}''] = 0$. (b) Utilizar esta fórmula para hallar el plano osculador de la curva $\mathbf{x} = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2 + t^3\mathbf{e}_3$ en $t = 1$.

(a) En el problema anterior vimos que \mathbf{x}'' es paralelo al plano osculador y ya sabemos que \mathbf{x}' es paralelo al plano osculador por ser un múltiplo de \mathbf{t} . Como hemos supuesto que \mathbf{x}' y \mathbf{x}'' son independientes, se deduce que $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''$ es un vector, no nulo, normal al plano osculador en \mathbf{x} . Por esta razón, la ecuación del plano osculador en \mathbf{x} es $[(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{x}'\mathbf{x}''] = 0$.

(b) $\mathbf{x}' = \mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2 + 3t^2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}'' = 2\mathbf{e}_2 + 6t\mathbf{e}_3$

De esta suerte, el plano osculador en $t = 1$ es $[(\mathbf{y} - \mathbf{x}(1))\mathbf{x}'(1)\mathbf{x}''(1)] = 0$, o sea

$$\det \begin{pmatrix} y_1 - 1 & 1 & 0 \\ y_2 - 1 & 2 & 2 \\ y_3 - 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

de donde,

$$(y_1 - 1)6 - (y_2 - 1)6 + (y_3 - 1)2 = 0, \text{ o sea, } 3y_1 - 3y_2 + y_3 = 1$$

4.14. Demostrar que los puntos de la hélice $\mathbf{x} = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + bte_3$ cuyos planos osculadores pasan por un punto fijo, están en un plano.

Supongamos que $\mathbf{x}_\lambda = a(\cos t_\lambda)\mathbf{e}_1 + a(\sin t_\lambda)\mathbf{e}_2 + bt_\lambda\mathbf{e}_3$ representa los puntos de la hélice cuyos planos osculadores pasan por el punto $\mathbf{y}_0 = y_{01}\mathbf{e}_1 + y_{02}\mathbf{e}_2 + y_{03}\mathbf{e}_3$. Fácilmente se verifica que \mathbf{x}' y \mathbf{x}'' son independientes entre sí para cualquier valor de t . De este modo, la ecuación del plano osculador en \mathbf{x} es $[(\mathbf{y} - \mathbf{x})\mathbf{x}'\mathbf{x}''] = 0$. Por tanto, para cada valor de λ ,

$$[(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}(t_\lambda))\mathbf{x}'(t_\lambda)\mathbf{x}''(t_\lambda)] = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} y_{01} - a \cos t_\lambda & -a \sin t_\lambda & -a \cos t_\lambda \\ y_{02} - a \sin t_\lambda & a \cos t_\lambda & -a \sin t_\lambda \\ y_{03} - bt_\lambda & b & 0 \end{pmatrix} = 0$$

o, también, desarrollando el determinante $(by_{02})(a \cos t_\lambda) - (by_{01})(a \sin t_\lambda) + (a^2)(bt_\lambda) = a^2y_{03}$.

De esta suerte, pues, los $\mathbf{x}_\lambda = a(\cos t_\lambda)\mathbf{e}_1 + a(\sin t_\lambda)\mathbf{e}_2 + bt_\lambda\mathbf{e}_3$ están en el plano

$$by_{02}x_1 - by_{01}x_2 + a^2x_3 = a^2y_{03}.$$

4.15. Demostrar el teorema 4.3, a saber: Si $\mathbf{x}(s_0)$ es un punto de inflexión de una curva analítica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, que no sea una línea recta, entonces en un entorno de s_0 existe un vector unitario normal principal continuo $\mathbf{n}(s)$ de la curva.

Supongamos que $\mathbf{x}^{(k)}(s_0)$ es la primera derivada de orden $k > 1$, no nula, de $\mathbf{x}(s)$ en s_0 . Puesto que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ no es una recta, tal derivada, no nula, existe. De hecho, es $k > 2$, porque $\dot{\mathbf{t}}(s_0) = \dot{\mathbf{x}}'(s_0) = 0$ en un punto de inflexión. Entonces, podemos escribir

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s_0) + \dot{\mathbf{x}}(s_0)(s - s_0) + \frac{\mathbf{x}^{(k)}(s_0)}{k!}(s - s_0)^k + \frac{\mathbf{x}^{(k+1)}(s_0)(s - s_0)^{k+1}}{(k+1)!} + \dots$$

Entonces $t = \dot{x} = \dot{x}(s_0) + \frac{x^{(k)}(s_0)(s-s_0)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^{(k+1)}(s_0)(s-s_0)^k}{k!} + \dots$

y $k = \ddot{x} = \ddot{x}(s_0) + \frac{x^{(k+1)}(s_0)(s-s_0)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots$

$$= (s-s_0)^{k-2} \left[\frac{x^{(k)}(s_0)}{(k-2)!} + \frac{x^{(k+1)}(s_0)(s-s_0)}{(k-1)!} + \dots \right] = (s-s_0)^{k-2} w(s)$$

en donde $w(s)$ es analítica en s_0 y $w(s_0) = \frac{x^{(k)}(s_0)}{(k-2)!} \neq 0$. Puesto que $w(s)$ es ciertamente continua en s_0 , existe un entorno $S_\delta(s_0)$ tal que $w(s) \neq 0$ para s en $S_\delta(s_0)$. Consideremos, ahora, el vector $n = w(s)/|w(s)|$. Para s en $S_\delta(s_0)$, el vector n es continuo, de longitud igual a la unidad, y $k = \ddot{x}$ es un múltiplo de n ; porque

$$k = (s-s_0)^{k-2} w(s) = (s-s_0)^{k-2} |w(s)| \frac{w(s)}{|w(s)|} = (s-s_0)^{k-2} |w(s)| n = \kappa(s) n$$

que es lo buscado. Obsérvese que para este n , $\kappa = |k|$ si k es par o sea, $((s-s_0)^{k-2} \geq 0)$. En otras palabras:

$$\kappa = \begin{cases} |k| & \text{para } s \geq s_0 \\ -|k| & \text{para } s < s_0 \end{cases}$$

TORSION

4.16. Con la ayuda de las fórmulas de los teoremas 4.2 y 4.5, hallar la curvatura y la torsión en cualquier punto de la siguiente curva

$$x = (3t - t^3)e_1 + 3t^2e_2 + (3t + t^3)e_3$$

$$|x| = \frac{|x' \times x''|}{|x'|^3} = \frac{|[(3-3t^2)e_1 + 6te_2 + (3+3t^2)e_3] \times [-6te_1 + 6e_2 + 6te_3]|}{|(3-3t^2)e_1 + 6te_2 + (3+3t^2)e_3|^3}$$

$$= \frac{18|(t^2-1)e_1 - 2te_2 + (1+t^2)e_3|}{27|(t^2-1)e_1 + 2te_2 + (1+t^2)e_3|^3} = \frac{2}{3(1+t^2)^2}$$

$$\tau = \frac{|x' \times x'' \times x''|}{|x' \times x''|^2} = \frac{(x' \times x'') \cdot x'''}{|x' \times x''|^2} = \frac{18[(t^2-1)e_1 - 2te_2 + (1+t^2)e_3] \cdot 6[-e_1 + e_3]}{18^2|(t^2-1)e_1 - 2te_2 + (1+t^2)e_3|^2} = \frac{2}{3(1+t^2)^2}$$

Obsérvese que a lo largo de esta curva, $|x| = \tau$.

4.17. Demostrar que en cualquier punto de una curva $x = x(s)$, $\ddot{x} = -\kappa^2 t + \dot{\kappa} n + \tau \kappa b$.

Derivando $\ddot{x} = \dot{t} = \kappa n$, tendremos

$$\ddot{x} = \dot{\kappa} n + \kappa \dot{n} = \kappa \frac{d}{ds}(b \times t) + \dot{\kappa} n = \kappa(b \times \dot{t} + \dot{b} \times t) + \dot{\kappa} n$$

en donde utilizamos el hecho de que t, n, b forman una terna ortonormal dextrógira y, por tanto, $n = b \times t$. Haciendo nuevamente uso de $\dot{t} = \kappa n$ y también $\dot{b} = -\tau n$, tendremos

$$\ddot{x} = \kappa^2(b \times n) - \kappa\tau(n \times t) + \dot{\kappa} n = \kappa^2(-t) + \kappa\tau b + \dot{\kappa} n$$

4.18. Demostrar que en todos los puntos de una curva $x = x(s)$, $[\ddot{x} \ddot{x} \ddot{x}] = \kappa^2 \tau$.

Utilizando el resultado del problema anterior, se tiene

$$\ddot{x} \times \ddot{x} = \dot{t} \times \ddot{x} = \kappa n \times (-\kappa^2 t + \dot{\kappa} n + \tau \kappa b) = -\kappa^3(n \times t) + \kappa \dot{\kappa}(n \times n) + \tau \kappa^2(n \times b) = \kappa^3 b + \tau \kappa^2 t$$

pues t, n, b forman una terna ortonormal dextrógira. Por último,

$$[\ddot{x} \ddot{x} \ddot{x}] = \dot{x} \cdot \ddot{x} \times \ddot{x} = t \cdot \ddot{x} \times \ddot{x} = \kappa^3(t \cdot b) + \tau \kappa^2(t \cdot t) = \tau \kappa^2$$

pues, $t \cdot b = 0$ y $t \cdot t = 1$.

4.19. Demostrar el teorema 4.5, a saber: En todo punto de una curva $x = x(t)$ donde $\kappa \neq 0$, la torsión viene dada por la expresión

$$\tau = \frac{[x' x'' x''']}{|x' \times x''|^2}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = x' \dot{t}, \quad \ddot{x} = \frac{d}{ds}(x' \dot{t}) = x' \ddot{t} + \left(\frac{d}{ds} x'\right) \dot{t} = x' \ddot{t} + x'' \dot{t}^2$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{ds}(x' \dot{t} + x'' \dot{t}^2) = x' \ddot{t} + x'' \ddot{t} \dot{t} + x'' 2 \dot{t} \ddot{t} + x''' \dot{t}^3 = x' \ddot{t} + 3x'' \dot{t} \ddot{t} + x''' \dot{t}^3$$

De donde

$$[\ddot{x} \ddot{x} \ddot{x}] = (x' \dot{t}) \cdot (x' \ddot{t} + x'' \dot{t}^2) \times (x' \ddot{t} + 3x'' \dot{t} \ddot{t} + x''' \dot{t}^3)$$

$$= (x' \dot{t}) \cdot [3 \dot{t}^2 \dot{t} (x' \times x'') + \ddot{t} \dot{t}^3 (x' \times x''') + \ddot{t}^2 \dot{t} (x'' \times x') + \ddot{t}^3 (x'' \times x''')]]$$

$$= \dot{t}^2 \dot{t}^2 [x' \times x''] + \ddot{t} [x' \times x'''] + \ddot{t}^3 \dot{t} [x' \times x'] + \ddot{t}^6 [x' \times x''']$$

Como $[x' x' x''] = 0$, entonces,

$$[\ddot{x} \ddot{x} \ddot{x}] = \dot{t}^6 [x' \times x'''], \text{ o sea, } [\ddot{x} \ddot{x} \ddot{x}] = \frac{[x' x'' x''']}{|x'|^6}$$

pues $\dot{t} = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|x'|}$. Con la ayuda de los resultados del problema precedente y sa-

biendo que $\kappa = \frac{|x' \times x''|}{|x'|^3}$ (teorema 4.2), tendremos

$$\tau = \frac{[\ddot{x} \ddot{x} \ddot{x}]}{\kappa^2} = \frac{[x' x'' x''']}{\kappa^2 |x'|^6} = \frac{[x' x'' x''']}{|x' \times x''|^2}$$

4.20. Demostrar que si todos los planos osculadores de una curva tienen un punto de intersección común, la curva es plana.

La ecuación del plano osculador en x es $(y-x) \cdot b = 0$. De esta suerte, si y_0 es el punto de intersección común, entonces $(y_0-x) \cdot b = 0$ para todo s . Derivando y haciendo uso del hecho de que $\dot{x} = t$ y b son ortogonales, se tiene que

$$(y_0-x) \cdot \dot{b} = 0, \text{ o sea, } \tau(y_0-x) \cdot n = 0$$

pues $\dot{b} = -\tau n$. Supongamos, ahora, que la curva no es plana. Entonces, de acuerdo con el teorema 4.4 de la página 74, existe un punto s_0 y, por tanto, un entorno suyo, $S_\delta(s_0)$, donde $\tau \neq 0$. De esta suerte, en $S_\delta(s_0)$, tendremos que $(y_0-x) \cdot n = 0$; es decir, que y_0-x es ortogonal a n . Pero, además, $(y_0-x) \cdot b = 0$; y, de aquí, y_0-x es paralelo a t . De esta manera, existe un $h = h(s)$ tal que para s en $S_\delta(s_0)$, $y_0-x = ht$, o sea, $y_0 = x + ht$; es decir, que (véase el problema 4.10) el punto y_0 es también la intersección de las tangentes. Pero, entonces, en $S_\delta(s_0)$ la curva sería una línea recta, lo cual es imposible porque $\tau \neq 0$ en $S_\delta(s_0)$. Por tanto, $\tau = 0$ para todo valor de s y la curva es plana.

4.21. Demostrar que una curva es una hélice general si y sólo si τ/κ es constante cuando $\kappa \neq 0$ y $\tau = 0$ siempre que $\dot{\kappa} = 0$.

Supongamos que $x = x(s)$ es una hélice general cuyo eje u tiene la unidad de longitud y que $t \cdot u = \cos \alpha$. Recordemos (problema 4.4) que se ha excluido el caso en que $\alpha = 0$ que correspondería a una recta paralela a u . De este modo, para cada valor de s existe un vector unitario, único, $b^*(s)$ ortogonal a $t(s)$ tal que $u = t \cos \alpha + b^* \sin \alpha$. Es evidente que $b^*(s)$ y $n^*(s) = b^*(s) \times t(s)$ son derivables continuamente. Derivando a $t \cdot u = \cos \alpha$ se obtiene $\dot{t} \cdot (t \cos \alpha + b^* \sin \alpha) = 0$ y, como quiera que $\dot{t} \cdot t = 0$, se deduce que $\dot{t} \cdot b^* = 0$. Y así, los $n = n^*$ y $b = b^*$ se pueden escoger, en su orden, como la normal principal y la binormal unitaria, a todo lo largo de la curva. A partir de la expresión

$$0 = \dot{u} = \dot{t} \cos \alpha + \dot{b} \sin \alpha = \kappa n \cos \alpha - \tau n \sin \alpha$$

concluimos que $\tau/\kappa = \cot \alpha = \text{constante}$, siempre que $\kappa \neq 0$, y que $\tau = 0$, siempre que $\kappa = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\tau/\kappa = \cot \alpha$ siempre que $\kappa \neq 0$ y $\tau = 0$, siempre que $\kappa = 0$. Entonces $\kappa \cos \alpha - \tau \sin \alpha = 0$ y, en consecuencia, $\dot{t} \cos \alpha + \dot{b} \sin \alpha = 0$, o sea, integrando,

$t \cos \alpha + b \sin \alpha = u = \text{constante}$. De esta suerte, u es de longitud igual a la unidad y $t \cdot u = \cos \alpha = \text{constante}$; es decir, $x = x(s)$ es una hélice.

4.22. Demostrar que, en cualquier punto de una curva regular $x = x(s)$ de clase ≥ 4 ,

$$[\ddot{x} \ddot{x} x^{(4)}] = \kappa^3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)$$

y, en consecuencia, $x = x(s)$ será una hélice general si y sólo si $[\ddot{x} \ddot{x} x^{(4)}] = 0$.

Remitiéndonos al problema 4.18, $\ddot{x} \times \ddot{x} = \kappa^3 b + \tau \kappa^2 t$. Derivando, se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} \times x^{(4)} &= \left(\frac{d}{ds} \kappa^3 \right) b + \kappa^3 \dot{b} + \left(\frac{d}{ds} \tau \kappa^2 \right) t + \tau \kappa^2 \dot{t} \\ &= \left(\frac{d}{ds} \kappa^3 \right) b - \tau \kappa^3 n + \left(\frac{d}{ds} \tau \kappa^2 \right) t + \tau \kappa^3 n = \left(\frac{d}{ds} \kappa^3 \right) b + \left(\frac{d}{ds} \tau \kappa^2 \right) t \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el problema 4.17, se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{x} \cdot \ddot{x} \times x^{(4)} &= (-\kappa^2 \dot{t} + \dot{\kappa} n + \tau \kappa \dot{b}) \cdot \left[\left(\frac{d}{ds} \kappa^3 \right) b + \left(\frac{d}{ds} \tau \kappa^2 \right) t \right] = -\kappa^2 \frac{d}{ds} \tau \kappa^2 + \tau \kappa \frac{d}{ds} \kappa^3 \\ &= -\kappa^4 \dot{\tau} - 2\tau \kappa^3 \dot{\kappa} + 3\tau \kappa^3 \dot{\kappa} = -\kappa^3 [\dot{\tau} - \dot{\kappa} \tau] = -\kappa^3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right) \end{aligned}$$

Así, pues,

$$[\ddot{x} \ddot{x} x^{(4)}] = -[\ddot{x} \ddot{x} x^{(4)}] = \kappa^3 \frac{d}{ds} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)$$

Si $x = x(s)$ es una hélice general, entonces en cualquier punto de la curva o es $\kappa = 0$, o es $\tau/\kappa = \text{constante}$, de modo que $[\ddot{x} \ddot{x} x^{(4)}] = 0$. Recíprocamente, si $[\ddot{x} \ddot{x} x^{(4)}] = 0$ y si, además, no existen puntos de inflexión, de tal manera que sea $\kappa \neq 0$, entonces se puede concluir que $\tau/\kappa = \text{constante}$, y, por esta razón, $x = x(s)$ es una hélice general.

INDICATRICES ESFERICAS

4.23. Demostrar que la tangente a la indicatriz esférica de la tangente a la curva C es paralela a la normal principal de C en los puntos correspondientes.

Supongamos que $x_1 = t(s)$ representa la indicatriz esférica de la tangente a la curva $x = x(s)$. Pero, un vector tangente a $x_1 = t(s)$ es de la forma

$$\frac{dx_1}{ds} = \dot{t}(s) = \kappa(s) n(s)$$

que es el resultado esperado.

4.24. Demostrar que la curvatura de la indicatriz esférica $x_1 = t(s)$ de la tangente es $\kappa_1^2 = (\kappa^2 + \tau^2)/\kappa^2$.

De acuerdo con el teorema 4.2 de la página 67, se tiene que $|\kappa_1| = \frac{|\dot{t} \times \ddot{t}|}{|\dot{t}|^3} = \frac{|\ddot{x} \times \ddot{x}|}{|\kappa|^3}$. Y según el problema 4.18, será

$$|\kappa_1| = \frac{|\kappa^3 b + \tau \kappa^2 t|}{|\kappa|^3} = \frac{|\kappa b + \tau t|}{|\kappa|}$$

o sea,

$$\kappa_1^2 = \frac{|\kappa b + \tau t|^2}{\kappa^2} = \frac{(\kappa b + \tau t) \cdot (\kappa b + \tau t)}{\kappa^2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{\kappa^2}$$

4.25. Demostrar que la torsión de la indicatriz binormal $x_3 = b(s)$ de una curva suficientemente regular es $\tau_3 = \frac{\tau \kappa - \kappa \dot{\tau}}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)}$.

Utilizamos el teorema 4.5 de la página 74 para hallar a τ_3 . Sabiendo que $\dot{b} = -\tau n$, tendremos

$$\begin{aligned} -\ddot{b} &= \dot{\tau} n + \tau \dot{n} = \dot{\tau} n + \tau \frac{d}{ds} (b \times t) = \dot{\tau} n + \tau[(\dot{b} \times t) + (b \times \dot{t})] \\ &= \dot{\tau} n + \tau[-\tau(n \times t) + \kappa(b \times n)] = \dot{\tau} n + \tau^2 b - \kappa \tau t \end{aligned}$$

Entonces,

$$\dot{b} \times \ddot{b} = (\tau n) \times (\dot{\tau} n + \tau^2 b - \kappa \tau t) = \tau^3 (n \times b) - \tau^2 \kappa (n \times t) = \tau^3 t + \tau^2 \kappa b = \tau^2 (\tau t + \kappa b)$$

$$\begin{aligned} y \quad \ddot{b} \times \ddot{b} &= \frac{d}{ds} (\dot{b} \times \ddot{b}) = \frac{d}{ds} \tau^2 (\tau t + \kappa b) = 2\tau \dot{\tau} (\tau t + \kappa b) + \tau^2 (\dot{\tau} t + \dot{\kappa} b + \kappa \dot{b}) \\ &= 2\tau \dot{\tau} (\tau t + \kappa b) + \tau^2 (\dot{\tau} t + \dot{\kappa} b - \tau \kappa n) \\ &= 2\tau \dot{\tau} (\tau t + \kappa b) + \tau^2 (\dot{\tau} t + \dot{\kappa} b) = 3\tau^2 \dot{\tau} t + (2\tau \dot{\tau} \kappa + \tau^2 \dot{\kappa}) b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De este modo, } [\ddot{b} \ddot{b} \ddot{b}] &= -\ddot{b} \cdot (\dot{b} \times \ddot{b}) = (\dot{\tau} n + \tau^2 b - \kappa \tau t) \cdot [3\tau^2 \dot{\tau} t + (2\tau \dot{\tau} \kappa + \tau^2 \dot{\kappa}) b] \\ &= \tau^3 [-3\dot{\tau} \tau + 2\kappa \dot{\tau} + \tau \dot{\kappa}] = \tau^3 (\tau \dot{\kappa} - \kappa \dot{\tau}) \end{aligned}$$

$$y, \text{ finalmente, } \tau_3 = \frac{[\ddot{b} \ddot{b} \ddot{b}]}{|\dot{b} \times \ddot{b}|^2} = \frac{\tau^3 (\tau \dot{\kappa} - \kappa \dot{\tau})}{\tau^4 (\kappa^2 + \tau^2)} = \frac{\tau \dot{\kappa} - \kappa \dot{\tau}}{\tau(\kappa^2 + \tau^2)}$$

Problemas propuestos

4.26. Hallar la intersección del plano $x_1 x_2$ con el plano normal a la curva $x = (\cos t)e_1 + (\sin t)e_2 + te_3$ en el punto $t = \pi/2$. Resp. $x_1 = -\pi/2$, $x_2 = k$, $x_3 = 0$, $-\infty < k < \infty$

4.27. Hallar la intersección del plano $x_1 x_2$ con la recta tangente a la curva $x = (1+t)e_1 - t^2 e_2 + (1+t^3)e_3$ en $t = 1$. Resp. $(4/3, 1/3, 0)$

4.28. Demostrar que una curva es una línea recta si todas sus tangentes son paralelas entre sí.

4.29. Sea $\Delta\theta$ el ángulo que forman las tangentes unitarias $t(s + \Delta s)$ y $t(s)$, $\Delta s > 0$. Demostrar que

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\theta = 0.$$

4.30. Demostrar que a todo lo largo de una curva plana $x = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2$ la curvatura viene expresada por

$$|\kappa| = \frac{|x_1' x_2'' - x_2' x_1''|}{[(x_1')^2 + (x_2')^2]^{3/2}}$$

4.31. Demostrar que una curva es una línea recta si x' y x'' son linealmente dependientes para todos los valores de t .

4.32. Hallar la curvatura en cualquier punto de la curva $x = (t - \sin t)e_1 + (1 - \cos t)e_2 + te_3$. Resp. $|\kappa| = (1 + 4 \sin^4 t/2)^{1/2} / (1 + 4 \sin^2 t/2)^{3/2}$

4.33. Hallar la torsión en cualquier punto de la curva $x = (t - \sin t)e_1 + (1 - \cos t)e_2 + te_3$. Resp. $\tau = -1/(1 + 4 \sin^4 t/2)$

4.34. Demostrar que $\kappa \tau = |\dot{t} \cdot \dot{b}|$.

4.35. Demostrar que la curva $x = te_1 + \frac{1+t}{t}e_2 + \frac{1-t^2}{t}e_3$ está toda en un plano.

4.36. Hallar la función $f(t)$ más general posible tal que la curva descrita por $x = a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + f(t)e_3$ sea plana. Resp. $f(t) = A \sin t + B \cos t + C$, $A, B, C = \text{constante}$

- 4.37. Demostrar que los planos osculadores en tres puntos cualesquiera de la curva $\mathbf{x} = te_1 + \frac{1}{2}t^2e_2 + \frac{1}{6}t^3e_3$, se cortan en un punto que pertenece al plano determinado por esos tres puntos.
- 4.38. Demostrar que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una curva plana si y sólo si $[\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''] = 0$.
- 4.39. Demostrar el recíproco del teorema 4.4 de la página 74, a saber: Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una curva plana, entonces $\tau = 0$.
- 4.40. Demostrar que una curva es una hélice general sii la indicatriz tangente es una circunferencia.
- 4.41. Demostrar que la tangente a la indicatriz tangente de una curva C , es paralela a la tangente a la indicatriz binormal en los puntos correspondientes.
- 4.42. Demostrar que la curvatura a lo largo de la indicatriz binormal es $\kappa_3 = (\kappa^2 + \tau^2)^{1/2}$.
- 4.43. Demostrar que la torsión a todo lo largo de la indicatriz tangente es $\tau_1 = \frac{\tau\kappa - \kappa'\tau}{\kappa(\kappa^2 + \tau^2)}$.

Capítulo 5

Teoría de las curvas

FORMULAS DE FRENET

Teorema 5.1. En cualquier punto de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, los vectores \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} verifican las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{t}} &= \kappa\mathbf{n} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\tau\mathbf{n}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Estas igualdades se conocen con el nombre de fórmulas o ecuaciones de *Frenet-Serret* de la curva que se considere. Son fundamentales para el desarrollo de la teoría de las curvas y deberían aprenderse de memoria. Las ecuaciones primera y tercera ya han sido deducidas en (4.6) y (4.14), respectivamente. Para obtener la segunda basta hacer la derivada de la igualdad $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ y utilizar las ecuaciones primera y tercera. De este modo, se tiene

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{b}} \times \mathbf{t} + \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{t}} = -\tau(\mathbf{n} \times \mathbf{t}) + \mathbf{b} \times (\kappa\mathbf{n}) = (-\tau)(-\mathbf{b}) + \kappa(-\mathbf{t}) = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$$

Obsérvese que si escribimos las fórmulas de Frenet en la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{t}} &= 0\mathbf{t} + \kappa\mathbf{n} + 0\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{n}} &= -\kappa\mathbf{t} + 0\mathbf{n} + \tau\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} &= 0\mathbf{t} - \tau\mathbf{n} + 0\mathbf{b}\end{aligned}$$

entonces, los coeficientes de \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} forman la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

ECUACIONES INTRINSECAS

Como primera consecuencia de las fórmulas de Frenet, demostraremos que una curva se determina cabalmente mediante la curvatura y la torsión, consideradas como funciones de un parámetro natural. Es decir, demostraremos que si C y C^* son dos curvas del espacio tales que $\kappa(s) = \kappa^*(s)$ y $\tau(s) = \tau^*(s)$ para todos los valores de s , entonces C y C^* son las mismas, excepto en cuanto a su posición en el espacio. En efecto, si se dan dos de tales curvas, supongamos que la C^* se somete a una traslación tal que, para algún $s = s_0$, los puntos que se corresponden en C^* y C se hacen coincidir. Supongamos que, entonces, la curva C^* se hace girar alrededor de este punto de modo que en s_0 también coincidan las ternas $(\mathbf{t}_0^*, \mathbf{n}_0^*, \mathbf{b}_0^*)$ y $(\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0)$. Ahora, bien, derivando el producto $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^*$ y haciendo uso de las fórmulas de Frenet, se tendrá

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^*) = \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{t}}^* + \dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t}^* = \mathbf{t} \cdot \kappa^* \mathbf{n}^* + \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^* = \kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^*)$$

Además, $\frac{d}{ds}(n \cdot n^*) = n \cdot \dot{n}^* + \dot{n} \cdot n^* = n \cdot (-\kappa^* t^* + \tau^* b^*) + (-\kappa t + \tau b) \cdot n^*$
 $= -\kappa(n \cdot t^* + t \cdot n^*) + \tau(n \cdot b^* + b \cdot n^*)$

y $\frac{d}{ds}(b \cdot b^*) = b \cdot \dot{b}^* + \dot{b} \cdot b^* = b \cdot (-\tau^* n^*) + (-\tau n) \cdot b^* = -\tau(b \cdot n^* + n \cdot b^*)$

Sumando lo anterior, $\frac{d}{ds}(t \cdot t^* + n \cdot n^* + b \cdot b^*) = 0$

E integrando, $t \cdot t^* + n \cdot n^* + b \cdot b^* = \text{constante}$

Pero, en s_0 , $t_0 = t_0^*$, $n_0 = n_0^*$, $b_0 = b_0^*$; de modo que $t_0 \cdot t_0^* = n_0 \cdot n_0^* = b_0 \cdot b_0^* = 1$. De esta suerte, para s_0 y, por consiguiente, para cualquier valor de s , se tendrá

$$t \cdot t^* + n \cdot n^* + b \cdot b^* = 3 \quad \forall s$$

Ahora, bien, dos vectores unitarios, por ejemplo t y t^* , tienen la propiedad de que $-1 \leq t \cdot t^* = \cos \angle(t, t^*) \leq 1$. En consecuencia, si $t \cdot t^* + n \cdot n^* + b \cdot b^* = 3$, entonces

$$t \cdot t^* = 1, \quad n \cdot n^* = 1, \quad b \cdot b^* = 1$$

De este modo, para todos los valores de s , $t = t^*$, $n = n^*$ y $b = b^*$. Por último, como quiera que $t = dx/ds = t^* = dx^*/ds$, se deduce que $x(s) = x^*(s) + \text{constante}$. Pero, en s_0 , $x(s_0) = x^*(s_0)$; por tanto, $x(s) = x^*(s)$ para cualquier valor de s , es decir, que las curvas C y C^* coinciden. Lo anterior demuestra el

Teorema 5.2. Toda curva queda definida inequívocamente por su curvatura y su torsión, expresadas éstas como funciones de un parámetro natural.

Las ecuaciones $\kappa = \kappa(s)$, $\tau = \tau(s)$

que expresan la curvatura y la torsión de una curva como funciones de s , se denominan ecuaciones *naturales* o *intrínsecas* de una curva, pues ellas la determinan completamente.

Ejemplo 5.1.

(a) De acuerdo con el teorema 4.1 de la página 67 y el teorema 4.3 de la página 66, las ecuaciones intrínsecas de una recta son $\kappa = 0$ y $\tau = 0$.

(b) Las expresiones $\kappa = \text{constante} \neq 0$, $\tau = 0$ (véase el ejemplo 4.3 de la página 66), son las ecuaciones intrínsecas de una circunferencia de radio $\rho = 1/|\kappa|$.

(c) Las ecuaciones intrínsecas de una hélice circular (véanse los ejemplos 4.4 y 4.9) son $\kappa = \text{constante} \neq 0$, $\tau = \text{constante} \neq 0$.

Esta hélice se halla sobre un cilindro circular de radio $|\kappa|/(\kappa^2 + \tau^2)$ y su paso es igual a $2\pi|\tau|/(\kappa^2 + \tau^2)$. Si es $\tau > 0$, se trata de una hélice dextrógira y si es $\tau < 0$, de una hélice levógira.

EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Observemos que las ecuaciones de Frenet forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales vectoriales de primer orden en t , n y b . Por ello, es razonable preguntarse si, dadas dos funciones continuas arbitrarias κ y τ , existen o no las soluciones t , n , b de las ecuaciones de Frenet y, en consecuencia, por ser $\dot{x} = t$, si existe o no una curva

$$x = \int t ds + C$$

que tenga la curvatura y torsión previstas. La respuesta es afirmativa y viene dada por el

Teorema 5.3. Teorema fundamental de existencia y unicidad de curvas del espacio.

Sean $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ dos funciones continuas arbitrarias en el intervalo $a \leq s \leq b$. Entonces, descontada su posición en el espacio, existe una y sólo una curva espacial C cuya curvatura es $\kappa(s)$, su torsión es $\tau(s)$ y tiene a s como parámetro natural a todo lo largo de ella.

En el teorema 5.2 ya se demostró la unicidad de una curva dadas la torsión y la curvatura. En el apéndice 1 se da una demostración de la existencia de tal curva.

En general, las soluciones de las ecuaciones de Frenet no se pueden obtener por integración. Sin embargo, se puede aprovechar el método que consiste en reducir el sistema a una ecuación diferencial de primer orden, llamada ecuación de Ricatti, que se puede estudiar directamente. Los detalles de este asunto pueden hallarse en *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, de L.P. Eisenhart, Ginn y Co., 1909.

Empero, en el caso de una curva plana, es decir, si $\tau = 0$, es siempre posible lograr la integración de las ecuaciones de Frenet. En efecto, supongamos que ϕ designa el ángulo que forma t con el eje x_1 , como se muestra en la figura 5-1. Entonces,

$$t = (\cos \phi)e_1 + (\sin \phi)e_2 \quad (5.2)$$

Además, puesto que n es ortogonal a t , podemos escribir

$$n = (-\sin \phi)e_1 + (\cos \phi)e_2 \quad (5.3)$$

Por derivación, se tiene

$$\dot{t} = \dot{\phi}[-(\sin \phi)e_1 + (\cos \phi)e_2] = \dot{\phi}n$$

$$\text{y} \quad \dot{n} = -\dot{\phi}[(\cos \phi)e_1 + (\sin \phi)e_2] = -\dot{\phi}t$$

Pero, cuando $\tau = 0$, las ecuaciones de Frenet se reducen a las siguientes

$$\dot{t} = \kappa n, \quad \dot{n} = -\kappa t$$

De esta suerte, las t y n anteriores son soluciones si $\dot{\phi} = \kappa$, o sea, si

$$\phi = \int \kappa ds + C_1 \quad (5.4)$$

Una vez que se haya determinado ϕ , de la (5.2) deducimos que

$$x = \int t ds + C_2 = \int [(\cos \phi(s))e_1 + (\sin \phi(s))e_2] ds + C_2 \quad (5.5)$$

Obsérvese que un cambio de la constante de integración en (5.4) define una traslación en ϕ y, en consecuencia, un giro de la curva alrededor del origen. Y un cambio de la constante de integración en (5.5) define una traslación de la curva.

Obsérvese, además, que si $\kappa \neq 0$ para todos los valores de s , entonces $\dot{\phi} \neq 0$ para todos los valores de s . Esto nos permitirá introducir en (5.5) a $\phi = \phi(s)$ como parámetro y en esta forma obtener

$$x = \int ((\cos \phi)e_1 + (\sin \phi)e_2) \frac{ds}{d\phi} d\phi + C_2 = \int \frac{1}{\kappa(\phi)} ((\cos \phi)e_1 + (\sin \phi)e_2) d\phi + C_2 \quad (5.6)$$

Ejemplo 5.2.

Las ecuaciones $\kappa = 1/s$, $\tau = 0$, $s > 0$ son las ecuaciones intrínsecas de una espiral logarítmica. En efecto, hagamos $\phi = \kappa = 1/s$. Entonces, $\phi = \log s + C_1$ y $\kappa = 1/s = e^{-(\phi - C_1)}$. Y se concluye que

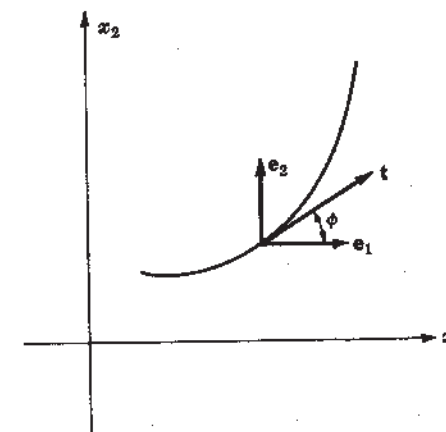


Fig. 5-1

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \int \frac{1}{\kappa(\phi)} ((\cos \phi) \mathbf{e}_1 + (\sin \phi) \mathbf{e}_2) d\phi + \mathbf{C}_2 = \int e^{(\phi-C_1)} ((\cos \phi) \mathbf{e}_1 + (\sin \phi) \mathbf{e}_2) d\phi + \mathbf{C}_2 \\ &= \frac{1}{2} e^{(\phi-C_1)} (\cos \phi + \sin \phi) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{(\phi-C_1)} (\sin \phi - \cos \phi) \mathbf{e}_2 + \mathbf{C}_2 \\ &= \frac{1}{2} e^{(\phi-C_1)} [\sqrt{2} (\cos(\phi - \pi/4)) \mathbf{e}_1 + \sqrt{2} (\sin(\phi - \pi/4)) \mathbf{e}_2] + \mathbf{C}_2 \end{aligned}$$

Si escogemos $C_1 = \pi/4$, $C_2 = 0$, y hacemos $\phi - \pi/4 = \theta$, se obtiene

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\theta} [(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta) \mathbf{e}_2] + \mathbf{C}_2$$

que, expresada en coordenadas polares, es la espiral logarítmica $r = (1/\sqrt{2})e^{\theta}$.

*Ver caso general de
espiral logarítmica
 $K = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tau = 0$
 $\Rightarrow \ln(r) = \theta$
(problema 5.28)*

REPRESENTACIÓN CANÓNICA DE UNA CURVA

Sea P un punto cualquiera de una curva C . Supongamos que la curva está colocada en forma que P coincida con el origen y que se escoge una base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ que coincide con $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ en P . Por último, supongamos que, en toda la extensión de C , se escoge un parámetro natural de tal modo que en P sea $s = 0$. Si se representa a C por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, entonces $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1$, y $\ddot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{t}}(0) = \kappa(0) \mathbf{n}(0) = \kappa_0 \mathbf{e}_2$. Además, como quiera que

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{ds} \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{ds} \kappa \mathbf{n} = \kappa \dot{\mathbf{n}} + \dot{\kappa} \mathbf{n} = \kappa(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) + \dot{\kappa} \mathbf{n} = -\kappa^2 \mathbf{t} + \dot{\kappa} \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b}$$

tenemos que:

$$\ddot{\mathbf{x}}(0) = -\kappa_0^2 \mathbf{e}_1 + \dot{\kappa}_0 \mathbf{e}_2 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{e}_3$$

Por último, puesto que C es de clase ≥ 3 , se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0)s + \frac{\ddot{\mathbf{x}}(0)}{2!}s^2 + \frac{\ddot{\mathbf{x}}(0)}{3!}s^3 + o(s^3) \\ &= \mathbf{e}_1 s + \kappa_0 \mathbf{e}_2 \frac{s^2}{2!} + (-\kappa_0^2 \mathbf{e}_1 + \dot{\kappa}_0 \mathbf{e}_2 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{e}_3) \frac{s^3}{3!} + o(s^3) \\ &= \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6} s^3\right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\kappa_0}{2} s^2 + \frac{\dot{\kappa}_0}{6} s^3\right) \mathbf{e}_2 + \frac{\kappa_0 \tau_0}{6} s^3 \mathbf{e}_3 + o(s^3) \end{aligned}$$

En función de las componentes de $\mathbf{x}(s)$ esto viene a ser

$$x_1 = s - \frac{1}{6} \kappa_0^2 s^3 + o(s^3), \quad x_2 = \frac{1}{2} \kappa_0 s^2 + \frac{1}{6} \dot{\kappa}_0 s^3 + o(s^3), \quad x_3 = \frac{1}{6} \kappa_0 \tau_0 s^3 + o(s^3)$$

Estas ecuaciones se denominan la *representación canónica* de C en P . Sus términos principales describen de modo conveniente el comportamiento de C en las vecindades de P .

Ejemplo 5.3.

Como se verá más adelante, en la representación canónica en un punto P , la proyección de \mathbf{x} sobre la tangente viene dada por el vector $x_1 \mathbf{e}_1$. Vemos que, por ser x_1 de primer orden en s , la mayor parte de una curva está sobre su tangente. La proyección de \mathbf{x} sobre la normal principal es la componente x_2 y es de segundo orden en s ; y la proyección sobre la binormal es de tercer orden en s . Obsérvese, además, que si $\kappa_0 \neq 0$, la curva se halla sobre una de las caras del plano rectificante, pues la componente x_2 , que se comporta como s^2 , no cambia de signo al pasar por P . Si, por añadidura, es $\tau_0 \neq 0$, la curva atraviesa el plano osculador en P , pues x_3 , que se comporta lo mismo que s^3 , cambia de signo al pasar por P . Si es $\tau_0 > 0$, como se ve en la figura 5-2(a), la terna $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ gira alrededor de P como un tornillo de rosca derecha. Si es $\tau_0 < 0$, entonces $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ gira alrededor de P al igual que un tornillo de rosca izquierda, como se muestra en la figura 5-2(b).

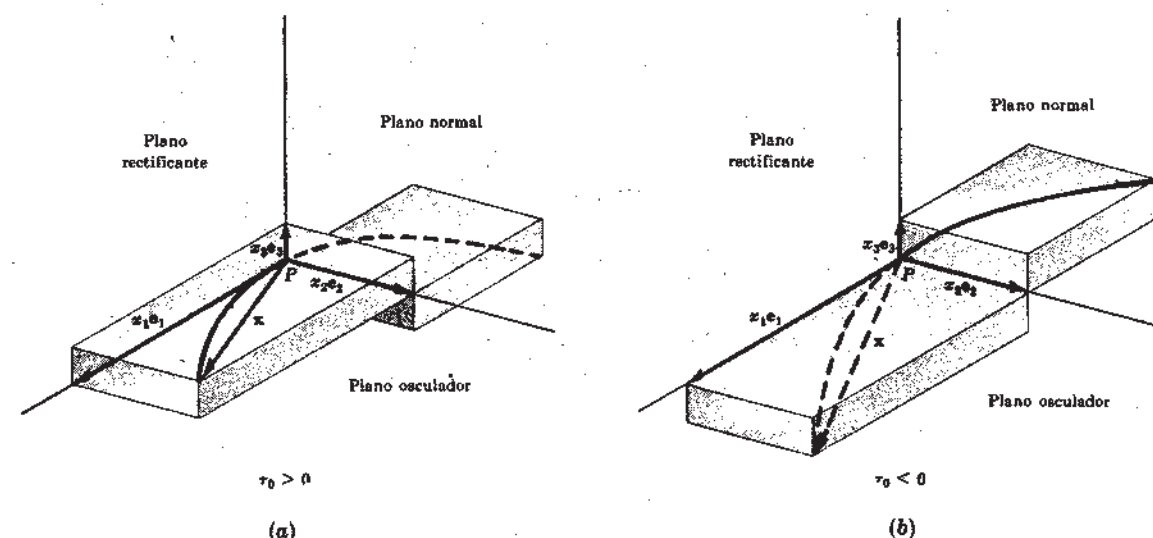


Fig. 5-2

Ejemplo 5.4.

Consideremos los términos principales de la representación canónica de una curva, a saber

$$x_1 = s, \quad x_2 = \frac{1}{2} \kappa_0 s^2, \quad x_3 = \frac{1}{6} \kappa_0 \tau_0 s^3$$

y supongamos que $\kappa_0 > 0$, $\tau_0 > 0$. Al eliminar s en las dos primeras ecuaciones, vemos que en las vecindades de un punto, la proyección de la curva sobre el plano osculador (plano $x_1 x_2$) es como la parábola $x_2 = \frac{1}{2} \kappa_0 x_1^2$, que se muestra en la figura 5-3(a). La proyección sobre el plano rectificante es semejante a la cúbica $x_3 = \frac{1}{6} \kappa_0 \tau_0 x_1^3$ que se muestra en la figura 5-3(b). La proyección sobre el plano normal es semejante a la curva $x_3^2 = \frac{1}{3} (\tau_0^2 / \kappa_0) x_2^3$ que se ve en la figura 5-3(c).

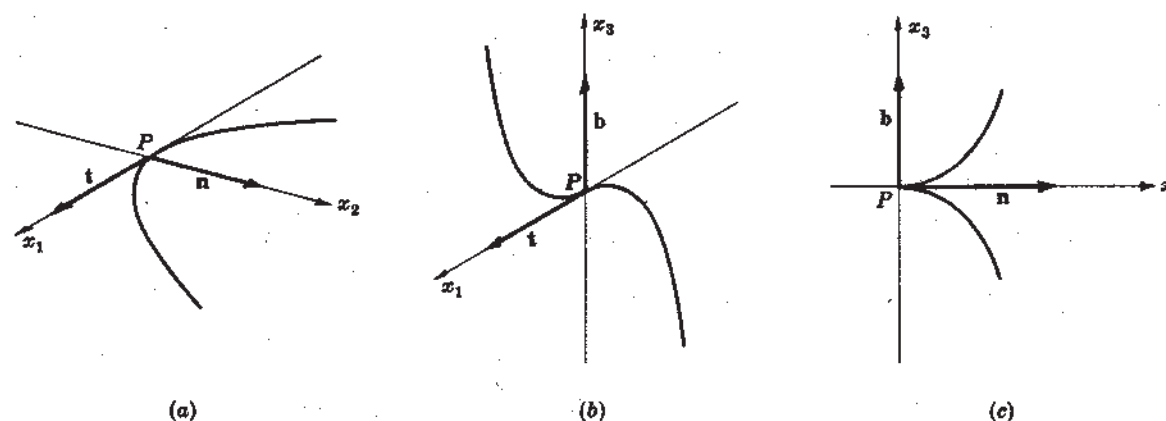


Fig. 5-3

INVOLUTAS

Las rectas tangentes a una curva C engendran una superficie que se denomina *superficie tangente* de C . Una curva C^* , que se conserve sobre la superficie tangente de C y que interseque las rectas tangentes ortogonalmente, recibe el nombre de *involuta* de C .

Si C viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ y si, como se ve en la figura 5-4, es \mathbf{x}^* un punto de la involuta C^* , y ésta atraviesa en $\mathbf{x}(s)$ a la recta tangente, entonces $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(s)$ es proporcional a $\mathbf{t}(s)$. De esta suerte, C^* tendrá una representación de la forma $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(s) + \lambda(s) \mathbf{t}(s)$. Además, el vector tangente a una involuta, o sea,

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \dot{\mathbf{x}} + \dot{\lambda} \mathbf{t} + \lambda \dot{\mathbf{t}} = (1 + \dot{\lambda}) \mathbf{t} + \lambda \kappa \mathbf{n}$$

es ortogonal a \mathbf{t} que es el vector tangente a C ; es decir,

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \cdot \mathbf{t} = (1 + \dot{\lambda})(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) + \lambda \kappa (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) = 1 + \dot{\lambda} = 0$$

Si integramos lo anterior, se tiene $\lambda = -s + c$, $c = \text{constante}$. Así, pues, existe una familia infinita de involutas, y hay una por cada valor de c , la $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + (c - s) \mathbf{t}$.

Obsérvese que \mathbf{x}^* no es regular allí donde \mathbf{x} tenga un punto de inflexión. En efecto,

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} + (c - s) \frac{d\mathbf{t}}{ds} - \mathbf{t} = (c - s) \dot{\mathbf{t}} = (c - s) \kappa \mathbf{n}$$

y, en consecuencia, $d\mathbf{x}^*/ds = 0$ donde sea $\kappa = 0$. Por este motivo, supondremos que a todo lo largo de C , $\kappa \neq 0$. De este hecho también se deduce que $\kappa^* \neq 0$ a todo lo largo de la involuta de C . En efecto, en el problema 5.15 de la página 103, demostraremos que la curvatura de la involuta cumple la condición

$$\kappa^{*2} = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c - s)^2 \kappa^2}$$

De modo que $\kappa^* \neq 0$ para $\kappa \neq 0$.

Cuando la tangente a la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en \mathbf{x} se da bajo la forma de $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + k\mathbf{t}$, $-\infty < k < \infty$, entonces

$$|d\mathbf{x}^*/dk| = |\mathbf{t}| = 1$$

Es decir, que k es un parámetro natural. Además, como $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ para $k = 0$, se deduce que $|k|$ es la distancia entre el punto \mathbf{x}^* de la tangente y el punto \mathbf{x} de C . Por tanto, la distancia entre las dos involutas $C_1^*: \mathbf{x}^* = \mathbf{x} + (c_1 - s) \mathbf{t}$ y $C_2^*: \mathbf{x}^* = \mathbf{x} + (c_2 - s) \mathbf{t}$ de C , permanece constante para todo valor de s , como se ve en la figura 5-5(a), y es igual a

$$|(c_1 - s) - (c_2 - s)| = |c_1 - c_2|$$

Por otra parte, de lo anterior también se deduce que una involuta se engendra al desenrollar una cuerda tensa que se hubiera enrollado a todo lo largo de C . En el caso especial de que, como se aprecia en la figura 5-5(b), la cuerda sea de longitud c_0 y, además, se escoja a lo largo de C un parámetro natural s tal que s sea la distancia medida desde el extremo fijo de la cuerda, entonces la curva que se engendre al desenrollar la cuerda será la involuta $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + (c_0 - s) \mathbf{t}$.

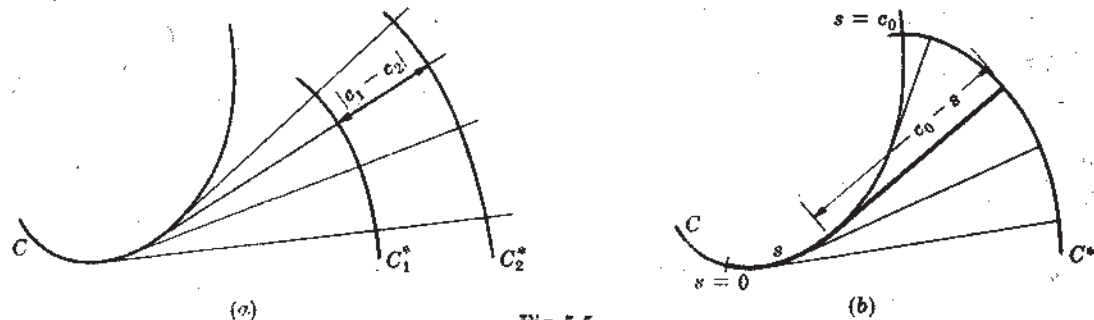


Fig. 5-5

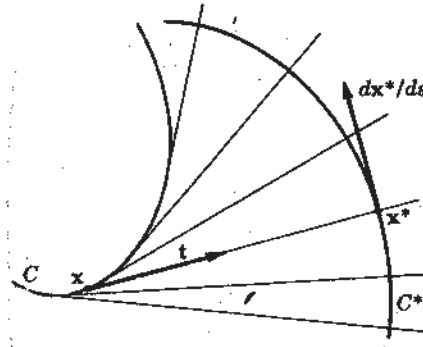


Fig. 5-4

Ejemplo 5.5.

A lo largo de la hélice descrita por $\mathbf{x} = a(\cos t)\mathbf{e}_1 + a(\sin t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3$, $a > 0$, tenemos que

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = -a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = (a^2 + b^2)^{-1/2} (-a(\sin t)\mathbf{e}_1 + a(\cos t)\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3)$$

Además, $s = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = (a^2 + b^2)^{1/2} t$. De esta suerte, las involutas son las curvas descritas por

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + (c - s) \mathbf{t} = [a \cos t - a(c - s)(a^2 + b^2)^{-1/2} \sin t] \mathbf{e}_1 + [a \sin t + a(c - s)(a^2 + b^2)^{-1/2} \cos t] \mathbf{e}_2 + [bt + (c - s)(a^2 + b^2)^{-1/2} b] \mathbf{e}_3$$

o sea, haciendo $\gamma = c(a^2 + b^2)^{-1/2}$ y utilizando $t = s(a^2 + b^2)^{-1/2}$, se tiene

$$\mathbf{x}^* = a[(\cos t + t \sin t) - \gamma \sin t] \mathbf{e}_1 + a[\sin t - t \cos t + \gamma \cos t] \mathbf{e}_2 + b\gamma \mathbf{e}_3$$

Obsérvese que, como se aprecia en la figura 5-6, la involuta es una curva plana, contenida en el plano $x_3 = b\gamma$.

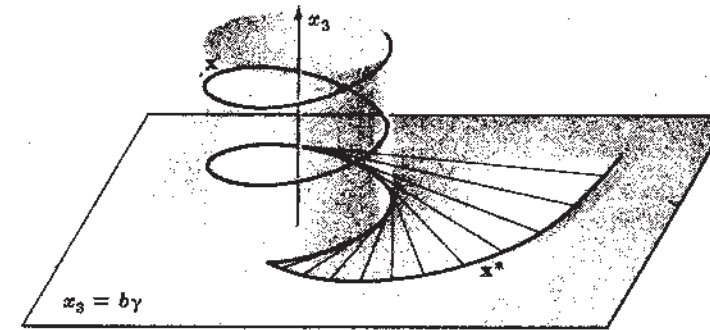


Fig. 5-6

EVOLUTAS

Si una curva C es una involuta de una curva C^* , entonces, por definición, C^* es una evoluta de C . Por tanto, dada una curva C , sus evolutas son las curvas cuyas tangentes cortan a C ortogonalmente. Si C viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ y si $\mathbf{x}^*(s)$ es el punto de la evoluta que sirve de contacto a la recta tangente que corta a C en $\mathbf{x}(s)$, entonces

$$\mathbf{x}^*(s) = \mathbf{x}(s) + \alpha(s) \mathbf{n}(s) + \beta(s) \mathbf{b}(s)$$

En efecto, como se muestra en la figura 5-7, $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(s)$ es ortogonal a $\mathbf{t}(s)$ y, de esta suerte, es una combinación lineal de $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$. Derivando la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} &= \dot{\mathbf{x}} + \dot{\alpha} \mathbf{n} + \alpha \dot{\mathbf{n}} + \dot{\beta} \mathbf{b} + \beta \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{t} + \dot{\alpha} \mathbf{n} + \alpha(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) + \dot{\beta} \mathbf{b} - \beta \tau \mathbf{n} \\ &= (1 - \alpha \kappa) \mathbf{t} + (\dot{\alpha} - \beta \tau) \mathbf{n} + (\dot{\beta} + \tau \alpha) \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ahora, bien, puesto que $d\mathbf{x}^*/ds$ es, además, tangente a C^* , será proporcional a $\mathbf{x}^* - \mathbf{x} = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{b}$. En consecuencia, existe un λ tal que

$$1 - \alpha \kappa = 0, \quad (\dot{\alpha} - \beta \tau) = \lambda \alpha, \quad \text{y} \quad (\dot{\beta} + \tau \alpha) = \lambda \beta$$

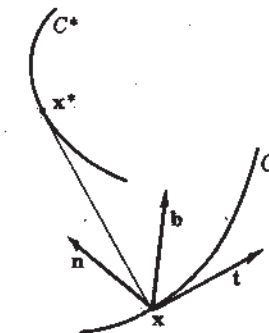


Fig. 5-7

De aquí se deduce que $\alpha = 1/\kappa$, y, eliminando a λ en las dos últimas ecuaciones,

$$\beta(\dot{\alpha} - \beta\tau) - \alpha(\dot{\beta} + \tau\alpha) = 0$$

$$\text{o sea, despejando a } \tau, \quad \tau = \frac{\beta\dot{\alpha} - \alpha\dot{\beta}}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{d}{ds} \cot^{-1} \frac{\beta}{\alpha}$$

Integrando se tiene: $\beta = \alpha \cot \left[\int \tau ds + c \right]$. Como $\alpha = 1/\kappa$, tenemos: $\beta = (1/\kappa) \cot \left[\int \tau ds + c \right]$.

De esta manera, tenemos una familia infinita de evolutas, y una por cada valor de c que se escoja:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} + \frac{1}{\kappa} \cot \left(\int \tau ds + c \right) \mathbf{b}$$

Obsérvese que debemos suponer que es $(\dot{\alpha} - \beta\tau)^2 + (\dot{\beta} + \tau\alpha)^2 \neq 0$ a todo lo largo de C . Haciendo la derivada de $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{b}$ se obtiene

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = (\dot{\alpha} - \beta\tau) \mathbf{n} + (\dot{\beta} + \tau\alpha) \mathbf{b}$$

de modo que C^* no es regular allí donde $(\dot{\alpha} - \beta\tau)^2 + (\dot{\beta} + \tau\alpha)^2 = 0$. En particular, si C es una curva plana, entonces $\tau = 0$, $\alpha = \gamma\beta$, $\gamma = \text{constante}$ y $(\dot{\alpha} - \beta\tau)^2 + (\dot{\beta} + \tau\alpha)^2 = (\dot{\gamma}\beta^2 + \gamma^2\dot{\beta}^2) = (\dot{\gamma}^2/\gamma^4)(1 + \gamma^2)$. De esta suerte, supondremos que, para el caso de curvas planas, es $\dot{\gamma} \neq 0$.

Ejemplo 5.6.

Si C es una curva plana, entonces es $\tau = 0$ y sus evolutas son

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} + \frac{\gamma}{\kappa} \mathbf{b}, \quad \gamma = \text{constante}$$

Cuando $\gamma = 0$ (Fig. 5.8), la evoluta se halla en el mismo plano que C , o sea en el plano osculador de C . En realidad, esta es la única de las evolutas de C que se halla en el mismo plano que ella y se denomina la *evoluta plana* de C . Se observa, además, por ser $\mathbf{b} = \text{constante}$, las restantes evolutas se hallan sobre la superficie cilíndrica cuyas generatrices son rectas perpendiculares al plano de C que pasan por los puntos de la evoluta plana de C .

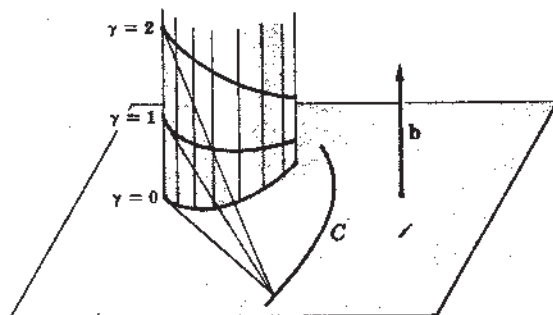


Fig. 5-8

TEORIA DEL CONTACTO

Intuitivamente, parece que los planos que cortan a una curva C en un punto \mathbf{x} y que, además, contienen la tangente a la curva en \mathbf{x} , tengan con ella en dicho punto un grado de "contacto" mayor que los planos que no contienen la tangente. Además, de todos los planos que contienen la tangente en \mathbf{x} , parece que el de mayor contacto sea el plano osculador.

A fin de analizar hasta qué grado puede una curva C hacer contacto con una superficie en general, supongamos que: (1) C es de clase suficientemente alta y viene dada por la ecuación $\mathbf{x} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$; (2) que se designa por $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ a una superficie S , y (3) C y S se cortan no sólo en un único punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ sino, además, en otros $n - 1$ puntos $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{x}(t_{n-1})$, pertenecientes a un entorno de \mathbf{x}_0 . Consideremos ahora la siguiente función

$$f(t) = F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

Es evidente que

$$\begin{aligned} f(t_0) &= F(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)) = 0 \\ f(t_1) &= F(x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots f(t_{n-1}) = F(x_1(t_{n-1}), x_2(t_{n-1}), x_3(t_{n-1})) = 0$$

puesto que C y S se cortan en $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$. De acuerdo con el teorema de Rolle, existirán valores $t'_1, t'_2, \dots, t'_{n-1}$, que cumplen la condición de ser

$$t_0 \leq t'_1 \leq t_1, \quad t_1 \leq t'_2 \leq t_2, \quad \dots, \quad t_{n-2} \leq t'_{n-1} \leq t_{n-1}$$

tales que

$$f'(t'_1) = f'(t'_2) = \dots = f'(t'_{n-1}) = 0$$

Pero, entonces, de acuerdo nuevamente con el teorema de Rolle, existirán valores $t''_2, t''_3, \dots, t''_{n-1}$, con la condición de ser

$$t'_1 \leq t''_2 \leq t'_2, \quad t'_2 \leq t''_3 \leq t'_3, \quad \dots, \quad t'_{n-2} \leq t''_{n-1} \leq t'_{n-1}$$

tales que

$$f''(t''_2) = f''(t''_3) = \dots = f''(t''_{n-1}) = 0$$

Prosiguiendo en esta forma, encontramos que existen números $t_0, t'_1, t''_2, \dots, t^{(n-1)}_{n-1}$, todos ellos interiores a un entorno de t_0 , tales que

$$f(t_0) = f'(t'_1) = f''(t''_2) = \dots = f^{(n-1)}(t^{(n-1)}_{n-1}) = 0$$

Supongamos, ahora, que se considera el límite cuando $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ tiendan a \mathbf{x}_0 . Es decir, supongamos que, cuando $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ se aproximen a \mathbf{x}_0 , S es la posición límite de una familia de superficies que cortan a C en \mathbf{x}_0 y en $n - 1$ puntos interiores a un entorno de \mathbf{x}_0 . Cuando los $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$ se aproximen a \mathbf{x}_0 , los números $t'_1, t'_2, \dots, t'_{n-1}$ se aproximarán a t_0 , y, por tanto, en el límite será

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0$$

De este modo, llegamos a la siguiente definición

Se dice que una curva $\mathbf{x} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$ tiene un *contacto de orden n* con la superficie $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, en el punto correspondiente a $t = t_0$, si la función

$$f(t) = F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

satisface a $f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0$, pero, $f^{(n)}(t_0) \neq 0$

Observemos que la anterior definición es independiente de la expresión paramétrica de la curva. Pues, supongamos que

$$\mathbf{x} = x_1^*(\theta)\mathbf{e}_1 + x_2^*(\theta)\mathbf{e}_2 + x_3^*(\theta)\mathbf{e}_3$$

es otra representación de la curva. Entonces,

$$x_i^*(\theta) = x_i(t(\theta)), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\text{y} \quad g(\theta) = F(x_1^*(\theta), x_2^*(\theta), x_3^*(\theta)) = F(x_1(t(\theta)), x_2(t(\theta)), x_3(t(\theta))) = f(t(\theta))$$

$$g'(\theta) = t' f'(t(\theta))$$

$$g''(\theta) = (t')^2 f''(t(\theta)) + t'' f'(t(\theta))$$

En general, $g^{(i)}(\theta)$ será una combinación lineal de $f^{(i)}(t(\theta))$ y de las derivadas de orden inferior al de ésta. A saber

$$g^{(i)}(\theta) = (t')^i f^{(i)}(t(\theta)) + C_1 f^{(i-1)}(t(\theta)) + \dots + t^{(i)} f'(t(\theta))$$

Pero, si $f^{(i)}(t_0) = f^{(i)}(t_0) = 0, i = 1, \dots, n - 1$, y $f^{(n)}(t_0) = f^{(n)}(t_0) \neq 0$, entonces $g^{(i)}(\theta_0) = 0, i = 1, \dots, n - 1$, y, puesto que $t'(\theta_0) \neq 0$, entonces $g^{(n)}(\theta_0) \neq 0$, que era lo que se buscaba.



Ejemplo 5.7.

La ecuación de un plano arbitrario, que tiene una normal unitaria \mathbf{N} y que pasa por el punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0)$ de una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, es: $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$. Consideremos ahora la función

$$f(s) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N}$$

y sus derivadas:

$$f'(s) = \dot{\mathbf{x}}(s) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{N}$$

$$f''(s) = \dot{\mathbf{t}}(s) \cdot \mathbf{N} = \kappa(s) \mathbf{n}(s) \cdot \mathbf{N}$$

Es evidente que $f(s_0) = (\mathbf{x}(s_0) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$. Ahora bien,

$$f'(s_0) = \mathbf{t}(s_0) \cdot \mathbf{N} = 0$$

si y sólo si \mathbf{N} es ortogonal a $\mathbf{t}(s_0)$, que es la tangente unitaria en \mathbf{x}_0 . De esta manera, un plano tiene con una curva, un contacto de segundo orden al menos, si contiene la recta tangente. Tenemos, además, que si $\kappa(s_0) \neq 0$, entonces

$$f''(s_0) = \kappa(s_0) \mathbf{n}(s_0) \cdot \mathbf{N} = 0$$

sí \mathbf{N} es ortogonal a $\mathbf{n}(s_0)$, o sea, a la normal principal en \mathbf{x}_0 . De este modo si $\kappa(s_0) \neq 0$, el plano tiene con la curva al menos un contacto de tercer orden, si \mathbf{N} es ortogonal a $\mathbf{t}(s_0)$ y $\mathbf{n}(s_0)$, es decir, si el plano es el plano osculador $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}(s_0) = 0$ en \mathbf{x}_0 . Observemos, además, que en un punto de inflexión, vale decir, un punto en donde $\kappa(s_0) = 0$, todos los planos que contienen la recta tangente tienen con la curva al menos un contacto de tercer orden.

El orden del contacto entre dos curvas del espacio se define en forma parecida. A saber: Sea C una curva de clase suficientemente alta, dada por la ecuación

$$\mathbf{x} = x_1(t) \mathbf{e}_1 + x_2(t) \mathbf{e}_2 + x_3(t) \mathbf{e}_3$$

y sea, además, Γ una curva que se da como la intersección de las dos superficies

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Entonces, C tiene con Γ un *contacto de orden n* en el punto que corresponde a $t = t_0$ si las funciones

$$f(t) \equiv F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

$$g(t) \equiv G(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

verifican a

$$f(t_0) = f'(t_0) = f''(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0$$

$$g(t_0) = g'(t_0) = g''(t_0) = \dots = g^{(n-1)}(t_0) = 0$$

pero, o es $f^{(n)}(t_0) \neq 0$, o $g^{(n)}(t_0) \neq 0$. De acuerdo con esto, C tiene con Γ un contacto de orden n si C tiene un contacto de orden n con una de las superficies que definen a Γ y, por lo menos, un contacto de orden n con las otras.

Ejemplo 5.8.

Se quiere determinar una circunferencia Γ que tenga al menos un contacto de tercer orden con una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en un punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(s_0)$. Las anotaciones anteriores sugieren que se defina Γ como la intersección de una esfera (que tenga, por lo menos, un contacto de tercer orden con $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en \mathbf{x}_0) con un plano (que tenga, al menos, un contacto de tercer orden con $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en \mathbf{x}_0). Ahora, bien, la ecuación de una esfera arbitraria que tiene su centro en \mathbf{y}_0 y pasa por \mathbf{x}_0 es

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0|^2 = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2$$

Consideremos ahora las funciones

$$f(s) = |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0|^2 - |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2 = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) - |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2$$

$$f'(s) = 2(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) \cdot \dot{\mathbf{x}}(s) = 2(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{t}(s)$$

$$f''(s) = 2(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) \cdot \dot{\mathbf{t}}(s) + 2\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 2\kappa(s)(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{n}(s) + 2$$

Es evidente que $f(s_0) = 0$. Ahora, bien, $f'(s_0) = 2(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{t}_0 = 0$ si $(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_0 = 0$. En otros términos: una esfera tiene al menos un contacto de segundo orden si, como se ve en la figura 5-9, su centro se mantiene sobre el plano normal. Prosiguiendo en esta forma, $(f''(s_0) = 2\kappa_0(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{n}_0 + 2 = 0$ si $\kappa_0(\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = 1$. Así, pues, una esfera tiene al menos un contacto de tercer orden si su centro se halla sobre el plano normal y la proyección del vector $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0$ sobre \mathbf{n}_0 es igual a $1/\kappa_0$. Adviértase que en un punto de inflexión, es decir, en donde $\kappa_0 = 0$ no existe una esfera que tenga al menos un contacto de tercer orden. Por último, la intersección de una esfera como la que consideramos con el plano osculador en \mathbf{x}_0 (que, por ser $\kappa_0 \neq 0$, es el único plano que tenga al menos un contacto de tercer orden en \mathbf{x}_0) será un círculo Γ que tenga al menos un contacto de tercer orden en \mathbf{x}_0 . Obsérvese que ese círculo es único, porque, aunque exista un número infinito de esferas que tengan al menos un contacto de tercer orden en \mathbf{x}_0 , los vectores $\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0$ están todos sobre el plano normal y tienen una proyección constante $1/\kappa_0$ sobre \mathbf{n}_0 .

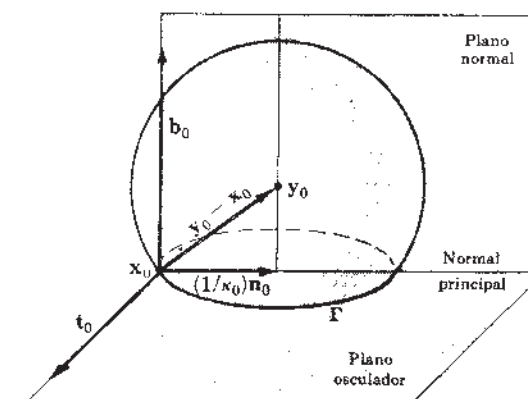


Fig. 5-9

El círculo determinado en el ejemplo precedente, que tiene al menos un contacto de tercer orden con una curva C en \mathbf{x} , recibe el nombre de *círculo osculador* de C en \mathbf{x} . Se encuentra totalmente sobre el plano osculador; su centro es un punto de la normal principal, situado del mismo lado que el vector curvatura de C en \mathbf{x} , y su radio es igual al radio de curvatura $\rho = 1/|\kappa|$ en \mathbf{x} . El centro del círculo osculador se denomina *centro de curvatura* y su posición se determina mediante la expresión $\mathbf{y} = \mathbf{x} + (1/\kappa)\mathbf{n}$.

CURVAS Y SUPERFICIES OSCULATRICES

Recordemos que, de todos los planos que cortan a una curva en un punto, el que tiene contacto de mayor orden es el plano osculador. En general, dada una familia de superficies S_λ que corten a una curva C en un punto \mathbf{x} , cualquier miembro S_0 de S_λ recibe el nombre de *superficie osculatriz de la familia S_λ de la curva C* , si el orden de contacto de C con S_0 en \mathbf{x} es mayor o igual que el orden de contacto de C con cualquier otra de las superficies S_λ . Análogamente, cualquier miembro Γ_0 de una familia de curvas Γ_λ que corte a C en \mathbf{x} se denomina *curva osculatriz de la familia Γ_λ de C* , si el orden de contacto de C con Γ_0 en \mathbf{x} es mayor o igual que el orden de contacto de C con cualquier otra de las curvas Γ_λ .

A fin de poder estudiar con mayores detalles lo relativo a superficies osculatrices, supongamos que C es de clase suficientemente alta y que viene dada por la ecuación $\mathbf{x} = x_1(t)\mathbf{e}_1 + x_2(t)\mathbf{e}_2 + x_3(t)\mathbf{e}_3$, y que S_λ es una familia de superficies de $n - 1$ parámetros, dada por la expresión

$$F(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = 0$$

Supongamos, además, que C y S_λ se cortan en el punto que corresponde a $t = t_0$. Consideremos de nuevo la función

$$f(t, a_1, \dots, a_{n-1}) = F(x_1(t), x_2(t), x_3(t), a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

Es evidente que $f(t_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$, pues se supone que la familia de superficies intersecta a C en $\mathbf{x}(t_0)$. Consideremos, ahora, las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f(t_0, a_1, \dots, a_{n-1}) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t_0, a_1, \dots, a_{n-1}) &= 0 \\ \frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}} f(t_0, a_1, \dots, a_{n-1}) &= 0\end{aligned}$$

Este es un sistema de $n - 1$ ecuaciones con las $n - 1$ incógnitas a_1, \dots, a_{n-1} . En principio, existirá una solución $a_1 = \alpha_1, a_2 = \alpha_2, \dots, a_{n-1} = \alpha_{n-1}$ y en ese caso es evidente que la superficie $f(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = 0$ tendrá, un contacto de orden n (por lo menos) con C en x . Pero, la superficie oscultriz de la familia tiene contacto con C en x de orden mayor o igual que el orden del contacto de cualquier otro miembro de la familia. Parecida argumentación vale para el caso de las curvas. De esta suerte, en términos generales, la superficie (curva) oscultriz de una familia de superficies (curvas) de $n - 1$ parámetros que intersecta a una curva C en un punto x , tiene con C en x un contacto de orden n , por lo menos.

Ejemplo 5.9.

La familia de todos los planos que pasan por el punto que corresponde a $x_0 = x(s_0)$ de la curva $x = x(s)$, es una familia de superficies de 2 parámetros, definida por $(x - x_0) \cdot N = 0$. (Las tres componentes de N están relacionadas por la ecuación $|N| = 1$.) Si es $\kappa_0 \neq 0$, el plano osculador en x_0 es el único plano osculador de la familia. Tal como se demostró en el ejemplo 5.7, éste tiene con la curva en x_0 un contacto de tercer orden, al menos, y cualquier otro plano en este caso tiene en x_0 , un contacto de orden menor que 3.

Ejemplo 5.10.

La familia de todas las esferas que pasan por el punto x_0 de la curva $x = x(s)$ es una familia de esferas de tres parámetros (que son las componentes del centro y_0), representada por

$$|x - y_0|^2 = |x_0 - y_0|^2$$

Si suponemos que κ_0 y τ_0 son diferentes de cero, la esfera oscultriz de esta familia será única y tiene con la curva en x_0 un contacto de cuarto orden, por lo menos. El centro y el radio de esta esfera se determinan del siguiente modo: Consideremos las funciones

$$\begin{aligned}f(s) &= |x(s) - y_0|^2 - |x_0 - y_0|^2 = (x(s) - y_0) \cdot (x(s) - y_0) - |x_0 - y_0|^2 \\ f'(s) &= 2(x(s) - y_0) \cdot \dot{x}(s) = 2(x(s) - y_0) \cdot t(s) \\ f''(s) &= 2(x(s) - y_0) \cdot \ddot{x}(s) + 2t(s) \cdot t(s) = 2\kappa(s)(x(s) - y_0) \cdot n(s) + 2 \\ f'''(s) &= 2\dot{\kappa}(s)(x(s) - y_0) \cdot n(s) + 2\kappa(s)t(s) \cdot n(s) + 2\kappa(s)(x(s) - y_0) \cdot \dot{n}(s) \\ &= 2\dot{\kappa}(s)(x(s) - y_0) \cdot n(s) + 2\kappa(s)(x(s) - y_0) \cdot [-\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s)] \\ &= 2\dot{\kappa}(s)(x(s) - y_0) \cdot n(s) - 2\kappa^2(s)(x(s) - y_0) \cdot t(s) + 2\kappa(s)\tau(s)(x(s) - y_0) \cdot b(s)\end{aligned}$$

Es evidente que $f(s_0) = 0$. Además, $f'(s_0) = 0$ sii $(y_0 - x_0) \cdot t_0 = 0$, y $f''(s_0) = 0$ sii $(y_0 - x_0) \cdot n_0 = 1/\kappa_0$. Por último, utilizando simultáneamente estas dos condiciones, tendremos, por añadidura, que $f'''(s_0) = 0$ sii

$$-2\dot{\kappa}_0/\kappa_0 - 2\kappa_0\tau_0(y_0 - x_0) \cdot b_0 = 0$$

$$\text{o sea, } (y_0 - x_0) \cdot b_0 = -\dot{\kappa}_0/\kappa_0^2\tau_0$$

Así, pues, tal como lo muestra la figura 5-10, si $\kappa_0 \neq 0$ y $\tau_0 \neq 0$, existe una esfera oscultriz única que tenga con la curva un contacto de cuarto orden, por lo menos. El centro, y_0 , de esa esfera, es tal que las componentes del vector $y_0 - x_0$ respecto de los vectores t_0, n_0, b_0 son $0, 1/\kappa_0, -\dot{\kappa}_0/\kappa_0^2\tau_0$ respectivamente. Evidentemente, el radio de esta esfera es

$$|y_0 - x_0| = \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}_0}{\kappa_0^2\tau_0}\right)^2}$$

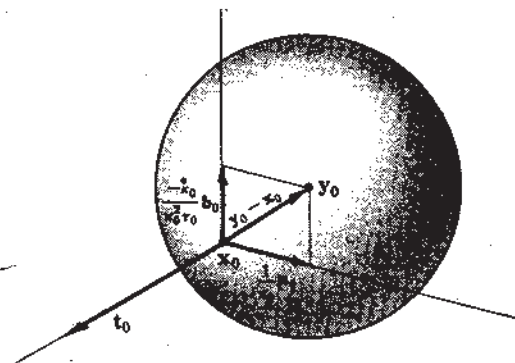


Fig. 5-10

La esfera que hemos determinado en el ejemplo anterior recibe el nombre de *esfera oscultriz de C en x* . El centro de la esfera se denomina *centro de curvatura esférica* y su posición se determina mediante la expresión

$$y = x + \frac{1}{\kappa}n - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}b$$

En ocasiones, conviene introducir el concepto de *radio de torsión*, $\sigma = 1/\tau$. En función de σ y del radio de curvatura $\rho = 1/\kappa$, para $\kappa > 0$, la expresión anterior toma la forma

$$y = x + \rho n + \dot{\rho}\sigma b$$

Por último, supongamos nuevamente que $F(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = 0$ es una familia de superficies de $n - 1$ parámetros que corta a una curva $x(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3$ en el punto correspondiente a $t = t_0$. Obsérvese que, en principio, se puede hacer que una familia de $n - 1$ parámetros cumpla $n - 1$ condiciones; de modo que, en general, es posible hallar un miembro de la familia que, por añadidura, corte la curva en $n - 1$ puntos correspondientes, por ejemplo, a los valores t_1, \dots, t_{n-1} en un entorno de t_0 . Consideremos, ahora, el límite cuando los t_1, \dots, t_{n-1} se aproximan a t_0 . Si existe una superficie límite S y se expresa en la forma $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, entonces, mediante una argumentación parecida a la de la página 92, se deduce que la función

$$f(t) = F(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

cumple la condición $f(t_0) = f'(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0$

Es decir, la superficie límite S tiene con la curva en t_0 un contacto de orden n , por lo menos. En el caso de una familia de curvas de $n - 1$ parámetros tiene validez una argumentación semejante. Así, pues, en general, si la superficie (curva) oscultriz de una familia de superficies (curvas) de $n - 1$ parámetros es única y tiene un contacto de orden n con C en x , entonces ella es el límite de las superficies (curvas) de la familia que pasan por $n - 1$ puntos de C , vecinos, cuando éstos se aproximen a x .

Ejemplo 5.11.

La circunferencia oscultriz de una curva C en un punto x es el límite de las circunferencias que pasan por x y por dos puntos de C , vecinos entre sí, cuando éstos se aproximen a x . Análogamente, la esfera oscultriz es el límite de las esferas que pasan por x y por tres puntos de C , vecinos entre sí, cuando éstos se aproximen a x .

Problemas resueltos

ECUACIONES INTRINSECAS. TEOREMA FUNDAMENTAL

5.1. Determinar las ecuaciones intrínsecas de la catenaria dada por la siguiente ecuación

$$x = a(\cosh(t/a))e_1 + te_2, \quad a = \text{constante}$$

Como esta es una curva plana, entonces es $\tau = 0$. Sólo falta hallar κ como función de s . Hagamos los siguientes cálculos

$$x' = \sinh(t/a)e_1 + e_2, \quad |x'| = [\sinh^2(t/a) + 1]^{1/2} = \cosh(t/a)$$

$$x'' = (1/a)(\cosh(t/a))e_1, \quad x' \times x'' = -(1/a)(\cosh(t/a))e_3$$

Según el teorema 4.2, de la página 67, es

$$\kappa^2 = \frac{(x' \times x'') \cdot (x' \times x'')}{(x' \cdot x')^3} = \frac{(1/a^2) \cosh^2(t/a)}{(\cosh^2(t/a))^3} = \frac{1}{a^2 \cosh^4(t/a)}$$

Además,

$$s = \int_0^t |x'| dt = \int_0^t \cosh(t/a) dt = a \sinh(t/a)$$

Por consiguiente

$$s^2 + a^2 = a^2 \sinh^2(t/a) + a^2 = a^2 \cosh^2(t/a)$$

Y, por eliminación de t , se tiene $\kappa = a/(s^2 + a^2)$, que es el resultado requerido.

5.2. Determinar las ecuaciones intrínsecas de la siguiente epicicloide

$$\mathbf{x}' = \left[(r_0 + r_1) \cos \theta - r_1 \cos \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right] \mathbf{e}_1 + \left[(r_0 + r_1) \sin \theta - r_1 \sin \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right] \mathbf{e}_2$$

Calculemos lo siguiente

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \left[-(r_0 + r_1) \sin \theta + (r_0 + r_1) \sin \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right] \mathbf{e}_1 + \left[(r_0 + r_1) \cos \theta - (r_0 + r_1) \cos \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right] \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}'' = \frac{d\mathbf{x}'}{d\theta} = \left[-(r_0 + r_1) \cos \theta + \frac{(r_0 + r_1)^2}{r_1} \cos \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right] \mathbf{e}_1 + \left[-(r_0 + r_1) \sin \theta + \frac{(r_0 + r_1)^2}{r_1} \sin \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right] \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = \frac{(r_0 + r_1)^2 (r_0 + 2r_1)}{r_1} \left[1 - \left(\sin \theta \sin \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) + \cos \theta \cos \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right) \right] \mathbf{e}_3$$

$$= \frac{(r_0 + r_1)^2 (r_0 + 2r_1)}{r_1} [1 - \cos(r_0/r_1)\theta] \mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \cdot (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') = \frac{(r_0 + r_1)^4 (r_0 + 2r_1)^2}{r_1^2} [1 - \cos(r_0/r_1)\theta]^2$$

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = 2(r_0 + r_1)^2 \left[1 - \left(\sin \theta \sin \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) + \cos \theta \cos \left(\frac{r_0 + r_1}{r_1} \theta \right) \right) \right]$$

$$= 2(r_0 + r_1)^2 [1 - \cos(r_0/r_1)\theta]$$

$$\kappa^2 = \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \cdot (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')}{(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}')^3} = \frac{(r_0 + 2r_1)^2}{8r_1^2 (r_0 + r_1)^2 [1 - \cos(r_0/r_1)\theta]}$$

$$= \frac{(r_0 + 2r_1)^2}{16r_1^2 (r_0 + r_1)^2 \sin^2(r_0/2r_1)\theta}$$

Además, $s = \int_{\pi/2}^{\theta} \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} \right| d\theta = \frac{4r_1(r_0 + r_1)}{r_0} \cos(r_0/2r_1)\theta$, $s^2 = \frac{16r_1^2(r_0 + r_1)^2}{r_0^2} \cos^2(r_0/2r_1)\theta$

Al eliminar θ en las ecuaciones para κ^2 y s^2 , se tiene

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{1}{\kappa^2 B^2} = 1, \text{ o sea, } \frac{s^2}{A^2} + \frac{\rho^2}{B^2} = 1$$

en donde $A = \frac{4r_1(r_0 + r_1)}{r_0}$ y $B = \frac{4r_1(r_0 + r_1)}{r_0 + 2r_1}$, que era el resultado que se buscaba. Obsérvese que $A > B$. En el caso de una hipocicloide, es $B > A$ (véase el problema 3.28 de la página 62).

5.3. Determinar la curva cuyas ecuaciones intrínsecas son

$$\kappa = (1/2as)^{1/2}, \quad \tau = 0, \quad a > 0, \quad s > 0$$

Escribamos $\phi = \kappa = (1/2as)^{1/2}$. Integrando se tiene $\phi = (2s/a)^{1/2}$ o sea $s = a\phi^2/2$, de modo que $\kappa = 1/a\phi$. De la ecuación (5.6) se deduce que la curva es

$$\mathbf{x} = a \int \phi[(\cos \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \phi)\mathbf{e}_2] d\phi = a(\cos \phi + \phi \sin \phi)\mathbf{e}_1 + a(\sin \phi - \phi \cos \phi)\mathbf{e}_2$$

5.4. Demostrar que la curva cuyas ecuaciones intrínsecas son $\kappa = \sqrt{2}/(s^2 + 4)$, $\tau = \sqrt{2}/(s^2 + 4)$, es una hélice general sobre un cilindro cuya sección transversal es una catenaria.

Según el problema 4.21 de la página 81, la curva es una hélice general, pues $\kappa/\tau = 1 = \text{constante}$. Supongamos ahora que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una representación natural de la hélice, el vector unitario

\mathbf{u} , su eje y $\alpha = \angle(\mathbf{t}, \mathbf{u})$. Además, según el problema 4.21 es $\kappa/\tau = \tan \alpha$; de modo que $\alpha = \pi/4$. Para hallar las ecuaciones intrínsecas de la proyección $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(s) - (\mathbf{x}(s) \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$ sobre el plano que pasa por el origen y es perpendicular a \mathbf{u} , como se ve en la figura 5-11, hacemos los siguientes cálculos

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \mathbf{t} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{t} - (\cos \alpha)\mathbf{u} = \mathbf{t} - \mathbf{u}/\sqrt{2}$$

$$\left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = [(1 - \mathbf{u}/\sqrt{2}) \cdot (1 - \mathbf{u}/\sqrt{2})]^{1/2} = 1/\sqrt{2}$$

A todo lo largo de la proyección se puede escoger como parámetro natural a

$$s^* = \int_0^s \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| ds = s/\sqrt{2}$$

De acuerdo con el problema 4.6 de la página 76, se tiene

$$\kappa^* = \kappa/\sin^2 \alpha = 2\sqrt{2}/(s^2 + 4)$$

Por tanto, $\kappa^* = \sqrt{2}/(s^{*2} + 2)$ es la ecuación intrínseca de la proyección. Según el problema 5.1, la proyección es una catenaria.

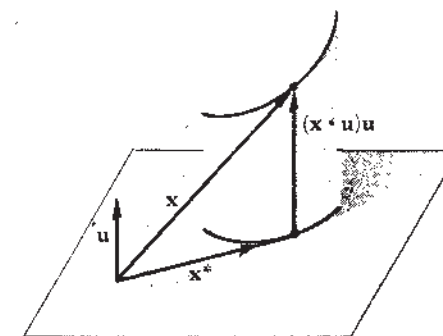


Fig. 5-11

5.5. Demostrar que, en el caso de una curva situada sobre una esfera de radio a y tal que la torsión τ nunca sea 0, se cumple la siguiente ecuación

$$\left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \right)^2 = a^2$$

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ está situada sobre la esfera de centro en \mathbf{y}_0 y radio a . Entonces, para todo valor de s , se tiene

$$(\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}_0) = a^2$$

Derivando se tiene $2(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$, o sea, $(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{t} = 0$

Y derivando de nuevo

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t} = 0, \text{ o sea, } \kappa(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{n} + 1 = 0$$

Obsérvese que de esto se desprende que $\kappa \neq 0$ y $(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{n} = -1/\kappa$. Por último, derivando de nuevo, obtendremos

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \dot{\mathbf{n}} = \dot{\kappa}/\kappa^2, \text{ o sea, } (\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) = \dot{\kappa}/\kappa^2$$

Utilizando la expresión $(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{t} = 0$, y suponiendo que $\tau \neq 0$, tendremos que $(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{b} = \dot{\kappa}/\kappa^2 \tau$. De esta suerte, las componentes de $\mathbf{x} - \mathbf{y}_0$ respecto de $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ son 0, $-1/\kappa, \dot{\kappa}/\kappa^2 \tau$. En consecuencia,

$$\mathbf{x} - \mathbf{y}_0 = \frac{-1}{\kappa} \mathbf{n} + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \mathbf{b}$$

Pero, en la superficie esférica es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}_0) = \left(-\frac{1}{\kappa} \mathbf{n} + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \mathbf{b} \right) \cdot \left(-\frac{1}{\kappa} \mathbf{n} + \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \mathbf{b} \right) = \left(\frac{1}{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \right)^2 = a^2$$

5.6. Demostrar que si el vector de posición \mathbf{x} de una curva plana $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ forma un ángulo constante α con la tangente $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una espiral logarítmica.

Tenemos que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = (\cos \alpha) |\mathbf{x}|$. Además, puesto que $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$, entonces $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}| = |\sin \alpha| |\mathbf{x}|$ y, por ello, podemos escoger la dirección y el sentido de \mathbf{n} de modo que sea $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = (-\sin \alpha) |\mathbf{x}|$. Derivando la primera igualdad se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{t}} = (\cos \alpha) \frac{\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{t}}}{|\mathbf{x}|}, \text{ o sea, } 1 + \kappa \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \cos^2 \alpha$$

Derivando de nuevo, $\dot{\kappa} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} + \kappa \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} + \kappa \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0$

Como quiera que $\tau = 0$, $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa \mathbf{t}$; en esta forma, $\dot{\kappa} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \kappa^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = 0$ y

$$|\mathbf{x}|(-\dot{\kappa} \sin \alpha - \kappa^2 \cos \alpha) = 0, \text{ o sea, } \dot{\kappa} = -(\cot \alpha) \kappa^2$$

Esta ecuación diferencial en κ se puede resolver por separación de variables, y se tiene

$$\kappa = \frac{1}{(\cot \alpha)s + c}$$

que es la ecuación intrínseca de una espiral logarítmica (véanse el ejemplo 5.2 y el problema 5.20). $\S 28$

Otro método consiste en introducir el ángulo $\phi = \angle(t, e_1)$, el ángulo polar, que será $\theta = \angle(x, e_1) = \phi - \alpha$, y $r = |x|$, como se ve en la figura 5-12. En ese caso, será $x \cdot t = (\cos \alpha)r$ y $x \cdot n = (-\sin \alpha)r$. Derivando nuevamente se obtiene

$$\begin{aligned} -\sin \alpha \frac{dr}{ds} &= \frac{d}{ds}(x \cdot n) \frac{ds}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} \\ &= (\dot{x} \cdot n + x \cdot \dot{n})(1/\kappa) \\ &= (x \cdot \dot{n})(1/\kappa) \end{aligned}$$

en donde, hemos utilizado el hecho de que $d\phi/ds = \kappa$ y $d\phi/d\theta = 1$. Entonces,

$$-\sin \alpha \frac{dr}{ds} = -(x \cdot t) = -(\cos \alpha)r$$

en donde, hemos empleado la igualdad $\dot{n} = -\kappa t$. Integrando la $dr/d\theta = r \cot \alpha$, tenemos $r = e^{(\cot \alpha)\theta} + C$, que es una espiral logarítmica.

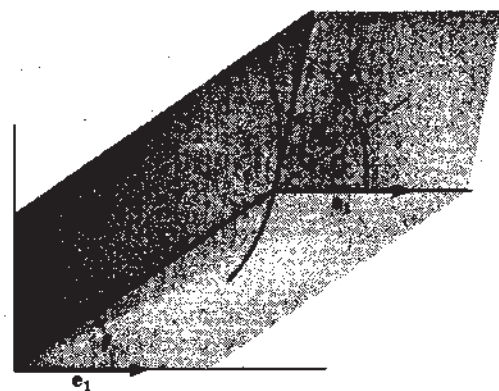


Fig. 5-12

5.7. Supóngase que C sea una curva definida por la ecuación

$$x = a \int g(t) \times g'(t) dt, \quad a = \text{constante} \neq 0$$

en donde, $g(t)$ es una función vectorial que cumple la condición de que $|g(t)| = 1$ y $[gg'g''] \neq 0$. Demostrar que $\kappa \neq 0$ y $\tau = 1/a$.

$$\begin{aligned} x' &= a(g \times g') \\ x'' &= a(g \times g'') + a(g' \times g') = a(g \times g'') \\ x''' &= a(g \times g''') + a(g' \times g'') \end{aligned}$$

Puesto que $|g| = 1$, entonces $g \perp g'$; y, utilizando la identidad del ejemplo 1.19 de la página 9, tendremos

$$x' \cdot x' = a^2(g \times g') \cdot (g \times g') = a^2(g' \cdot g')(g \cdot g) = a^2|g'|^2$$

De acuerdo con la identidad $[F_2]$ de la página 11, se tiene

$$x' \times x'' = a^2(g \times g') \times (g \times g'') = a^2([gg'g'']g - [gg'g'']g) = a^2[gg'g'']g$$

Pero, según el teorema 4.2, $\kappa = \frac{|x' \times x''|}{|x'|^3}$ y de este modo, $\kappa = \frac{|[gg'g'']|}{|a| |g'|^3} \neq 0$; además,

$$[x'x''x'''] = (x' \times x'') \cdot x''' = a^3[gg'g'']g \cdot [a(g \times g''') + a(g' \times g'')] = a^3[gg'g'']^2$$

Y, de acuerdo con el teorema 4.5 de la página 74,

$$\tau = \frac{[x'x''x''']}{(x' \times x'') \cdot (x' \times x''')} = \frac{a^3[gg'g'']^2}{a^4[gg'g'']^2} = \frac{1}{a} = \text{constante} \neq 0$$

5.8. Demostrar el recíproco del problema precedente, a saber: Si $\tau = \text{constante} = 1/a$ a todo lo largo de una curva, esto se puede expresar en la forma $x = a \int g(t) \times g'(t) dt$, en donde $|g(t)| = 1$ y $[gg'g''] \neq 0$.

De acuerdo con las ecuaciones de Frenet, se tiene

$$t = n \times b = -b \times n = -b \times (-\dot{b}/\tau) = ab \times \dot{b}$$

Y así, $x = \int t ds = a \int b \times \dot{b} ds$. Y como $\dot{b} = -\tau n = -(1/a)n$ y $\ddot{b} = -(1/a)\dot{n} = -(1/a)(-\kappa t + \tau b)$, se deduce que b, \dot{b} y \ddot{b} son linealmente independientes, o sea que $[b \dot{b} \ddot{b}] \neq 0$.

5.9. Demostrar que la diferencia entre la longitud s de un arco de curva suficientemente pequeño y la longitud $|PQ|$ de la cuerda correspondiente es de orden s^3 .

Utilizaremos la representación canónica, a saber

$$x_1 = s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3 + o(s^3), \quad x_2 = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 + \frac{1}{6}\kappa_0^3 s^3 + o(s^3), \quad x_3 = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3 + o(s^3)$$

Elevando al cuadrado cada una de las componentes, se tiene

$$x_1^2 = s^2 - \frac{1}{3}\kappa_0^2 s^4 + o(s^4), \quad x_2^2 = \frac{1}{4}\kappa_0^2 s^4 + o(s^4), \quad x_3^2 = o(s^4)$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien, } |PQ| &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = [s^2 - \frac{1}{3}\kappa_0^2 s^4 + o(s^4)]^{1/2} \\ &= [(s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3 + o(s^3))^2]^{1/2} = s - \frac{1}{6}\kappa_0^2 s^3 + o(s^3) \end{aligned}$$

De modo que, $|PQ| - s = -\frac{\kappa_0^2}{24}s^3 + o(s^3)$ y, en esta forma, la diferencia es de orden s^3 .

5.10. Si las rectas normales principales de una curva C son las mismas que las rectas binormales de otra curva C^* , demostrar que a todo lo largo de C se cumple que

$$\alpha(\kappa^2 + \tau^2) = \kappa, \quad \alpha = \text{constante}$$

Supóngase que C viene dada por la expresión $x = x(s)$ y que x^* designa un punto de C^* , en donde su binormal es igual a la normal principal en $x(s)$, como se muestra en la figura 5-13. Entonces, $x^* - x(s)$ es paralelo a $n(s)$, de modo que

$$x^* = x(s) + \alpha(s)n(s)$$

Consideremos ahora el vector tangente

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{ds} &= \frac{d}{ds}(x + \alpha n) = (\dot{x} + \dot{\alpha}n + \alpha \dot{n}) \\ &= (t + \dot{\alpha}n - \alpha \kappa t + \alpha \tau b) = (1 - \alpha \kappa)t + \dot{\alpha}n + \alpha \tau b \end{aligned}$$

Puesto que es $\frac{dx^*}{ds} \perp b^*$, también será $\frac{dx^*}{ds} \perp n$. De modo que

$$0 = n \cdot \frac{dx^*}{ds} = (1 - \alpha \kappa)(t \cdot n) + \dot{\alpha}(n \cdot n) + \alpha \tau(b \cdot n) = \dot{\alpha}$$

y, de esta suerte, $\alpha = \text{constante}$, y $dx^*/ds = (1 - \alpha \kappa)t + \alpha \tau b$. Ahora, bien,

$$t^* = \frac{dx^*}{ds^*} = \frac{dx^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = [(1 - \alpha \kappa)t + \alpha \tau b] \frac{ds}{ds^*}$$

$$\begin{aligned} \text{y } \frac{dt^*}{ds^*} &= \frac{d}{ds}[(1 - \alpha \kappa)t + \alpha \tau b] \frac{ds}{ds^*} + [(1 - \alpha \kappa)t + \alpha \tau b] \frac{d^2s}{ds^{*2}} \\ &= [-\alpha \dot{\kappa}t + (1 - \alpha \kappa)\dot{t} + \alpha \dot{\tau}b + \alpha \tau \dot{b}] \frac{ds}{ds^*} + [(1 - \alpha \kappa)t + \alpha \tau b] \frac{d^2s}{ds^{*2}} \\ &= [-\alpha \dot{\kappa}t + [(1 - \alpha \kappa)(-\kappa t - \tau b) + \alpha \dot{\tau}b] \frac{ds}{ds^*} + [(1 - \alpha \kappa)t + \alpha \tau b] \frac{d^2s}{ds^{*2}} \end{aligned}$$

Pero, $\frac{dt^*}{ds^*} \perp b^*$, pues $\frac{dt^*}{ds^*} = \kappa^* n^*$. De esta manera, $\frac{dt^*}{ds^*} \perp n$ y

$$0 = n \cdot \frac{dt^*}{ds^*} = [(1 - \alpha \kappa)\kappa - \alpha \tau^2] \frac{ds}{ds^*}$$

Como $ds/ds^* \neq 0$ (de lo contrario sería $s = \text{constante}$), tenemos que

$$(1 - \alpha \kappa)\kappa - \alpha \tau^2 = 0 \quad \text{o} \quad \alpha(\kappa^2 + \tau^2) = \kappa.$$

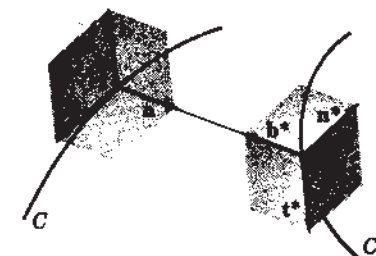


Fig. 5-13

5.11. Dos curvas C y C^* reciben el nombre de curvas de Bertrand si sus normales principales son comunes, como se puede ver en la figura 5-14.

- (a) Demostrar que la distancia entre puntos homólogos o correspondientes de dos curvas de Bertrand es constante.
 (b) Demostrar que el ángulo que forman las tangentes homólogas de dos curvas de Bertrand es constante.

- (a) Supongamos que C viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, y que \mathbf{x}^* designa el punto C^* donde la normal principal coincide con la normal principal de C en $\mathbf{x}(s)$. En ese caso, $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(s)$ es proporcional a $\mathbf{n}(s)$, de modo que

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(s) + \alpha(s) \mathbf{n}(s)$$

Derivando, se tiene:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^*/ds &= \dot{\mathbf{x}} + \dot{\alpha} \mathbf{n} + \alpha \dot{\mathbf{n}} \\ &= \mathbf{t} + \dot{\alpha} \mathbf{n} + \alpha(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \\ &= (1 - \alpha\kappa) \mathbf{t} + \dot{\alpha} \mathbf{n} + \alpha\tau \mathbf{b} \end{aligned}$$

Pero, $d\mathbf{x}^*/ds$ es tangente a C^* , y, por tanto, es ortogonal a \mathbf{n}^* y \mathbf{n} . De aquí que $\mathbf{n} \cdot (d\mathbf{x}^*/ds) = 0$ y $\alpha = \text{constante}$, y, así, la distancia entre puntos correspondientes es $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(s)| = |\alpha \mathbf{n}(s)| = |\alpha| = \text{constante}$.

- (b) Supongamos que \mathbf{t} y \mathbf{t}^* son los vectores tangentes unitarios de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ y $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{n}$, respectivamente, y consideremos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{t}) &= \frac{d\mathbf{t}^*}{ds} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t}^* \cdot \dot{\mathbf{t}} = \left(\frac{d\mathbf{t}^*}{ds} \cdot \mathbf{t} \right) \frac{ds^*}{ds} + \mathbf{t}^* \cdot \kappa \mathbf{n} \\ &= \kappa^* \frac{ds^*}{ds} (\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{t}) + \kappa (\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{n}) \end{aligned}$$

Como $\mathbf{n}^* = \pm \mathbf{n}$, entonces $\mathbf{n}^* \perp \mathbf{t}$ y $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}^*$. Por esto, $\frac{d}{ds}(\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{t}) = 0$, y, por ello, $\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{t} = \text{constante}$.

5.12. Si $\tau \neq 0$ a todo lo largo de C , demostrar que C es una curva de Bertrand (es decir, que existe una curva C^* tal que C y C^* son curvas de Bertrand), sii existen las constantes γ y α tales que $\kappa + \gamma\tau = 1/\alpha$.

- (a) Supongamos que C viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, y, además, que a todo lo largo de C sean: $\tau \neq 0$ y $\kappa + \gamma\tau = 1/\alpha$. Por definición, C^* viene dada por

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(s) + \alpha \mathbf{n}(s)$$

Para demostrar que C y C^* son curvas de Bertrand, hacemos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} &= (\dot{\mathbf{x}} + \dot{\alpha} \mathbf{n}) = \mathbf{t} - \alpha\kappa \mathbf{t} + \alpha\tau \mathbf{b} = (1 - \alpha\kappa) \mathbf{t} + \alpha\tau \mathbf{b} = \alpha\gamma \mathbf{t} + \alpha\tau \mathbf{b} = \alpha\tau(\gamma \mathbf{t} + \mathbf{b}) \\ \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| &= |\alpha\tau|(\gamma^2 + 1)^{1/2} \\ \mathbf{t}^* &= \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = \pm(\gamma^2 + 1)^{-1/2}(\gamma \mathbf{t} + \mathbf{b}) \\ \frac{d\mathbf{t}^*}{ds} &= \pm(\gamma^2 + 1)^{-1/2}(\gamma \dot{\mathbf{t}} + \dot{\mathbf{b}}) = \pm(\gamma^2 + 1)^{-1/2}(\gamma\kappa \mathbf{n} - \tau \mathbf{n}) \\ \frac{d\mathbf{t}^*}{ds^*} &= \frac{d\mathbf{t}^*}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = \pm \frac{(\gamma\kappa - \tau)}{|\alpha\tau|(\gamma^2 + 1)} \mathbf{n} = \kappa^* \mathbf{n}^* \end{aligned}$$

De esto se desprende que $\mathbf{n} = \pm \mathbf{n}^*$, lo cual prueba que las curvas son de Bertrand.

- (b) Recíprocamente, supongamos que C , dada por la ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, es una curva de Bertrand y que sea $\tau \neq 0$ a todo lo largo de C . De acuerdo con el problema precedente, C^* se puede representar en la forma

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(s) + \alpha \mathbf{n}(s), \quad \alpha = \text{constante} \neq 0$$

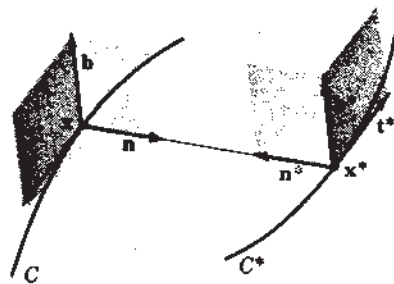


Fig. 5-14

Calculemos $\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \mathbf{t} + \dot{\alpha} \mathbf{n} = (1 - \alpha\kappa) \mathbf{t} + \alpha\tau \mathbf{b}$

$$\mathbf{t}^* = \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = [(1 - \alpha\kappa) \mathbf{t} + \alpha\tau \mathbf{b}] \frac{ds}{ds^*}$$

Ahora bien, de acuerdo con el problema precedente, es $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* = \text{constante} = \cos \beta$. Entonces,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* = (1 - \alpha\kappa) \frac{ds}{ds^*} = \cos \beta \quad (*)$$

Como quiera que \mathbf{t}^* es un vector unitario en el plano de \mathbf{t} y \mathbf{b} , y, además, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}^* = \cos \beta$, tenemos que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}^* = \pm \sin \beta$. De este modo, es

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}^* = \alpha\tau \frac{ds}{ds^*} = \pm \sin \beta \quad (**)$$

Puesto que $\alpha \neq 0$, $\tau \neq 0$ y $ds/ds^* \neq 0$, entonces: $\sin \beta \neq 0$. Por último, al eliminar a ds/ds^* , (entre (*) y (**)) tendremos $\pm(1 - \alpha\kappa) \sin \beta = \alpha\tau \cos \beta$, o sea, $\kappa \pm \tau \cot \beta = 1/\alpha$; es decir $\kappa + \gamma\tau = 1/\alpha$, en donde $\gamma = \pm \cot \beta$.

5.13. Demostrar que, si a todo lo largo de C es $\tau \neq 0$, existe más de una curva C^* tal que C y C^* sean curvas de Bertrand, sii C es una hélice circular.

(a) Supongamos que C es una hélice circular. Entonces, a todo lo largo de C , $\tau = \text{constante} \neq 0$ y $\kappa = \text{constante} \neq 0$. De esta manera, para cualquier $\alpha \neq 0$ podemos hallar un $\gamma = \text{constante} \neq 0$ tal que $\kappa + \gamma\tau = 1/\alpha$. Del problema precedente se infiere que C tiene un número infinito de curvas de Bertrand que le son homólogas.

(b) Recíprocamente, supongamos que C , C^* y C^{**} sean curvas de Bertrand y que a todo lo largo de C sea $\tau \neq 0$. El problema precedente demuestra que existen las constantes $\gamma, \gamma^*, \alpha, \alpha^*$ ($\alpha \neq \alpha^*$, pues de lo contrario sería $C^* = C^{**}$) tales que

$$\kappa + \gamma\tau = 1/\alpha \quad \text{y} \quad \kappa + \gamma^*\tau = 1/\alpha^*$$

De este modo, $\gamma \neq \gamma^*$ y $\tau = (1/\alpha^* - 1/\alpha)/(\gamma^* - \gamma) = \text{constante}$, y, resolviendo las ecuaciones anteriores, se obtiene $\kappa = (\gamma^*/\alpha - \gamma/\alpha^*)(\gamma^* - \gamma) = \text{constante}$. Puesto que $\kappa = \text{constante}$ y $\tau = \text{constante}$ son las ecuaciones intrínsecas de la curva C , ésta es una hélice circular.

INVOLUTAS Y EVOLUTAS

5.14. Hallar la ecuación de la involuta de la circunferencia $\mathbf{x} = a(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + a(\sin \theta) \mathbf{e}_2$, $a > 0$. La involuta se engendra cuando se desenrolla una cuerda, a partir de $\theta = 0$ como se muestra en la figura 5-15.

Si s es un parámetro natural a todo lo largo de la circunferencia, en forma que $s = 0$ si $\theta = 0$, entonces la ecuación de la involuta será $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} - s\mathbf{t}$. Es evidente que la longitud de arco es $s = a\theta$.

Además, $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} \right| = (-\sin \theta) \mathbf{e}_1 + (\cos \theta) \mathbf{e}_2$. Y así,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= (a(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + a(\sin \theta) \mathbf{e}_2) - a\theta(-\sin \theta) \mathbf{e}_1 + a(\cos \theta) \mathbf{e}_2 \\ &= a(\cos \theta + \theta \sin \theta) \mathbf{e}_1 + a(\sin \theta - \theta \cos \theta) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

es el resultado que se buscaba.

5.15. Demostrar que la curvatura de la involuta $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + (c - s)\mathbf{t}$ de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ viene expresada por la fórmula

$$\kappa^* = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c - s)^2 \kappa^2}$$

$$\mathbf{x}^* = \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{t} + (c - s)\dot{\mathbf{t}} = (c - s)\kappa \mathbf{n}, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = |(c - s)\kappa| = |\mathbf{x}^*|$$

$$\mathbf{x}^{**} = -\kappa \dot{\mathbf{n}} + (c - s)\dot{\kappa} \mathbf{n} + (c - s)\kappa \dot{\mathbf{n}} = (-\kappa + (c - s)\dot{\kappa}) \mathbf{n} - (c - s)\kappa^2 \mathbf{t} + (c - s)\kappa \tau \mathbf{b}$$

$$\kappa^2 = \frac{|\mathbf{x}^{**}|^2}{|\mathbf{x}^*|^2} = \dots = \frac{\kappa^2 + \tau^2}{(c - s)^2 \kappa^2}$$

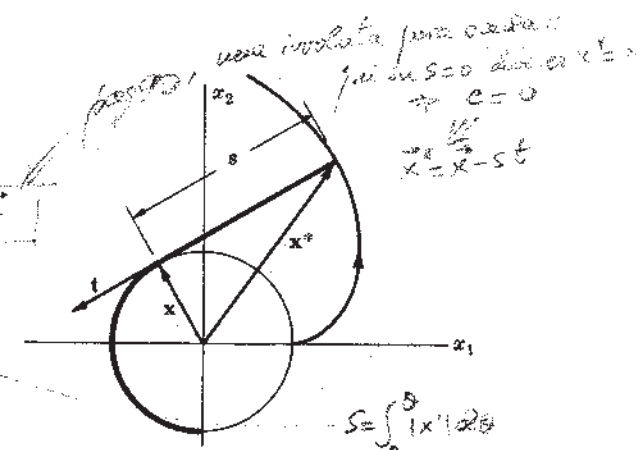


Fig. 5-15

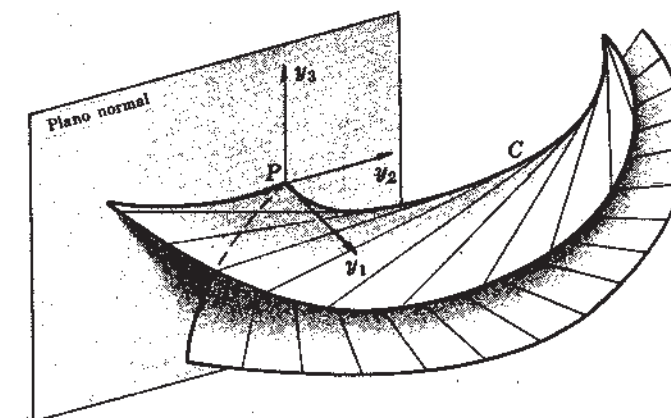


Fig. 5-17

El plano normal en P es el plano y_2y_3 , es decir, el $y_1 = 0$. Entonces, a todo lo largo de la intersección es $y_1 = s + k = 0$, o sea, $s = -k$. De esta suerte, en las proximidades de P la intersección tiene la forma

$$y_2 = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 - \kappa_0 s^2 = -\frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \quad y_3 = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3 - \frac{1}{2}\kappa_0 \tau_0 s^3 = -\frac{1}{3}\kappa_0 \tau_0 s^3$$

o sea, $y_2 = -\frac{1}{2}\kappa_0^{1/3}(3/\tau_0)^{2/3}y_3^{2/3}$, que es el punto cuspidal que se muestra en la figura 5-17.

$$y_2 = c\sqrt[3]{y_3^2} \text{ curva tipo } y = \sqrt[3]{x^2} \text{ con } y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}x^{-1/3} \rightarrow \infty \text{ como } x \rightarrow 0^+ \text{ o } x \rightarrow 0^-$$

TEORIA DEL CONTACTO, SUPERFICIES OSCULATRICES

5.20. Demostrar que la curva $\mathbf{x} = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$ tiene un contacto de sexto orden con el paraboloide $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ en el origen ($t = 0$).

Consideremos la función $f(t) = (t^2)^2 + (t^3)^2 - t^3 = t^6$

$$f'(t) = 6t^5, \quad f''(t) = 30t^4, \quad f'''(t) = 120t^3, \quad f^{(4)}(t) = 360t^2, \quad f^{(5)}(t) = 720t, \quad f^{(6)}(t) = 720$$

Es evidente que $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $f^{(6)}(0) \neq 0$. Y, en consecuencia, la curva tiene con el paraboloide, en $t = 0$, un contacto de sexto orden.

5.21. Demostrar que el plano osculador tiene con una curva, en P, un contacto de cuarto orden, por lo menos, si la curvatura o la torsión se anulan en P.

El plano osculador de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en $s = s_0$ es $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}_0 = 0$. Consideremos la función

$$f(s) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}_0$$

$$f'(s) = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}_0 = t \cdot \mathbf{b}_0, \quad f''(s) = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}_0 = \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0$$

$$f'''(s) = \dot{\kappa} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}_0 = \dot{\kappa} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0 - \kappa^2 t \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa \tau \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0$$

Es evidente que $f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = t_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0$, $f''(s_0) = \kappa_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0$

$$f'''(s_0) = \dot{\kappa}_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}_0 - \kappa_0^2 t_0 \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \kappa_0 \tau_0 = 0$$

si $\kappa_0 = 0$, o si $\tau_0 = 0$, que era lo que queríamos demostrar.

5.22. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva es una evoluta de la curva si la curva es plana.

Si el $\vec{\gamma} = \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s)$ es constante $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(s)$

Como $\dot{\vec{\gamma}} = \dot{\vec{x}} + \frac{1}{\kappa}\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{x}} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\vec{t}) = \dot{\vec{x}} - \vec{t} = 0$ $\Rightarrow \dot{\vec{\gamma}} = 0 \Rightarrow \vec{\gamma} = \text{constante}$

Por lo tanto, el lugar geométrico de los centros de curvatura es una evoluta de la curva.

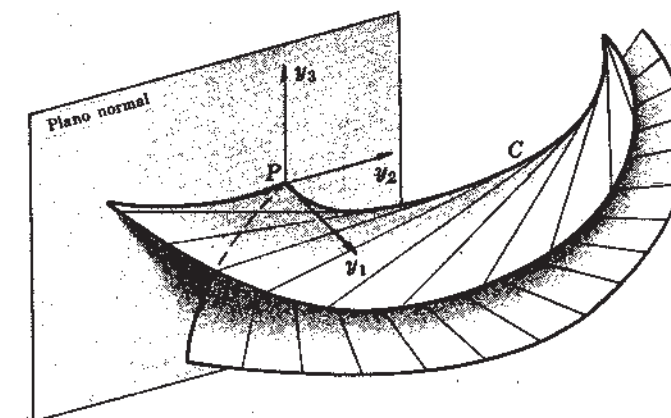


Fig. 5-17

El plano normal en P es el plano y_2y_3 , es decir, el $y_1 = 0$. Entonces, a todo lo largo de la intersección es $y_1 = s + k = 0$, o sea, $s = -k$. De esta suerte, en las proximidades de P la intersección tiene la forma

$$y_2 = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 - \kappa_0 s^2 = -\frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \quad y_3 = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3 - \frac{1}{2}\kappa_0 \tau_0 s^3 = -\frac{1}{3}\kappa_0 \tau_0 s^3$$

o sea, $y_2 = -\frac{1}{2}\kappa_0^{1/3}(3/\tau_0)^{2/3}y_3^{2/3}$, que es el punto cuspidal que se muestra en la figura 5-17.

$$y_2 = c\sqrt[3]{y_3^2} \text{ curva tipo } y = \sqrt[3]{x^2} \text{ con } y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}x^{-1/3} \rightarrow \infty \text{ como } x \rightarrow 0^+ \text{ o } x \rightarrow 0^-$$

TEORIA DEL CONTACTO, SUPERFICIES OSCULATRICES

5.20. Demostrar que la curva $\mathbf{x} = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$ tiene un contacto de sexto orden con el paraboloide $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ en el origen ($t = 0$).

Consideremos la función $f(t) = (t^2)^2 + (t^3)^2 - t^3 = t^6$

$$f'(t) = 6t^5, \quad f''(t) = 30t^4, \quad f'''(t) = 120t^3, \quad f^{(4)}(t) = 360t^2, \quad f^{(5)}(t) = 720t, \quad f^{(6)}(t) = 720$$

Es evidente que $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $f^{(6)}(0) \neq 0$. Y, en consecuencia, la curva tiene con el paraboloide, en $t = 0$, un contacto de sexto orden.

5.21. Demostrar que el plano osculador tiene con una curva, en P, un contacto de cuarto orden, por lo menos, si la curvatura o la torsión se anulan en P.

El plano osculador de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en $s = s_0$ es $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}_0 = 0$. Consideremos la función

$$f(s) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}_0$$

$$f'(s) = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}_0 = t \cdot \mathbf{b}_0, \quad f''(s) = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}_0 = \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0$$

$$f'''(s) = \dot{\kappa} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}_0 = \dot{\kappa} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0 - \kappa^2 t \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa \tau \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0$$

Es evidente que $f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = t_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0$, $f''(s_0) = \kappa_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0$

$$f'''(s_0) = \dot{\kappa}_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}_0 - \kappa_0^2 t_0 \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \kappa_0 \tau_0 = 0$$

si $\kappa_0 = 0$, o si $\tau_0 = 0$, que era lo que queríamos demostrar.

5.22. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva es una evoluta de la curva si la curva es plana.

Si el $\vec{\gamma} = \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s)$ es constante $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(s)$

Como $\dot{\vec{\gamma}} = \dot{\vec{x}} + \frac{1}{\kappa}\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{x}} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\vec{t}) = \dot{\vec{x}} - \vec{t} = 0$ $\Rightarrow \dot{\vec{\gamma}} = 0 \Rightarrow \vec{\gamma} = \text{constante}$

Por lo tanto, el lugar geométrico de los centros de curvatura es una evoluta de la curva.

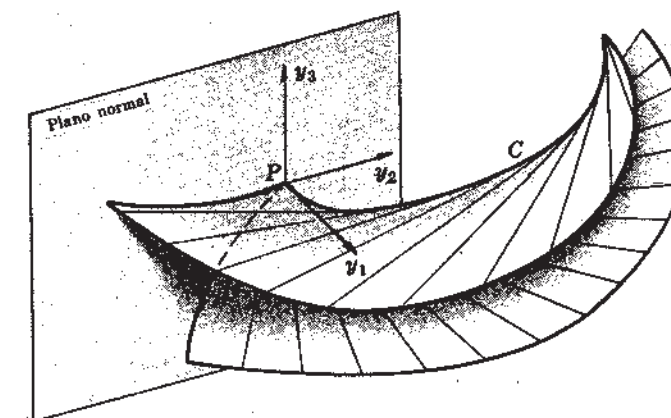


Fig. 5-17

El plano normal en P es el plano y_2y_3 , es decir, el $y_1 = 0$. Entonces, a todo lo largo de la intersección es $y_1 = s + k = 0$, o sea, $s = -k$. De esta suerte, en las proximidades de P la intersección tiene la forma

$$y_2 = \frac{1}{2}\kappa_0 s^2 - \kappa_0 s^2 = -\frac{1}{2}\kappa_0 s^2, \quad y_3 = \frac{1}{6}\kappa_0 \tau_0 s^3 - \frac{1}{2}\kappa_0 \tau_0 s^3 = -\frac{1}{3}\kappa_0 \tau_0 s^3$$

o sea, $y_2 = -\frac{1}{2}\kappa_0^{1/3}(3/\tau_0)^{2/3}y_3^{2/3}$, que es el punto cuspidal que se muestra en la figura 5-17.

$$y_2 = c\sqrt[3]{y_3^2} \text{ curva tipo } y = \sqrt[3]{x^2} \text{ con } y' = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3}x^{-1/3} \rightarrow \infty \text{ como } x \rightarrow 0^+ \text{ o } x \rightarrow 0^-$$

TEORIA DEL CONTACTO, SUPERFICIES OSCULATRICES

5.20. Demostrar que la curva $\mathbf{x} = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$ tiene un contacto de sexto orden con el paraboloide $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ en el origen ($t = 0$).

Consideremos la función $f(t) = (t^2)^2 + (t^3)^2 - t^3 = t^6$

$$f'(t) = 6t^5, \quad f''(t) = 30t^4, \quad f'''(t) = 120t^3, \quad f^{(4)}(t) = 360t^2, \quad f^{(5)}(t) = 720t, \quad f^{(6)}(t) = 720$$

Es evidente que $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $f^{(6)}(0) \neq 0$. Y, en consecuencia, la curva tiene con el paraboloide, en $t = 0$, un contacto de sexto orden.

5.21. Demostrar que el plano osculador tiene con una curva, en P, un contacto de cuarto orden, por lo menos, si la curvatura o la torsión se anulan en P.

El plano osculador de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en $s = s_0$ es $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}_0 = 0$. Consideremos la función

$$f(s) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{b}_0$$

$$f'(s) = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}_0 = t \cdot \mathbf{b}_0, \quad f''(s) = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{b}_0 = \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0$$

$$f'''(s) = \dot{\kappa} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{b}_0 = \dot{\kappa} \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_0 - \kappa^2 t \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa \tau \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0$$

Es evidente que $f(s_0) = 0$, $f'(s_0) = t_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0$, $f''(s_0) = \kappa_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = 0$

$$f'''(s_0) = \dot{\kappa}_0 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{b}_0 - \kappa_0^2 t_0 \cdot \mathbf{b}_0 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{b}_0 = \kappa_0 \tau_0 = 0$$

si $\kappa_0 = 0$, o si $\tau_0 = 0$, que era lo que queríamos demostrar.

5.22. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva es una evoluta de la curva si la curva es plana.

Si el $\vec{\gamma} = \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s)$ es constante $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}(s)$

Como $\dot{\vec{\gamma}} = \dot{\vec{x}} + \frac{1}{\kappa}\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{x}} + \frac{1}{\kappa}(-\kappa\vec{t}) = \dot{\vec{x}} - \vec{t} = 0$ $\Rightarrow \dot{\vec{\gamma}} = 0 \Rightarrow \vec{\gamma} = \text{constante}$

Por lo tanto, el lugar geométrico de los centros de curvatura es una evoluta de la curva.

B) Si $x = x(s)$ es plana, la curva $y = x + (1/\kappa)n$ es la evoluta correspondiente a $x = 0$ por ejemplo 5.6.

El lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva $x = x(s)$ es la curva $y = x + (1/\kappa)n$ y, por esta razón, es la única evoluta plana de $x = x(s)$. (Véase el ejemplo 5.6.) Por otra parte, las evolutas de $x = x(s)$ son de la forma

$$x^* = x + (1/\kappa)n + (1/\kappa) \left[\cot \left(\int \tau ds + c \right) \right] b$$

Puesto que n y b son linealmente independientes, es posible que y sea igual a algún x^* si para algún c es

$$\cot \left(\int \tau ds + c \right) = 0, \text{ o sea, } \int \tau ds = \pi/2 - c = \text{constante}$$

En consecuencia, $\tau = 0$ y, de esta suerte, $x = x(s)$ es una curva plana.

5.23. Demostrar que, si κ no cambia de signo entre dos puntos de una curva plana, la diferencia de los radios de curvatura en tales puntos es igual a la longitud de arco comprendido entre los puntos correspondientes del lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva.

El lugar geométrico de los centros de curvatura es $y = x + (1/\kappa)n$. Haciendo la derivación, se tiene

$$\frac{dy}{ds} = \dot{x} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}n + \frac{1}{\kappa}\dot{n} = t - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}n + \frac{1}{\kappa}(-\kappa t) = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}n$$

en donde utilizamos $\tau = 0$ porque la curva es plana. Supongamos ahora que $\dot{\kappa} \geq 0$ entre los puntos $x(s_1)$ y $x(s_2)$, siendo $(s_1 < s_2)$. Entonces, para $s_1 \leq s \leq s_2$, se tiene

$$\left| \frac{dy}{ds} \right| = \left| -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} \right| = \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}$$

y la longitud del correspondiente arco del lugar geométrico de los centros de curvatura es

$$AB = \int_{s_1}^{s_2} \left| \frac{dy}{ds} \right| ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \right) ds = \frac{1}{\kappa(s_2)} - \frac{1}{\kappa(s_1)} = \rho(s_2) - \rho(s_1)$$

que era lo que queríamos demostrar.

5.24. Demostrar que las tangentes al lugar geométrico de los centros de curvatura esférica de una curva son paralelas a las binormales de la curva en los puntos correspondientes.

El lugar geométrico de los centros de curvatura esférica es

$$y = x + (1/\kappa)n - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}b$$

Un vector tangente al lugar geométrico se expresa por

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \dot{x} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}n + (1/\kappa)\dot{n} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau} \right) b - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau} \dot{b} \\ &= t - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2}n + (1/\kappa)(-\kappa t + \tau b) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau} \right) b - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}(-\tau n) = \left[\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau} \right) \right] b \end{aligned}$$

de donde resulta lo que se busca.

Problemas propuestos

5.25. Hallar las ecuaciones intrínsecas de la curva $x = e^t(a(\cos t)e_1 + a(\sin t)e_2 + be_3)$.

$$\text{Resp. } \kappa = \frac{a\sqrt{2}}{s(2a^2 + b^2)^{1/2}}, \quad \tau = \frac{b}{s(2a^2 + b^2)^{1/2}}$$

5.26. Hallar las ecuaciones intrínsecas de la hipocicloide

$$x = \left[(r_0 - r_1) \cos \theta - r_1 \cos \left(\frac{r_0 - r_1}{r_1} \theta \right) \right] e_1 + \left[(r_0 - r_1) \sin \theta - r_1 \sin \left(\frac{r_0 - r_1}{r_1} \theta \right) \right] e_2$$

$$\text{Resp. } \frac{s^2}{A^2} + \frac{1}{\kappa^2 B^2} = 1, \quad \tau = 0, \quad A < B$$

5.27. Demostrar que si C es una curva plana, existe siempre una curva C^* tal que C y C^* son curvas de Bertrand.

5.28. Determinar la curva cuyas ecuaciones intrínsecas son

$$\kappa = \frac{1}{as + b}, \quad \tau = 0, \quad s > 0, \quad a > 0$$

$$\text{Resp. La espiral logarítmica } r = ce^{\tau\theta} = ce^{(a/b)\theta} = \frac{c}{a} e^{b\theta} = \frac{c}{a} e^{b\theta}$$

5.29. Hallar la ecuación de la superficie tangente a la curva $x = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$.

$$\text{Resp. } x = (t+k)e_1 + (t^2+2kt)e_2 + (t^3+3kt^2)e_3, \quad -\infty < k < \infty$$

5.30. Demostrar que todas las involutas de una circunferencia son congruentes.

5.31. Demostrar que si dos curvas tienen las mismas binormales en puntos correspondientes, las curvas son planas.

5.32. Demostrar que una curva $x = x(s)$ de clase ≥ 4 cumple la ecuación diferencial

$$x^{(4)} - \left(\frac{2\dot{\kappa}}{\kappa} + \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) x'' + \left(\kappa^2 + \tau^2 + \frac{\dot{\kappa}\dot{\tau}}{\kappa\tau} + \frac{2\kappa\dot{\kappa} - \kappa\dot{\tau}}{\kappa^2} \right) x' + \kappa^2 \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\dot{\tau}}{\tau} \right) x = 0$$

(Sugerencia: Cálculense $\dot{x} = t$, $\ddot{x} = \dot{t} = \kappa n$, $\ddot{\ddot{x}} = \dot{\kappa}n + \kappa\dot{n} = \dot{\kappa}n - \kappa^2t + \kappa\tau b$ y $x^{(4)} = \dots$ como combinaciones lineales de n, t, b y háganse las sustituciones del caso.)

5.33. Demostrar que si una curva está situada sobre la superficie de una esfera, entonces $\frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau} \right) + \frac{\tau}{\kappa} = 0$.

5.34. (a) Demostrar que la proyección de una hélice perteneciente a un cono de revolución sobre un plano perpendicular al eje del cono, es una espiral logarítmica.

(b) Demostrar que las ecuaciones intrínsecas de una hélice perteneciente a un cono de revolución son

$$\kappa = 1/as, \quad \tau = 1/ba, \quad a, b = \text{constante}$$

5.35. Demostrar que la torsión de la involuta $x^* = x + (c-s)t$ de la curva $x = x(s)$ es

$$\tau^* = \frac{(c-s)\tau(\kappa^2 + \tau^2)}{\kappa^2 - \dot{\kappa}\tau}$$

5.36. Demostrar que las evolutas de una curva plana son hélices.

5.37. Demostrar que $\cot \left[\int \tau ds + c \right]$ es la razón de la torsión de una evoluta a su curvatura. (Sugerencia: Utilícese en el problema 5.35 la relación entre una curva C y una involuta C^* , o lo que es igual, entre una curva C^* y su evoluta C .)

5.38. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de curvatura de una hélice circular es una hélice coaxial de igual paso, y que el lugar geométrico de los centros de curvatura del lugar geométrico de los centros de curvatura es la hélice original.

5.39. Probar que el producto de la torsión de una hélice circular por la torsión del lugar geométrico de los centros de la hélice en puntos homólogos es igual a κ^2 .

- 5.40. Integrar las ecuaciones de Frenet para el caso de curvatura y torsión constantes.
- 5.41. Si una hélice está situada sobre una esfera, demostrar que su proyección sobre un plano perpendicular a su eje, es un arco de epicicloide. (Sugerencia: Demostrar que la ecuación intrínseca de la proyección es $\frac{s^2}{A^2} + \frac{1}{A^2 B^2} = 1$, $A > B$. Véase el problema 5.2.)
- 5.42. Demostrar que la proyección de una hélice perteneciente a un paraboloides de revolución sobre un plano perpendicular a su eje, es una involuta de una circunferencia.
- 5.43. Demostrar que el producto de las torsiones de las curvas de Bertrand es constante.
- 5.44. Si una curva C está definida por
- $$\mathbf{x} = a \int \mathbf{g}(t) dt + b \int \mathbf{g}(t) \times \mathbf{g}'(t) dt$$
- en donde $|\mathbf{g}(t)| = 1$ y $|\mathbf{g}'(t)| = 1$, demostrar que C es una curva de Bertrand.

Capítulo 6

Topología elemental en espacios euclídeos

INTRODUCCION

Dentro de la teoría de la geometría diferencial, el concepto de superficie es mucho más complicado que el de curva. Por ejemplo, una curva, por general que sea, se puede expresar en su totalidad mediante una representación paramétrica regular única; en cambio, una superficie tan sencilla como es la esfera, requiere para su completa descripción por lo menos dos representaciones paramétricas regulares diferentes. En una curva se pueden incluir o no sus extremos o puntos fronteras, al paso que, por ejemplo, la semi-esfera superior, junto con su borde o contorno, que es un meridiano o circunferencia máxima, no se considerará como una superficie admisible; en cambio, la semi-esfera superior, excluido su contorno, se admite como superficie. Para poder definir una superficie, se requieren algunos conceptos elementales de topología.

Es conveniente contar con un único símbolo para designar una recta, un plano o un espacio tridimensional euclídeos. De esta suerte, el concepto "espacio euclídeo E " lo simbolizaremos con E^1 , E^2 o E^3 .

CONJUNTOS ABIERTOS

En la figura 6-1 puede observarse que todo punto interior a una circunferencia en el plano, se puede encerrar dentro de un entorno o vecindad esférico que a su vez sea interior a aquella. En general, un conjunto que goce de esta propiedad se dice que es *abierto*; o sea, se dice que un conjunto S de un espacio euclídeo E es abierto si, para todo P perteneciente a S , existe una vecindad o entorno esférico $S(P)$ de P que esté completamente contenido en S .

Ejemplo 6.1.

- Un intervalo abierto $a < x < b$, es un conjunto abierto de E^1 . El intervalo $a < x \leq b$ no es abierto; en efecto, cada $S(b)$ contendrá puntos $x' > b$, y que, por tanto, no están en $a < x \leq b$.
- El semi-plano $x_1 > 0$ es abierto. Pero, no lo es el conjunto formado por el semi-plano $x_1 > 0$ y el eje x_1 que se muestra en la figura 6-2. En efecto, si P es un punto del eje x_1 , a la izquierda del origen, cada $S(P)$ contendrá puntos a la izquierda del origen que no pertenecen a x_1 y, en consecuencia, no son del conjunto.
- Un entorno esférico de un punto es abierto de por sí. En E^1 , es un intervalo finito abierto; en E^2 , es el conjunto de puntos pertenecientes a un círculo (interiores a la circunferencia), y recibe el nombre de *disco abierto*; y en E^3 , está formado por los puntos pertenecientes a una esfera, es decir, interiores a la superficie esférica, y se denomina *esfera abierta*.
- El espacio euclídeo E es abierto de por sí. También es abierto el conjunto nulo \emptyset ; en efecto, si no fuera así, existiría un punto



Fig. 6-1

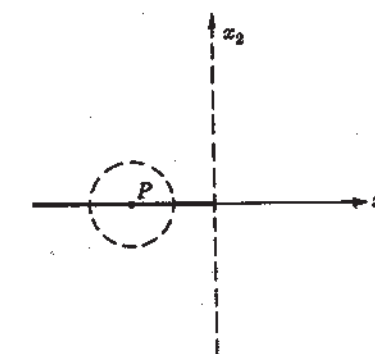


Fig. 6-2

P en \emptyset tal que todo $S(P)$ contendría puntos no pertenecientes a \emptyset . Pero, no existe ese punto P perteneciente a \emptyset .

Observación. El disco abierto es un conjunto abierto del E^2 , pero, no es abierto cuando se le considera como subconjunto de un plano perteneciente a E^3 ; en efecto, todo entorno de un punto en un plano de E^3 contiene puntos que están fuera del plano. De esta suerte, el ser abierto es una propiedad *relativa* de un conjunto; todo depende del espacio en que se considere incluido el conjunto.

Si $\{O_\alpha\}$ es cualquier familia de conjuntos abiertos, finita o infinita, entonces la unión $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es un conjunto abierto. En efecto, si suponemos que P pertenece a $\bigcup_\alpha O_\alpha$, entonces P es algún O_{α_0} . Puesto que O_{α_0} es abierto, existe un $S(P)$ en O_{α_0} . Pero, entonces $S(P)$ pertenece a $\bigcup_\alpha O_\alpha$. De este modo, para cualquier P de $\bigcup_\alpha O_\alpha$ existe un $S(P)$ en $\bigcup_\alpha O_\alpha$. Y, en consecuencia, $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es abierto.

Si $\{O_i\}$, $i = 1, \dots, n$, es una familia *finita* de conjuntos abiertos, entonces también la intersección $\bigcap O_i$ es un conjunto abierto. Porque, en el supuesto de que P pertenece a $\bigcap O_i$, entonces P pertenecerá a cada uno de los O_i . Como quiera que los O_i son abiertos, existe un $S_{\epsilon_i}(P)$ en cada O_i . Supongamos ahora que $\epsilon = \min(\epsilon_i)$. En ese caso, $S_\epsilon(P)$ estará contenido en O_i para todo valor de i . Así, pues, $S_\epsilon(P)$ pertenecerá a $\bigcap O_i$ y $\bigcap O_i$ es abierto.

Obsérvese que la intersección de un número infinito de conjuntos abiertos no es necesariamente un conjunto abierto. Por ejemplo, como puede apreciarse en la figura 6-3, la intersección de la familia infinita de discos abiertos concéntricos de radio $1 + 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, y centro en un punto P del E^2 , es el disco abierto de centro P y radio igual a 1 juntamente con su contorno que es la circunferencia de radio igual a 1. Y este no es un conjunto abierto.

Como consecuencia de lo anterior, se tiene el

Teorema 6.1. Los conjuntos abiertos de E tienen las siguientes propiedades

- E es abierto; \emptyset es abierto.
- Si los O_α son abiertos, entonces la $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es un conjunto abierto.
- Si los O_i , $i = 1, \dots, n$, son abiertos, entonces la $\bigcap O_i$ es un conjunto abierto.

Supongamos, por otra parte, que P y Q son puntos distintos de E . Es evidente que, tomando ϵ_1 y ϵ_2 suficientemente pequeños, por ejemplo, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}|PQ|$, los entornos $S_{\epsilon_1}(P)$ y $S_{\epsilon_2}(Q)$ son disjuntos. Como los entornos son conjuntos abiertos, tenemos el

Teorema 6.2. Si P y Q son puntos distintos de E , existen conjuntos abiertos O_P y O_Q que contengan a P y Q , respectivamente, y tales que sea $O_P \cap O_Q = \emptyset$.

CONJUNTOS CERRADOS. PUNTOS DE ACUMULACION O PUNTOS LIMITES

Se dice que un conjunto S de E es *cerrado* si el conjunto de los puntos que no pertenecen a S es abierto, es decir, S es cerrado si su complemento S^c es abierto.

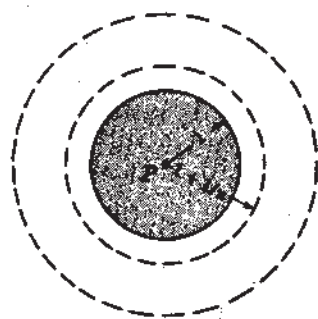


Fig. 6-3

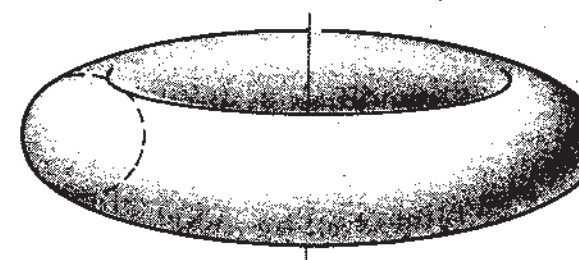


Fig. 6-4

Se dice que un punto P es *punto de acumulación* o *punto límite* de un conjunto S de E si cualquier entorno esférico reducido $S'(P)$ de P contiene al menos un punto de S . Recordemos que un entorno esférico reducido $S'(P)$ de P consta de $S(P)$ con exclusión del propio P .

Ejemplo 6.3.

- Sea S un disco abierto de E^2 , como se muestra en la figura 6-5. Es evidente que cada uno de los puntos de S es punto de acumulación o punto límite de S , pues todo entorno reducido suyo contiene puntos de S . Los propios puntos de la circunferencia, aunque no pertenezcan a S , son puntos de acumulación de S , pues todo entorno reducido de ellos tendrá con S una intersección no vacía.

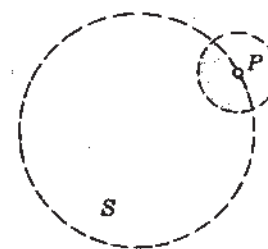


Fig. 6-5



Fig. 6-6

- Sea S el conjunto infinito de puntos $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ del eje x , como se ve en la figura 6-6. En este caso, 0 es un punto de acumulación de S , pues cualquier entorno reducido de 0 contiene por lo menos un punto de S . Se puede demostrar que 0 es el único punto límite del conjunto.

Ahora, bien: Supongamos un conjunto S de E que goce de la propiedad de que todo punto de acumulación de S pertenezca a S . Sea P un punto arbitrario que no pertenezca a S , es decir, sea P un punto de S^c . Es evidente que P no es punto límite de S puesto que S contiene sus puntos de acumulación. De esta suerte, existe algún $S(P)$ completo que no contenga puntos de S . Se infiere que S^c es abierto, pues para un P arbitrario, perteneciente a S^c , hallamos un $S(P)$ en S^c . Pero, si S^c es abierto, entonces S es cerrado. Así, pues, si un conjunto contiene sus puntos de acumulación es cerrado.

El recíproco, que también es verdadero, se demostrará en el problema 6.5. De esta manera, tenemos el

Teorema 6.3. Un conjunto de E es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos límites.

Se denomina *clausura* de un conjunto S y se designa por \hat{S} , a un conjunto que consta de S y del conjunto de los puntos de acumulación de S . En alguno de los problemas resueltos demostraremos que \hat{S} es el menor conjunto cerrado que contiene a S ; es decir, (a) \hat{S} es cerrado; (b) si T es cerrado y $S \subseteq T$, entonces $\hat{S} \subseteq T$.

Ejemplo 6.4.

- (a) Aludimos al conjunto del ejemplo 6.1(b) que está formado por el semi-plano $x_1 > 0$ y el eje x_1 . Este conjunto no es ni abierto ni cerrado. Los puntos del eje x_2 , son puntos límites del conjunto, pero no pertenecen a él. Si incluyéramos estos puntos límites, es decir, si consideráramos el conjunto formado por el semi-plano $x_1 \geq 0$ y el eje x_1 , tendríamos un conjunto cerrado que es la clausura del conjunto dado.
- (b) Cada punto de E^2 es un punto de acumulación del conjunto de los puntos racionales de E^2 , pues todo entorno reducido de cada punto del plano x_1x_2 contiene un punto racional.

Por último, se dice que un conjunto de E es *acotado* si está contenido en algún entorno de un punto. Por ejemplo, en el E^1 , S es acotado si y sólo si está contenido en un intervalo abierto finito; en el E^2 , S es acotado si y sólo si está contenido en un disco abierto; y en el E^3 , S es acotado si y sólo si está contenido en una esfera abierta.

Ejemplo 6.5.

- (a) El conjunto de los puntos $1, 1/2, 1/3, \dots$ de E^1 , es acotado. En efecto, está contenido en el intervalo $0 < x < 2$.
- (b) Los puntos racionales (p, q) del plano x_1x_2 no son acotados.
- (c) Es evidente que un conjunto finito de puntos de E es acotado.

CONJUNTOS CONEXOS

Consideremos un conjunto S que consta de dos discos cerrados disjuntos de E^2 , como se ve en la figura 6-7. Como la distancia entre los discos no es nula, existirán conjuntos abiertos O_1 y O_2 cuya unión contenga a S y tales que sus correspondientes intersecciones con S sean no-vacías y disjuntas. En general, se dice que un conjunto S de E es *inconexo* si, como en el caso anterior, existen conjuntos abiertos O_1 y O_2 tales que, (a) $S \subseteq O_1 \cup O_2$ (O_1 y O_2 cubren a S), (b) $O_1 \cap S \neq \emptyset$, $O_2 \cap S \neq \emptyset$ (tanto O_1 como O_2 tienen con S intersecciones no-vacías), y (c) $(O_1 \cap S) \cap (O_2 \cap S) = \emptyset$. (Las intersecciones de O_1 y O_2 con S son disjuntas.) Un conjunto S , no-vacío, se denomina *conexo* si no es inconexo.

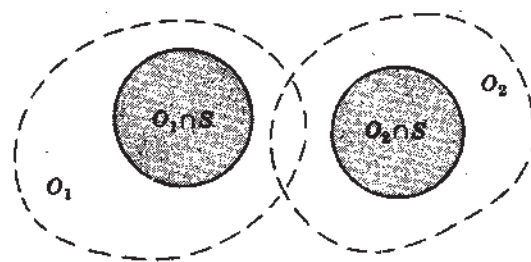


Fig. 6-7

Ejemplo 6.6.

- (a) De los numerales (b) y (c) antedichos, se desprende que un conjunto inconexo debe tener al menos dos puntos. De esta suerte, un conjunto que conste de un único punto, es conexo. Por otra parte, un conjunto finito de E que conste de dos o más puntos es inconexo.
- (b) En el desarrollo del problema 6.14 de la página 123, se demostrará que los únicos conjuntos conexos de E^1 son los intervalos. (Incluimos el caso de un punto único $a \leq x \leq a$.)
- (c) Los siguientes son ejemplos de conjuntos conexos de E^3 : (i) un segmento de recta; (ii) una esfera abierta; (iii) un toro; (iv) un toro conjuntamente con su interior, que es el llamado *toro sólido* o *cerrado*.

Un conjunto de E abierto y conexo se denomina un *dominio*.

Ejemplo 6.7.

- (a) Los siguientes son ejemplos de dominios:
- (i) El conjunto abierto determinado por dos esferas concéntricas de E^3 .
 - (ii) El semi-plano $x_1 > a$ en E^2 .
 - (iii) El interior de un toro, o *toro abierto*.
- (b) Los siguientes conjuntos no son dominios:
- (i) El toro sólido de E^3 (es conexo, pero no abierto).
 - (ii) Dos discos abiertos disjuntos de E^2 (son abiertos, pero no conexos).

Se dice que un conjunto S de E , no-vacío es *arco-conexo* si dos puntos de S se pueden unir con un arco continuo completamente contenido en S . Para precisar, decimos que S es *arco-conexo* si, dados dos puntos cualesquiera de S , por ejemplo, x_1 y x_2 , existe una función continua $x(t)$, definida en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, y tal que, (a) $x(t)$ pertenece a S para todo valor de t , y (b) $x(0) = x_1$, $x(1) = x_2$.

Ejemplo 6.8.

- (a) Un conjunto que tiene un único punto x_1 es arco-conexo, pues $x(t) = \text{constante} = x_1$, y eso basta.
- (b) Es evidente que, de por sí, E es arco-conexo, pues la función $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $0 \leq t \leq 1$ es una recta que une puntos cualesquiera x_1 y x_2 .
- (c) Se puede demostrar que en E^1 un conjunto es arco-conexo si y sólo si es un intervalo. De esta suerte, en E^1 los conjuntos conexo y arco-conexo son los mismos conjuntos.

Si un conjunto S de E es arco-conexo, entonces es conexo. En efecto, supongamos que S fuera arco-conexo, pero inconexo. Entonces, existirían conjuntos abiertos O_1 y O_2 que contendrían a S y tendrían con S intersecciones no-vacías y disjuntas, como se muestra en la figura 6-8.

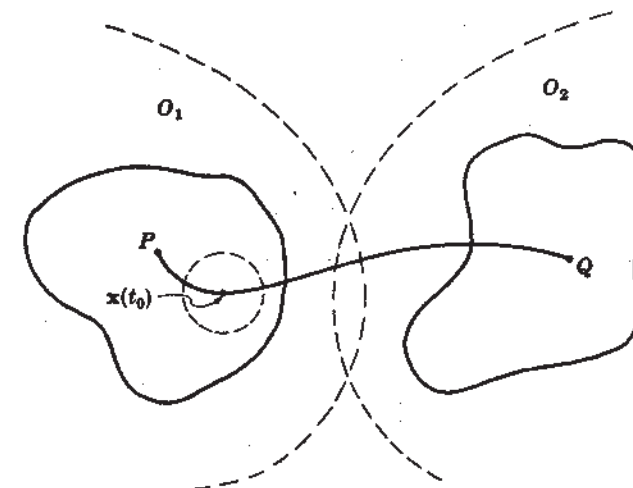


Fig. 6-8

Supongamos ahora que P pertenece a $S \cap O_1$ y que Q pertenece a $S \cap O_2$ y, además, que $x = x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, es un arco continuo que va desde P hasta Q en S . Consideremos luego, en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, la función numérica en los reales, $f(t)$, definida así

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x(t) \text{ está en } S \cap O_1 \\ -1, & \text{si } x(t) \text{ está en } S \cap O_2 \end{cases}$$

Puesto que $x(t)$ pertenece a S y $S \subseteq O_1 \cup O_2$, se infiere que f está definida para todo t perteneciente a $0 \leq t \leq 1$. Además, es uniforme, pues $S \cap O_1$ y $S \cap O_2$ son disjuntos. Ahora, bien, deseamos demostrar que $f(t)$ es continua para todo valor de t . Consideremos $t = t_0$ y supongamos que $x(t_0)$ es de $S \cap O_1$, por ejemplo, como se muestra en la figura. Entonces, $x(t_0)$ sería de O_1 y, como O_1 es abierto, existiría un $S_\epsilon(x(t_0))$, también de O_1 . Como quiera que $x(t)$ es continua en t_0 , existiría un $S_\delta(t_0)$, tal que $x(t)$ sea de $S_\epsilon(x(t_0))$, y, en consecuencia, de $S \cap O_1$ para t perteneciente a $S_\delta(t_0)$. Pero, entonces $f(t) = 1$ si t está en $S_\delta(t_0)$. De esto se desprende que $f(t)$ sería continua en t_0 . Si $x(t_0)$ es de $S \cap O_2$, la argumentación es análoga. De esta suerte, $f(t)$ sería continua en todo el intervalo $0 \leq t \leq 1$. Pero esto es imposible, porque una función continua que toma el valor 1 en $t = 0$ y el valor -1 en $t = 1$, debe tomar todos los valores entre -1 y 1 , de acuerdo con un teorema de cálculo elemental, y no en este caso de la función $f(t)$. Tenemos, pues, en esta forma el siguiente

Teorema 6.4. Si un conjunto S de E es arco-conexo, entonces es conexo.

Si bien el recíproco de este teorema es verdadero en E^1 , no lo es para cualquier E en general, como se comprueba en el problema 6.20. Es decir, existen en E^2 conjuntos conexos que no son arco-conexos. Con todo, si S es conexo y abierto en E , entonces es arco-conexo en E . Por ello, en el problema 6.13 demostraremos el

Teorema 6.5. Un dominio es arco-conexo.

CONJUNTOS COMPACTOS

Se llama *recubrimiento abierto* de un conjunto S de E a una familia de conjuntos abiertos cuya unión contiene a S . Se denomina *subrecubrimiento* a un subconjunto del recubrimiento abierto que tenga la misma propiedad que éste. Recibe el nombre de *recubrimiento finito* un recubrimiento abierto que consta de un número finito de conjuntos. Es evidente que, para todo conjunto de E , existe un recubrimiento abierto, a saber: la familia que consta únicamente del propio conjunto E .

Ahora, bien, se dice que un conjunto S de E es *compacto* si a cada recubrimiento abierto $\{O_\alpha\}$ de S le corresponde un subrecubrimiento finito $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}\}$.

Ejemplo 6.9.

Todo conjunto finito de puntos es compacto. En efecto, supongamos que sea $S = \{P_1, \dots, P_n\}$ un conjunto finito y $\{O_\alpha\}$ un recubrimiento abierto arbitrario de S ; es decir, los O_α son abiertos y $S \subseteq \bigcup_\alpha O_\alpha$. Ahora, bien, por cada P_i escogamos un O_{α_i} del recubrimiento que contenga a P_i . Entonces es evidente que $\{O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, \dots, O_{\alpha_n}\}$ es un subrecubrimiento finito de S . Puesto que $\{O_\alpha\}$ fue escogido arbitrariamente, S es compacto.

Ejemplo 6.10.

Sea S el conjunto finito $\{1, 1/2, 1/3, \dots\}$ de E^1 , que se muestra en la figura 6-9. Este conjunto no es compacto, pues podemos mostrar un recubrimiento abierto de S que no tenga subrecubrimiento finito. A saber: Supongamos que $O_1 = \{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$ y que O_n designe el intervalo abierto $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n-1}$ para $n \geq 2$. Es evidente que O_n contiene a $1/n$ y,



Fig. 6-9

de esta suerte, la familia infinita $\{O_n\}$, $n = 1, \dots$, es un recubrimiento abierto de S . Pero, obsérvese que cada O_n contiene únicamente el punto $1/n$ de S y, por ello, ningún subrecubrimiento finito podría llegar a contener la totalidad de S .

Supongamos ahora que S es un conjunto compacto. Por cada P de S escogamos un $S(P)$ arbitrario. La colección de estos entornos es un recubrimiento abierto de S y, como S es compacto, existe un subrecubrimiento finito $S(P_1), S(P_2), \dots, S(P_n)$. Pero, la unión de un conjunto finito de entornos es, evidentemente, un conjunto acotado. Como S está contenido en la unión, entonces S es acotado. Y, de esta suerte, un conjunto compacto es acotado.

Además, un conjunto compacto S es cerrado. En efecto, supongamos que Q es un punto arbitrario de su complemento S^c . Por cada P perteneciente a S existen un $S(P)$ y un $S^P(Q)$ tales que $S(P) \cap S^P(Q) = \emptyset$. Es evidente que la familia $\{S(P)\}$ es un recubrimiento abierto de S , y, puesto que S es compacto, existe un subrecubrimiento finito $\{S(P_1), S(P_2), \dots, S(P_n)\}$. Sea, ahora, $O = \bigcap S^P(Q)$ la intersección de los correspondientes entornos de Q . Obsérvese que O contiene a Q y es abierto. Y, además,

$$O \cap \left(\bigcup S(P_i) \right) = \bigcup (O \cap S(P_i)) = \bigcup (\emptyset) = \emptyset$$

Pero, $S^P(Q) \cap S(P_i) = \emptyset$. En consecuencia, $O \cap \left(\bigcup S(P_i) \right) = \emptyset$. Como quiera que $S(P_i)$ cubre a S , se infiere que $O \cap S = \emptyset$. Así, pues, $O \subseteq S^c$. Empero, O es abierto y contiene a Q . Por tanto, existe el $S(Q) \subseteq S^c$. De esta suerte, a un Q arbitrario de S^c le corresponde un entorno de Q en S^c . De esto se deduce que S^c es abierto y, en consecuencia, que S es cerrado.

De modo que un conjunto compacto es cerrado y acotado. La recíproca de esta proposición también es verdadera en E y se conoce con el nombre de teorema de Heine-Borel. Para su demostración, el lector debe recurrir a un texto de cálculo superior. Tenemos, pues, el

Teorema 6.6. Un conjunto de E es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

APLICACIONES CONTINUAS

Sean los espacios euclídeos E y F , y S un subconjunto de E . Sea f una aplicación de S en F , es decir, a cada P perteneciente a S se le hace corresponder un punto $f(P)$ perteneciente a F . Se dice que la aplicación f es *continua* en un punto P_0 de S si, como se muestra más adelante en la figura 6-10, a cada entorno $S(f(P_0))$ de F , se le puede asignar un correspondiente entorno $S(P_0)$ en E , tal que $f(P)$ esté en $S(f(P_0))$ para todo P interior a $S(P_0) \cap S$. O, como también puede decirse, f es continua en P_0 si por cada $S(f(P_0))$ existe un $S(P_0)$ tal que $f(S(P_0) \cap S) \subseteq S(f(P_0))$. La aplicación f se dice que es continua en S o simplemente continua, si es continua en cada punto de S .

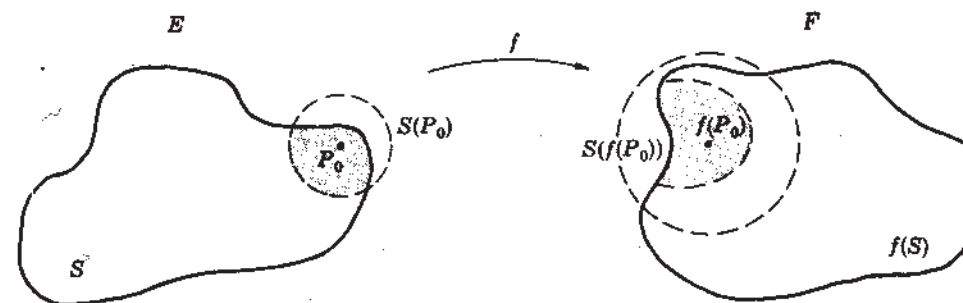


Fig. 6-10

Ejemplo 6.11.

(a) La aplicación constante, $f(P) = Q_0$, que a cada punto P de un conjunto S de E le asigna un punto fijo Q_0 de F , es continua en S . En efecto, supongamos que P_0 es un punto arbitrario de S y que $S(f(P_0)) =$

$S(Q_0)$ es un entorno arbitrario de $f(P_0)$. Pero, para todo P de S , y, por tanto, para todo P de cualquier $S(P_0)$ de P_0 , se tiene $f(P) = Q_0$ en $S(Q_0)$. Así, pues, f es continua en P_0 . Y, puesto que P_0 es un punto arbitrario de S , f es continua en S .

- (b) Sean: S una esfera de E^3 y L un plano tangente a ella, como se muestra en la figura 6-11. Supongamos que cada P de S tenga un $f(P)$ como proyección ortogonal sobre L . Esta aplicación es continua para todo P_0 de S . En efecto, dado un $S_\epsilon(f(P_0))$, escogamos $\delta = \epsilon$. En ese caso, si P pertenece a $S_\delta(P_0) \cap S$, su proyección, $f(P)$, pertenecerá a $S_\epsilon(f(P_0))$.

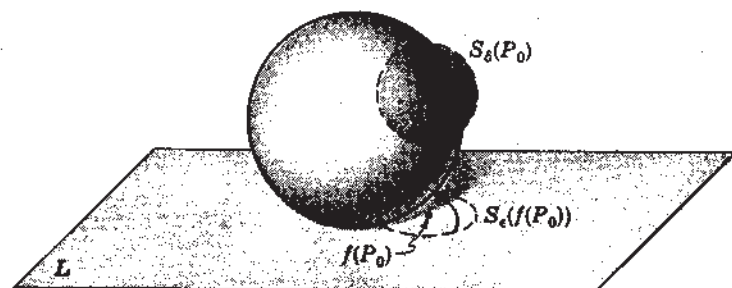


Fig. 6-11

- (c) La ecuación polar

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

define una aplicación, f , de la semi-faja $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, perteneciente al plano $r\theta$, en el plano xy . Esta aplicación es continua en cada (r_0, θ_0) . Consideremos, en primer lugar, $r_0 \neq 0$ y sea $S_\epsilon(f(r_0, \theta_0)) = S_\epsilon(x_0, y_0)$ un entorno arbitrario de $f(r_0, \theta_0)$. Tal cual se indica en la figura 6-12, escogamos $\Delta r > 0$ y $\Delta \theta > 0$ suficientemente pequeños para que los puntos (x, y) pertenezcan a $S_\epsilon(x_0, y_0)$. (Las coordenadas polares de (x, y) son (r, θ) , en donde $0 < r_0 - \Delta r < r < r_0 + \Delta r$, y $\theta_0 - \Delta \theta < \theta < \theta_0 + \Delta \theta$, están en $S_\epsilon(x_0, y_0)$.) Entonces, a cada (r, θ) perteneciente a la región rectangular abierta R dada por

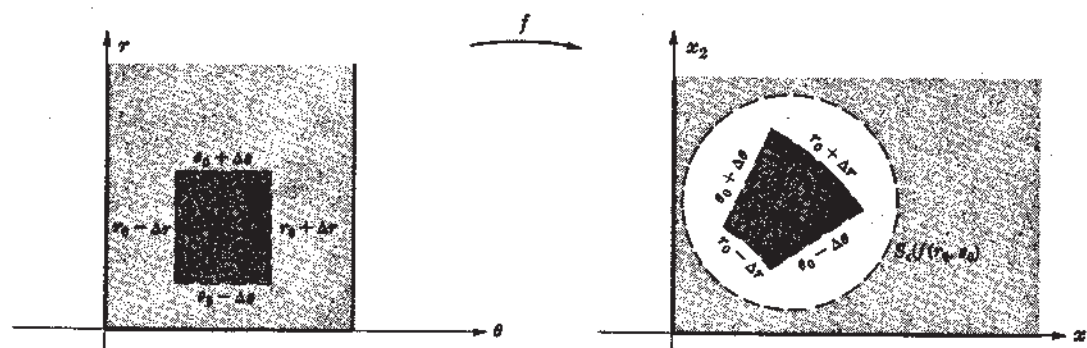


Fig. 6-12

$r_0 - \Delta r < r < r_0 + \Delta r$, $\theta_0 - \Delta \theta < \theta < \theta_0 + \Delta \theta$, tenemos que $f(r, \theta)$ es interior a $S_\epsilon(x_0, y_0)$. Pero, ahora, escogamos cualquier $S_\delta(r_0, \theta_0)$ de R . Entonces para (r, θ) en $S_\delta(r_0, \theta_0)$, tendremos que $f(r, \theta)$ será interior a $S_\epsilon(x_0, y_0)$. Como $S_\epsilon(x_0, y_0)$ es arbitrario, f será continua en (r_0, θ_0) . En caso de que sea $r_0 = 0$ (obsérvese que $f(0, \theta_0) = (0, 0)$), escogeremos $\delta = \epsilon$. Entonces, si (r, θ) pertenece a $S_\delta(0, \theta_0)$, tendremos que $0 \leq r < \delta$ o sea, $0 \leq r < \epsilon$; y, en consecuencia, $f(r, \theta) = (x, y)$ pertenecerá a $S_\epsilon(0, 0)$. Así, pues, f es continua en $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

- (d) Las ecuaciones

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \begin{cases} u^2 + v^2, & \text{para } u \geq 0 \\ 1, & \text{para } u < 0 \end{cases}$$

definen una aplicación del plano uv en E^3 . Tal como se muestra en la figura 6-13, el conjunto de imágenes (puntos asignados) es una superficie formada por el semi-plano ($u < 0$) y el medio paraboloide ($u \geq 0$). La aplicación es continua para $u < 0$, $u > 0$, y en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ en donde se cortan el plano y el paraboloide. La aplicación no es continua para los restantes puntos del eje de los v .

Por ejemplo, consideremos el punto $(0, \frac{1}{2})$. En él, $f(0, \frac{1}{2}) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, que es un punto del contorno del paraboloide. Supongamos ahora que ϵ es tan pequeño que $S_\epsilon(f(0, \frac{1}{2}))$ no corta al plano; para ello, basta que $\epsilon \leq \frac{3}{4}$. Ahora, bien, si f fuera continua en $(0, \frac{1}{2})$, existiría un $S_\delta(0, \frac{1}{2})$ tal que, para todo (u, v) de $S_\delta(0, \frac{1}{2})$, $f(u, v)$ debería estar en $S_\epsilon(f(0, \frac{1}{2}))$. Pero, en todo $S_\delta(0, \frac{1}{2})$ existe un (u, v) , en donde $u < 0$. Para este (u, v) , $f(u, v)$ está en el plano y, por tanto, no pertenece a $S_\epsilon(f(0, \frac{1}{2}))$. Así, pues, f no es continua en $(0, \frac{1}{2})$.

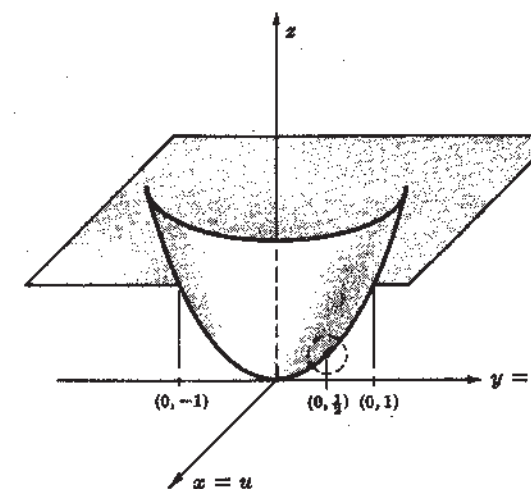


Fig. 6-13

Sean los espacios euclídeos E y F , y S un conjunto conexo de E y f una aplicación continua de S en F . Demostraremos que la imagen, $f(S)$, es un conjunto conexo de F . En efecto, supongamos que no fuera así. Entonces, existirían los conjuntos abiertos O_1 y O_2 tales que $f(S) \subseteq O_1 \cup O_2$, $f(S) \cap O_1 \neq \emptyset$, $f(S) \cap O_2 \neq \emptyset$, y $f(S) \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Supongamos que A_1 representa al conjunto $f(S) \cap O_1$ y A_2 al conjunto $f(S) \cap O_2$, y que P es un punto de S tal que $f(P)$ pertenece a A_1 , y Q un punto de S tal que $f(Q)$ pertenece a A_2 . Tales puntos existen, pues A_1 y A_2 no son vacíos. Como quiera que A_1 pertenece a O_1 y éste es abierto, existirá un $S(f(P))$ en O_1 . Y como f es continua, existirá un $S(P)$ perteneciente a E tal que $f(S(P))$ pertenezca a $S(f(P))$ y, por tanto, a O_1 . Supongamos ahora que $W_1 = \bigcup_P S(P)$ para todo P de S tal que $f(P)$ pertenece a A_1 . Análogamente, convegiémos que $W_2 = \bigcup_Q S(Q)$, en donde $f(Q)$ pertenece a A_2 . En este caso, $f(S(Q))$ es de O_2 para todo valor de Q . Ahora bien, es evidente que W_1 y W_2 son abiertos de E , pues son uniones de conjuntos abiertos (los entornos). Además, $S \subseteq W_1 \cup W_2$ y $S \cap W_1 \neq \emptyset$ y $S \cap W_2 \neq \emptyset$. Por último, $S \cap W_1$ y $S \cap W_2$ son disjuntos. Por supuesto que P^* pertenecerá a $S \cap W_1 \cap W_2$. Puesto que P^* pertenece tanto a W_1 como a W_2 , entonces existen puntos P de W_1 y Q de W_2 tales que P^* pertenece tanto a $S(P)$ como a $S(Q)$. De esta suerte, $f(P^*)$ pertenecerá simultáneamente a O_1 y O_2 . Pero, además, P^* pertenece a S y, por ello, $f(P^*)$ pertenecerá a $f(S)$, lo cual es imposible porque $O_1 \cap O_2 \cap f(S) = \emptyset$. De este modo, tenemos el

Teorema 6.7. La imagen de un conjunto conexo debida a una aplicación continua, es conexa.

Por otra parte, en el problema 6.24 de la página 127 se demostrará el

Teorema 6.8. La imagen de un conjunto compacto debida a una aplicación continua es compacta.

En el cálculo aprendimos que una función numérica en los reales y continua, $f(t)$, definida en un intervalo cerrado I , adopta en éste sus valores máximo absoluto y mínimo absoluto. Es decir, existen en I valores t_1 y t_2 tales que $f(t) \leq f(t_1)$, para todo valor t en I y $f(t) \geq f(t_2)$ para todo t en I . Lo mismo vale, en general, para las funciones continuas numéricas en el campo real, definidas en conjuntos compactos. En efecto, supongamos que f es una función continua numérica en el campo real, definida en un conjunto compacto C , o, lo que es igual, que f es una aplicación continua de C en E^1 . Entonces, de acuerdo con el teorema 6.8, la imagen $f(C)$ perteneciente a E^1 es también compacta. Como quiera que $f(C)$ es compacta, será cerrada y acotada. Como es acotada, tiene superior M e inferior m . Falta

demostrar que M y m pertenecen a $f(C)$, en cuyo caso, existirán valores P_1 y P_2 pertenecientes a C tales que $f(P) \leq M = f(P_1)$ y $f(P) \geq m = f(P_2)$ para todo valor P de C y, por tanto, f adoptará en ellos el máximo y el mínimo de C . Pero, si $M \notin f(C)$, entonces $M \in [f(C)]^c$. Como $f(C)$ es cerrado, entonces $[f(C)]^c$ es abierto. Mas, en este caso, existirá un intervalo abierto $M - \epsilon < M < M + \epsilon$, en $[f(C)]^c$. En particular, existirá en $M - \epsilon < M < M + \epsilon$ un M_1 tal que $f(P) \leq M_1 < M$ para todo P de C . Sin embargo, esto sería imposible, porque M es la menor de las cotas superiores de $f(C)$. Análogamente, se demuestra que $m \in f(C)$. Así, pues, se tiene el

Teorema 6.9. Una función numérica real continua en un conjunto compacto adopta en él sus valores máximo y mínimo absolutos.

Por último, supongamos los espacios euclídeos E, F y G y que S es un subconjunto de E , T un subconjunto de F , y f una aplicación de S en F tal que $f(S) \subseteq T$, y g una aplicación de T en G . Entonces, para todo P de S existe una composición compuesta $g \circ f$ de S en G definida por $(g \circ f)(P) = g(f(P))$, como se muestra en la figura 6-14.

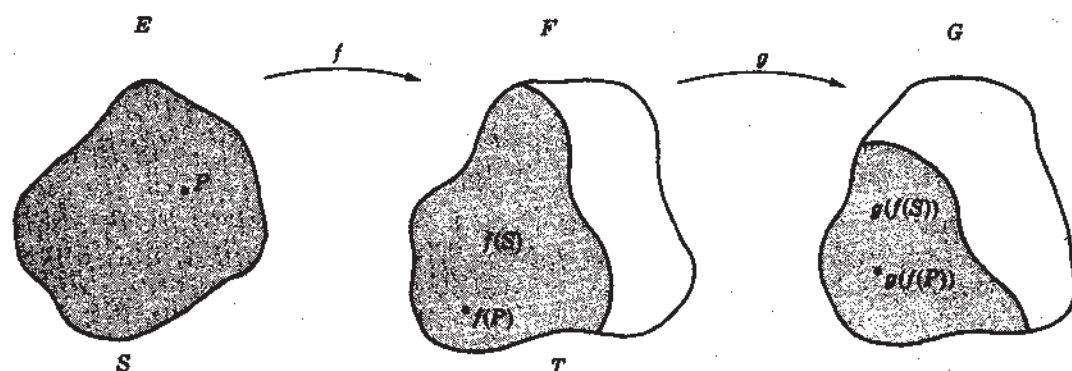


Fig. 6-14

Entre los problemas resueltos demostraremos que si f y g son continuas, entonces $g \circ f$ es continua. Es decir, demostraremos el

Teorema 6.10. Si una aplicación continua se compone con otra aplicación continua, el resultado es una aplicación continua.

HOMEOMORFISMOS

Sea f una aplicación continua de un conjunto S (de E) sobre F . Si f es biyectiva, existe una aplicación inversa f^{-1} de la imagen $f(S)$ de f en S . Si f^{-1} es continua en $f(S)$, entonces f recibe el nombre de aplicación *inyectiva bicontinua* de S sobre F .

Una aplicación inyectiva bicontinua de un conjunto S (de E) sobre un conjunto T (de F) se denomina *aplicación topológica* u *homeomorfismo* de S sobre T . Es evidente que una aplicación inyectiva bicontinua de S (del espacio E) en F , determina un homeomorfismo de S sobre la imagen $f(S)$. Además, si f es un homeomorfismo de S sobre T , entonces f^{-1} es un homeomorfismo de T sobre S . Por último, un conjunto S , de E , se dice que es *topológicamente equivalente* u *homeomorfo* a un conjunto T , de F , si existe un homeomorfismo de S sobre T .

Intuitivamente, concebimos un homeomorfismo como una aplicación en la que puntos vecinos entre sí, permanecen vecinos después de la transformación. De esta suerte, dos figuras son topológicamente equivalentes si existe un movimiento *elástico* que haga coincidir una de las figuras con la otra.

Ejemplo 6.12.

(a) Las ecuaciones

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

definen una aplicación continua e inyectiva, f , del intervalo $0 \leq t < 2\pi$ sobre la circunferencia de centro en el origen y radio igual a uno, en el plano x_1x_2 . Sin embargo, la aplicación no es bicontinua, porque la aplicación inversa f^{-1} que lleva de regreso la circunferencia sobre el intervalo, no es continua en $(1, 0)$. Tal como se muestra en la figura 6-15, cada entorno de $(1, 0)$ contiene puntos (los que están por debajo del eje de x_1) que f^{-1} aplica en puntos vecinos a 2π . De esta suerte, si, por ejemplo, consideramos la mitad del entorno de $f^{-1}(1, 0) = 0$, ocurre que no se puede hallar ningún entorno de $(1, 0)$ cuyas imágenes estén todas contenidas en $S_{1/2}(f^{-1}(1, 0))$. Obsérvese que si la aplicación f se restringe al intervalo $0 \leq t \leq \pi$, como se muestra en la figura 6-16, entonces f es un homeomorfismo sobre la semi-circunferencia. Así, pues, el segmento de recta y la semi-circunferencia son topológicamente equivalentes.

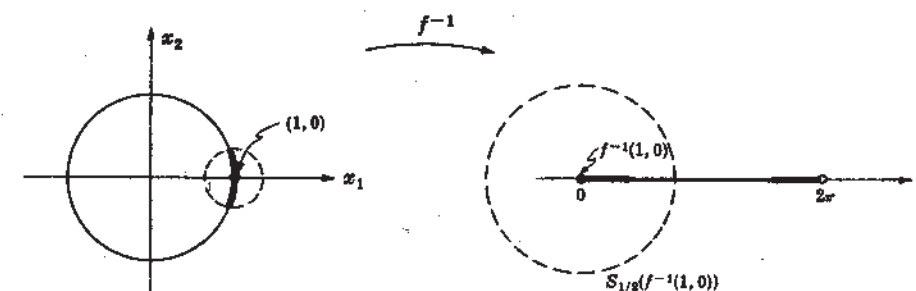


Fig. 6-15

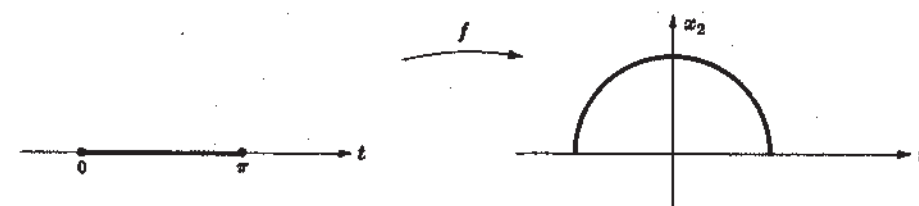


Fig. 6-16

(b) Una clase muy importante de superficies de dos caras en el E^3 es la de las llamadas *esferas de n asas*. Estas superficies se obtienen abriendo $2n$ huecos sobre la esfera y curvando luego n tubos diferentes de manera que sus extremos encajen en los huecos. En la figura 6-17 se representa una esfera de tres asas. Obsérvese que estas superficies son conjuntos cerrados y acotados (compactos) de puntos del E^3 . Se puede demostrar que toda superficie de dos caras, compacta —tal como dentro de poco se definirán las superficies— es topológicamente equivalente a una esfera que tenga cierto número de asas. Por ejemplo, el toro es topológicamente equivalente a la esfera de una sola asa.

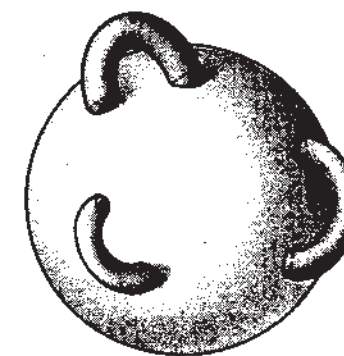


Fig. 6-17

Problemas resueltos

CONJUNTOS ABIERTOS. CONJUNTOS CERRADOS

6.1. Establecer cuáles de los siguientes conjuntos son, (i) abiertos, (ii) cerrados, (iii) acotados. Y hallar, (iv) su conjunto de puntos de acumulación, (v) su clausura.

- Los enteros $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ a todo lo largo de E^1 .
 - Todos los (x, y) del plano xy , tales que $xy \neq 0$.
 - El conjunto $\{1 + \frac{1}{n}, -(1 + \frac{1}{n}), (1 + \frac{1}{n}), -(1 + \frac{1}{n}), \dots, (-1)^n(1 + \frac{1}{n}), \dots\}$ en E^1 .
 - Un toro del E^3 .
- El conjunto es cerrado, pues su complemento es una unión de conjuntos abiertos $n - 1 < x < n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Es evidente que el conjunto no es acotado. Y no tiene puntos límites o de acumulación, porque, dado cualquier número real x_0 , podemos hallar un entorno reducido de x_0 que no contenga ningún entero. Su clausura es él mismo.
 - Este conjunto es el plano xy exceptuando los ejes x y y . Es abierto, pues cualquier punto (x_0, y_0) del conjunto tendrá una distancia mínima, no nula, $d = \min\{|x_0|, |y_0|\}$, al eje x o al eje y , por ello, puede incluirse en un entorno que esté completamente dentro del conjunto. No es acotado. Todo punto del conjunto es punto de acumulación suyo. Pero, también los puntos de los ejes x y y son puntos límites. De esta suerte, el conjunto de los puntos de acumulación es el plano xy completo, y su clausura es, también, el plano xy completo.
 - Este conjunto no es ni abierto ni cerrado. Como se muestra en la figura 6-18, existe un punto del conjunto, el $(1 + \frac{1}{2})$, tal que cualquier entorno suyo contiene puntos que no pertenecen al conjunto. En consecuencia, el conjunto no es abierto. Por otra parte, cualquier entorno del número 1, perteneciente al complemento del conjunto, contiene un número del conjunto (es decir, un punto que no pertenece al complemento). Se ve, pues, que el complemento no es abierto, de modo que el conjunto no es cerrado. El conjunto es acotado, pues está contenido en el intervalo $-2 < x < 2$. Sus puntos de acumulación (límites) son 1 y -1 . Estos números junto con los del conjunto, conforman su clausura.



Fig. 6-18

- La superficie de un toro es cerrada, porque cualquier punto de su complemento tendrá una distancia al toro, no nula, y por tanto estará contenido en un entorno que a su vez estará contenido en el complemento. Así, pues, el complemento es abierto, y, por tanto, la superficie es cerrada. El toro es acotado. Cada punto del toro es de acumulación, pues todo entorno reducido de un punto del toro tiene con él una intersección no vacía. No existen más puntos límites, pues un conjunto cerrado contiene sus puntos de acumulación. La clausura del toro es él mismo.

6.2. Formular la negación de la proposición, " S es un conjunto abierto de E^n ".

S no es un conjunto abierto de E^n si existe un punto P de S tal que cualquier entorno de P contenga algún punto que no pertenezca a S .

6.3. Formular la negación de la proposición, " P es un punto de acumulación de S ".

P no es un punto de acumulación de S si existe un entorno reducido de P que contenga puntos que no pertenezcan a S , o, lo que es igual, P no es un punto de acumulación de S si existe un entorno reducido de P que esté contenido en el complemento de S .

6.4. Demostrar que la unión de un número finito de conjuntos cerrados de E es cerrada.

Una de las leyes de De Morgan para conjuntos señala que el complemento de la unión de conjuntos es la intersección de sus complementos, es decir,

$$(\cup S_i)^c = \cap (S_i^c)$$

De esta suerte, si S_i , $i = 1, \dots, n$, es un número finito de conjuntos cerrados, entonces, cada uno de los S_i^c es abierto. Y como la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierta, del

teorema de De Morgan se desprende que $\cap S_i^c = (\cup S_i)^c$ es abierta. Y, por consiguiente, $\cup S_i$ es cerrada, que era lo que se deseaba demostrar. Obsérvese que la unión de un número infinito de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada. Por ejemplo, la unión de los intervalos cerrados $-1 + 1/n \leq x \leq 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, en E^1 es el intervalo abierto $-1 < x < 1$.

6.5. Demostrar que un conjunto cerrado contiene sus puntos de acumulación.

Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que S es cerrado y que P es un punto límite de S , pero que no pertenece a S . Como P es cerrado, S^c es abierto. Y como P pertenece a S^c , y S^c es abierto, entonces, existe un entorno $S(P)$ de P que está contenido en S^c . O sea, que existirá un $S(P)$ que no contiene puntos de S . Pero, esto es imposible porque P es un punto de acumulación de S y cualquier entorno reducido suyo debe contener algún punto de S , lo cual demuestra la proposición.

6.6. Demostrar que si P es un punto de acumulación de S , entonces todo entorno de P contiene infinitos puntos de S .

Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que P es un punto de acumulación de S y que existe un entorno de P que contiene únicamente un número finito de puntos de S , distintos de P , por ejemplo, los puntos Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Obsérvese que existe, por lo menos, uno de tales Q_i , pues P es un punto límite de S . Supongamos ahora que ϵ es la distancia entre P y el Q_i más próximo. Es decir, supongamos que es $\epsilon = \min\{d(P, Q_1), d(P, Q_2), \dots, d(P, Q_n)\}$. Entonces, $S_\epsilon(P)$ no contendrá puntos de S distintos de P . Pero, ello es imposible porque P es un punto de acumulación de S . De este modo, queda demostrada la proposición.

6.7. Demostrar que la clausura de un conjunto es un conjunto cerrado.

De acuerdo con el teorema 6.3, bastará demostrar que la clausura \hat{S} de un conjunto S contiene la totalidad de sus puntos de acumulación. Con este fin, supongamos que P es un punto límite de S . Entonces, todo entorno $S(P)$ de P contendrá por lo menos un punto Q perteneciente a S y tal que $Q \neq P$. Entonces, o el propio Q pertenece a S o es Q un punto de acumulación de S , en cuyo caso todo entorno $S(Q)$ de Q contendrá algún punto Q^* de S . Como es posible escoger a $S(Q)$ de manera que $S(Q)$ esté situado en $S(P)$ y $P \notin S(Q)$, podemos asegurar que $Q^* \in S(P)$ y $Q^* \neq P$. Así, pues, en uno u otro caso, $S(P)$ contendrá un punto de S distinto de P , y es P un punto de acumulación de S , tal como se quería.

6.8. Un punto P de S se denomina *punto interior* de S si existe algún entorno esférico de P totalmente contenido en S . El conjunto de los puntos interiores de S recibe el nombre de *interior* de S . Observemos que cualquier punto de un conjunto abierto es un punto interior del conjunto. Por esto, un conjunto abierto es igual a su interior. Demuéstrese que, en general, el interior de un conjunto es un conjunto abierto.

Supongamos que T designa el interior de S y que P es un punto arbitrario de T . Puesto que P es un punto interior de S , existirá un entorno $S(P)$ contenido en S , tal como se muestra en la figura 6-19. Supongamos, ahora, que Q es un punto en el interior de $S(P)$. Como $S(P)$ es abierto, existirá un $S^*(Q)$ contenido en $S(P)$ y, en consecuencia, contenido en S . De esto se infiere que Q también pertenece a T , que es el interior de S . Como Q es un punto arbitrario de $S(P)$, entonces la totalidad de $S(P)$ está contenida en T . Y como P es un punto arbitrario de T , se deduce que T es abierto.

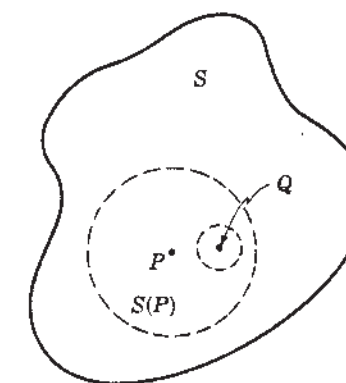


Fig. 6-19

CONJUNTOS CONEXOS. CONJUNTOS COMPACTOS

6.9. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son, (a) conexos, (b) compactos.

(i) La región plana, abierta e infinita, en forma de cuña, comprendida entre dos rectas que se cortan, y que se muestra en la figura 6-20. (ii) El conjunto de los puntos x_1, x_2, x_3 de E^3 tales que $x_1 \neq 0$. (iii) El toro sólido.

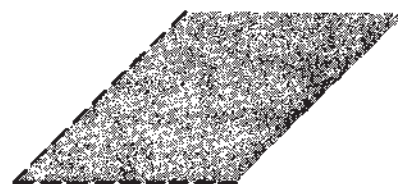


Fig. 6-20

- (i) Dos puntos cualesquiera de la cuña se pueden unir por medio de un segmento de recta. Por tanto, el conjunto es arco-conexo y, en consecuencia, según el teorema 6.4, es conexo. La cuña no es cerrada y, por tanto, de acuerdo con el teorema 6.6, no es compacta.
- (ii) Este conjunto se compone de los dos semi-espacios, $x_1 > 0$ y $x_1 < 0$. De por sí estos son conjuntos no vacíos, disjuntos y abiertos; por tanto, el conjunto formado por los dos es in-conexo. El conjunto aludido no es cerrado y, en consecuencia, no es compacto.
- (iii) El toro sólido es arco-conexo y por ello es conexo. Es cerrado y acotado y, por tanto, compacto.

6.10. Demostrar que el conjunto de puntos (x_1, x_2) de E^2 que cumple la condición de que

$$x_2 = \begin{cases} \text{sen } 1/x_1, & \text{para } 0 < x_1 \leq 1 \\ 0, & \text{para } x_1 = 0 \end{cases}$$

es conexo.

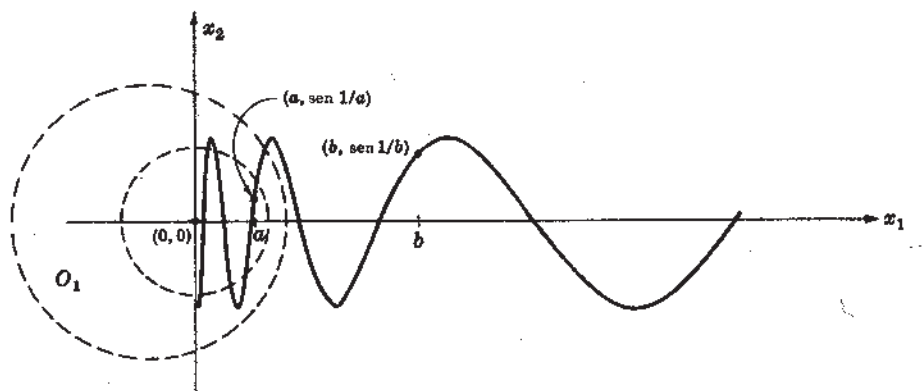


Fig. 6-21

Supongamos que este conjunto no es conexo. Entonces, existirán conjuntos abiertos O_1 y O_2 que contienen a S y que tienen con S intersecciones no-vacías y disjuntas. Supongamos, ahora, que el origen $(0, 0)$ pertenece a $S \cap O_1$, y que, por ejemplo, el punto $(b, \text{sen } 1/b)$, $0 < b \leq 1$, pertenece a $S \cap O_2$, como se muestra en la figura 6-21. Puesto que O_1 es abierto, existirá un $S(0, 0)$ que sea conexo en O_1 . Pero, entonces un entorno del origen contendría un punto $(a, \text{sen } 1/a)$ de S , en donde $0 < a < b$. Consideremos ahora el subconjunto S^* de S , constituido por los puntos (x_1, x_2) , siendo $a \leq x_1 \leq b$. Evidentemente, será $S^* \subseteq O_1 \cup O_2$, pues $S \subseteq O_1 \cup O_2$. Además, será $S^* \cap O_1 \neq \emptyset$ y $S^* \cap O_2 \neq \emptyset$, porque $(a, \text{sen } 1/a)$ está en O_1 y $(b, \text{sen } 1/b)$ está en O_2 . Por último, $S^* \cap O_1$ y $S^* \cap O_2$ serán disjuntos porque $S \cap O_1$ y $S \cap O_2$ son disjuntos. Así, pues, S^* será inconexo. Pero, esto constituye una contradicción, pues S^* es arco-conexo por intermedio de la curva continua $x_2 = \text{sen } 1/x_1$, $0 < a \leq x_1 \leq b$, y, en consecuencia, es conexo. De modo que S es conexo. Observemos que S no es arco-conexo, como se demostrará en el problema 6-20.

6.11. Demostrar directamente, partiendo de la definición y sin utilizar el teorema 6.6, que un disco abierto de E^2 no es compacto.

Deseamos construir un recubrimiento abierto del conjunto dado S que no contenga un subrecubrimiento finito. Supongamos que el disco dado tiene radio igual a r y consideremos la familia infinita de discos abiertos concéntricos $\{O_n\}$ de radios $r - 1/n$, $n = 2, 3, \dots$. Es evidente que $\{O_n\}$

cubre a S ; en efecto, $S = \bigcup_n O_n$. Pero, la unión de cualquier subconjunto finito de los O_n tendrá un radio máximo $r - 1/N$, menor que r y, por tanto, no cubrirá totalmente a S .

6.12. Demostrar que la clausura \hat{S} de un conjunto conexo S es conexa.

Supongamos que \hat{S} no es conexa; en ese caso, existirán conjuntos abiertos O_1 y O_2 que contendrían a \hat{S} y tendrían con ella intersecciones no-vacías y disjuntas. Sea, ahora, P un punto de $\hat{S} \cap O_1$. Ahora, bien, es posible que P pertenezca o que no pertenezca a S . Si lo segundo, P será un punto de acumulación de S , y, en este caso —como O_1 es abierto— existirá un $S(P)$ en O_1 que contenga un punto P^* de S . El mismo razonamiento nos proporcionaría un punto Q^* de S en $S \cap O_2$. Pero, esto implicaría que el propio S no fuera conexo, pues es evidente que O_1 y O_2 contendrían a S , por ser S un subconjunto de \hat{S} . Además, $S \cap O_1 \neq \emptyset$ y $S \cap O_2 \neq \emptyset$, porque P^* es de $S \cap O_1$ y Q^* es de $S \cap O_2$. Por último, $S \cap O_1$ y $S \cap O_2$ son disjuntos, puesto que $\hat{S} \cap O_1$ y $\hat{S} \cap O_2$ lo son. Pero, ello es imposible, porque S es conexo. En consecuencia, \hat{S} es conexa, que era lo que se deseaba demostrar.

6.13. Demostrar el teorema 6.5, a saber: Un dominio (conjunto abierto y conexo) es arco-conexo.

Supongamos que D es un dominio no arco-conexo, y que P_0 y Q_0 son dos puntos de D que no pueden unirse. Convengamos que A designa el conjunto de los puntos de D que se pueden unir con P_0 y que B designa el conjunto de puntos de D que no se pueden unir con P_0 . Es evidente que A y B forman una partición de D ; es decir, $D = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Si se pudiera demostrar que tanto A como B son abiertos, ello implicaría que D no fuera conexo, lo cual es contradictorio. Para demostrar que A es abierto, supongamos que P^* es un punto arbitrario de A y que $S(P^*)$ es un entorno de P^* contenido en D , como se muestra en la figura 6-22. Un entorno tal, existe, pues D es abierto. Pero, como se ve en la figura, todo punto P de $S(P^*)$ se puede unir con P^* mediante un segmento de recta. En consecuencia, todo punto de $S(P^*)$ se puede unir con P_0 , pues P^* puede unirse con P_0 . De esta suerte, $S(P^*)$ está contenido en A . Y, por tanto, A es abierto.

Análogamente, supongamos que Q^* está en B y $S(Q^*)$ en D . Como quiera que todo punto Q de $S(Q^*)$ se puede unir con el Q^* , entonces los puntos de $S(Q^*)$ no pueden unirse con P_0 , porque de lo contrario Q^* podría unirse con P_0 . Así, pues, B es también abierto, que era lo que se quería probar.

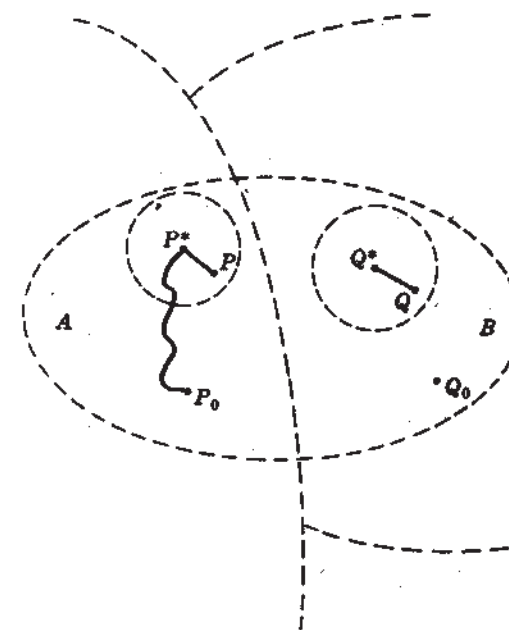


Fig. 6-22

6.14. Demostrar que los intervalos son los únicos conjuntos conexos de E^1 .

Es inmediatamente cierto que los intervalos son arco-conexos y, en consecuencia, son conexos. Recíprocamente, supongamos que S sea un conjunto conexo de E^1 . Supongamos que S es acotado superiormente y que b es el superior de S . Supongamos, además, que S es acotado inferiormente y que a es el inferior de S . Queremos demostrar que cualquier c tal que $a < c < b$, pertenecerá a S . Si no, consideremos los conjuntos abiertos $O_1 = \{x \mid x < c\}$ y $O_2 = \{x \mid x > c\}$. Es un hecho que $S \subseteq O_1 \cup O_2$. Además, $S \cap O_1 \neq \emptyset$, pues de lo contrario c sería una cota superior de S menor que b , lo cual es imposible. Análogamente, $S \cap O_2 \neq \emptyset$. Por último, $O_1 \cap S$ y $O_2 \cap S$ son disjuntos, pues O_1 y O_2 lo son. Pero, ello es imposible, pues S es conexo. De esta suerte, todo c tal que $a < c < b$, pertenece a S . Como quiera que ningún número mayor que b pertenece a S y ningún número menor que a pertenece a S , se colige que S es un intervalo finito. El caso en que S no sea acotado superiormente o inferiormente, se deja al lector como ejercicio.

- 6.15. Demostrar que S es un conjunto conexo de E^2 si y sólo si S es un conjunto conexo cuando se le considera como conjunto de un plano de E^3 .

Supongamos que S es conexo en E^2 pero que no lo es en E^3 ; entonces, existirán en E^3 conjuntos abiertos O_1 y O_2 tales que $S = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap S \neq \emptyset$, $O_2 \cap S \neq \emptyset$, $(O_1 \cap S) \cap (O_2 \cap S) = \emptyset$. Supongamos, ahora, que A es la intersección de O_1 con el plano que contiene a S , y B la intersección de O_2 con tal plano. Obsérvese que $S \subseteq A \cup B$, $A \cap S \neq \emptyset$, $B \cap S \neq \emptyset$, $(A \cap S) \cap (B \cap S) = \emptyset$.

Si se pudiera demostrar que A y B son conjuntos abiertos del plano, tendríamos que S sería inconexo en E^2 , contra lo supuesto. Para demostrar que A es abierto, supongamos que P es un punto de A . Entonces, P será de O_1 . Sea $S^*(P)$ un entorno de P dentro de O_1 (considerado como de E^3). Entonces, la intersección de $S^*(P)$ con el plano que contiene a A será un entorno $S(P)$ dentro de A . Así, pues, A será abierto en el plano. Análogamente, B será abierto; esto probaría que si S es conexo, considerado como un conjunto de E^2 , entonces lo será también cuando se le considere como un conjunto de E^3 .

Recíprocamente, supongamos que S es conexo, mirado como conjunto de E^3 y que es inconexo en el plano. Entonces, existirán conjuntos abiertos A y B del plano tales que $S \subseteq A \cup B$, $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$, y $(S \cap A) \cap (S \cap B) = \emptyset$. Ahora, bien, como quiera que A es abierto en el plano, para cada P , perteneciente a A , existirá un $S(P)$ del plano que estará contenido en A . Sea $S^*(P)$ el entorno de P , cuando se le considera como de E^3 , cuya intersección con el plano sea $S(P)$, y sea $O_1 = \bigcup_P S^*(P)$. Análogamente, para los puntos Q de B sea $O_2 = \bigcup_Q S^*(Q)$. De esto se colige que O_1 y O_2 son conjuntos abiertos de E^3 , tales que $S \subseteq O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap S = A$, $A \neq \emptyset$, $O_2 \cap S = B$, $B \neq \emptyset$, y $(O_1 \cap S) \cap (O_2 \cap S) = \emptyset$. Pero, esto es imposible, porque S es conexo en E^3 , lo cual demuestra la proposición.

APLICACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS

- 6.16. Sea f una aplicación de un conjunto S de puntos de E en el eje de x . Si f es continua en el punto P_0 de S , y si $f(P_0) > 0$, demostrar que existe un $S_\delta(P_0)$ tal que $f(P) > 0$ si es P de $S_\delta(P_0) \cap S$.

Sea $\epsilon = \frac{1}{2}f(P_0)$, como se muestra en la figura 6-23. Consideramos, además, el $S_\epsilon(f(P_0))$, es decir, el intervalo $\frac{1}{2}f(P_0) < x < \frac{3}{2}f(P_0)$. Obsérvese que $\frac{1}{2}f(P_0) > 0$. Como f es continua en P_0 , existe un $S_\delta(P_0)$ tal que $f(P)$ está en $S_\epsilon(f(P_0))$. Y, por tanto, $f(P) > 0$ para todo P de $S_\delta(P_0)$, que era lo que se deseaba encontrar.

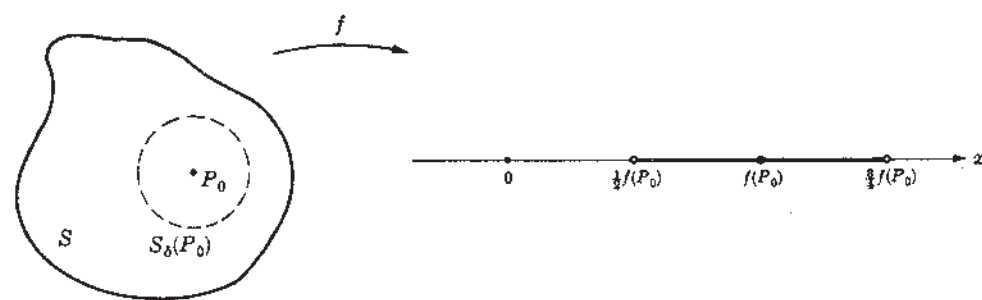


Fig. 6-23

- 6.17. Sea f una aplicación inyectiva continua de S (de E) en F y sea P_0 un punto de acumulación de S . Demostrar que $f(P_0)$ es un punto límite de la imagen $f(S)$.

Supongamos que $S(f(P_0))$ es un entorno arbitrario de $f(P_0)$, como se aprecia en la figura 6-24. Puesto que f es continua en S , existe un $S(P_0)$ tal que $f(P)$ esté en $S(f(P_0))$ y P en $S(P_0) \cap S$. Y como P_0 es un punto límite de S , existe un $Q \neq P_0$ en S y en $S(P_0)$. En consecuencia, $f(Q)$ está en $S(f(P_0))$. Además, $f(Q) \neq f(P_0)$ porque f es inyectiva. Así, pues, a un $S(f(P_0))$ arbitrario le corresponde una $f(Q) \neq f(P_0)$ tal que $f(Q)$ pertenece a $S(f(P_0))$. De esto se deduce que $f(P_0)$ es un punto de acumulación de $f(S)$.

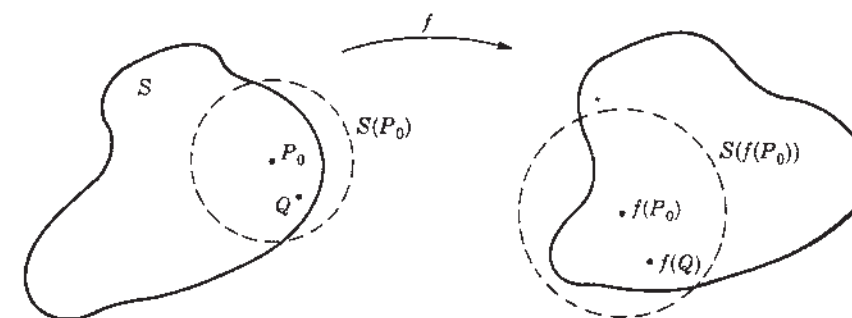


Fig. 6-24

- 6.18. Demostrar que la aplicación del plano uv en el plano xy , dada por las ecuaciones

$$x = u + v, \quad y = u - v$$

es inyectiva y continua.

Es evidente que la aplicación es inyectiva y sobreyectiva sobre el plano xy , y tiene la función inversa $u = \frac{1}{2}(x + y)$, $v = \frac{1}{2}(x - y)$, que se obtiene resolviendo las ecuaciones para u y v en función de x y y . Observemos ahora en la figura 6-25 que la aplicación lleva las rectas coordenadas $u = c = \text{constante}$ sobre la familia de rectas paralelas $x + y = 2c$ y la familia $v = k = \text{constante}$ sobre la familia ortogonal $x - y = 2k$. De esta suerte, dado un entorno $S_\epsilon(x_0, y_0)$ de (x_0, y_0) en el plano xy , escojamos Δu y Δv suficientemente pequeños como para que el rectángulo de lados $x + y = 2(u_0 + \Delta u)$, $x + y = 2(u_0 - \Delta u)$, $x - y = 2(v_0 + \Delta v)$, $x - y = 2(v_0 - \Delta v)$ esté contenido en $S_\epsilon(x_0, y_0)$. Escojamos, ahora, un δ tal que $S_\delta(u_0, v_0)$ esté contenido en el rectángulo $u_0 - \Delta u < u < u_0 + \Delta u$, $v_0 - \Delta v < v < v_0 + \Delta v$. Pero, entonces, por cada (u, v) de $S_\delta(u_0, v_0)$ tenemos un (x, y) de $S_\epsilon(x_0, y_0)$. Y, puesto que (u_0, v_0) es arbitrario, se colige que la aplicación es continua en el plano uv .

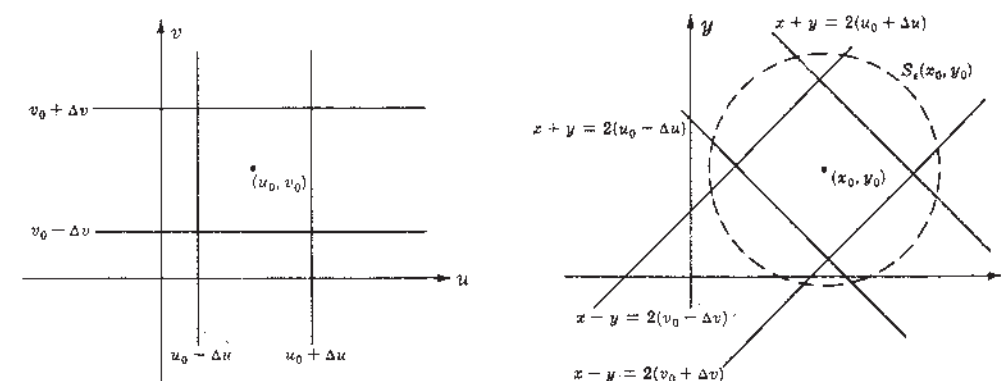


Fig. 6-25

- 6.19. Sea f una aplicación de un conjunto S (de E) en F . Demostrar que f es continua en un punto P_0 de S si y sólo si por cada conjunto abierto O^* de F que contenga a $f(P_0)$, existe un conjunto abierto O de E que contenga a P_0 en forma que $f(P)$ sea de O^* para todo P de $O \cap S$.

Supongamos que f es continua en P_0 y que O^* sea un conjunto abierto que contiene a $f(P_0)$. Como quiera que O^* es abierto, existirá un $S(f(P_0))$ que esté contenido en O^* . Y como f es continua, existirá un $S(P_0)$ tal que $f(P)$ esté en $S(f(P_0))$ y, por tanto, en O^* para P en $S(P_0) \cap S$. Pero, $S(P_0)$ de por sí es un conjunto abierto que contiene a P_0 , con lo cual queda completa la demostración. Para demostrar el recíproco, supongamos que $S(f(P_0))$ es un entorno arbitrario de $f(P_0)$. Puesto que $S(f(P_0))$ es un conjunto abierto, por hipótesis existe un conjunto abierto O de E que contiene a P_0 y tal que $f(P)$ es de $S(f(P_0))$ para P en $O \cap S$. Y como O es abierto y contiene a P_0 , existe un

$S(P_0)$ que está contenido en O . De esto se deduce que $f(P)$ es de $S(f(P_0))$ para P en $S(P_0) \cap S$. Así, pues, f es continua en P_0 , que era lo que se quería demostrar.

6.20. Demostrar que el conjunto de los puntos (x_1, x_2) de E^2 tales que

$$x_2 = \begin{cases} \text{sen } 1/x_1, & \text{para } 0 < x_1 \leq 1 \\ 0, & \text{para } x_1 = 0 \end{cases}$$

no es arco-conexo. (Véase el problema 6.10.)

Supongamos que este conjunto S fuera arco-conexo y que $x = x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, fuera una función continua que une, mediante un arco suyo, los puntos $(0, 0)$ y $(1, \text{sen } 1)$. Deseamos demostrar, en primer lugar, que $x(t)$ pasa por cada uno de los puntos de S , o, lo que es igual, que si R designa la imagen de la aplicación $x = x(t)$ en S , entonces $R = S$. Porque si no, existiría un punto $(b, \text{sen } 1/b)$ de S (siendo $0 < b < 1$), que no estaría contenido en R . De esto se desprendería, —como se puede apreciar en la figura 6-26— que los conjuntos abiertos $x_1 < b$ y $x_1 > b$ del plano $x_1 x_2$ cubren a R y tienen con él intersecciones no-vacías y disjuntas; y esto implicaría que R fuera inconexo, con lo cual se contradiría el teorema 6.7, pues el $[0, 1]$ es conexo. De esta suerte, $R = S$. Empero, ahora se deduciría que S es compacto, porque es la imagen continua de un conjunto compacto $0 \leq t \leq 1$ (teorema 6.8). Mas, entonces S debería ser cerrado, lo cual no ocurre, pues no contiene todos sus puntos de acumulación. Por ejemplo, todo entorno reducido de $(0, \frac{1}{2})$ contiene un punto de S . Por tanto, $(0, \frac{1}{2})$ es un punto límite de S . Pero, $(0, \frac{1}{2})$ no pertenece a S . Así, pues, S no sería arco-conexo, contra lo supuesto, y la proposición queda demostrada.

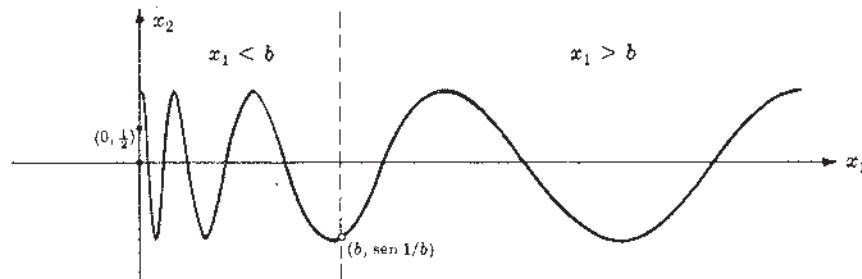


Fig. 6-26

6.21. Sea f una aplicación continua de un conjunto abierto O (de E) en F . Sea, además, O^* cualquier otro conjunto abierto de F . Demostrar que el conjunto de los puntos P de O tales que $f(P)$ es de O^* es un conjunto abierto de E .

Supongamos que S es el conjunto de los puntos P de O tales que $f(P)$ es de O^* . Supongamos, además, que P_0 pertenece a S . Puesto que O^* es abierto, existe un $S(f(P_0))$ que está contenido en O^* . Y como f es continua en O , existe un $S_3(P_0)$ tal que a todo P de $S_3(P_0) \cap O$, le corresponda una $f(P)$ de $S(f(P_0))$ y, por tanto, de O^* . Ahora, bien, si $S_3(P_0)$ está contenido en O , entonces, a todo P de $S_3(P_0)$ le corresponderá una $f(P)$ de O^* , de tal modo que $S_3(P_0)$ sea de S . Sin embargo, si $S_3(P_0)$ no está contenido en O , por ser éste abierto, existirá algún $S_7(P_0)$ de O , más pequeño, que esté contenido en $S_3(P_0)$, como se muestra en la figura 6-27. Pero, entonces, para todo P de $S_7(P_0)$, tendremos una $f(P)$ en O^* y por tanto, $S_7(P_0)$ es de S . En cualquier caso, para un P_0 de S , arbitrario, existe un $S(P_0)$ de S . Por tanto, S es abierto, que era lo que se quería demostrar.

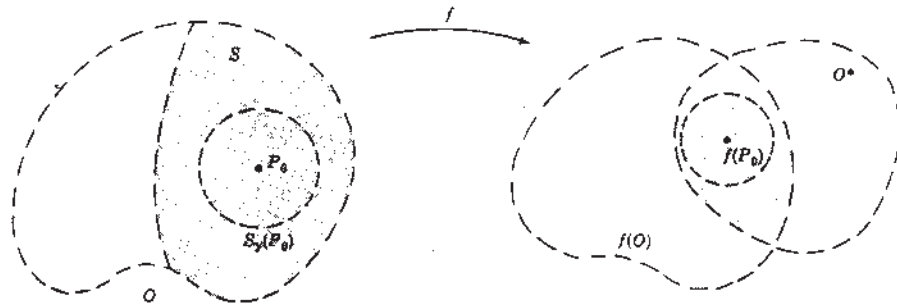


Fig. 6-27

6.22. Sea f una aplicación de un conjunto S (de E) en F , tal que, si C es cualquier conjunto cerrado de F , el conjunto de los puntos P de S para los cuales $f(P)$ pertenece a C , es un conjunto cerrado de E . Demostrar que entonces, f es continua en S .

Obsérvese que el propio S debe ser cerrado, pues $f(S)$ pertenece al conjunto cerrado F . Supongamos, ahora, que P_0 está en S y que f no es continua en P_0 . Entonces, existiría un $S(f(P_0))$ tal que todo $S(P_0)$ contenga un punto P tal que $f(P)$ no esté en $S(f(P_0))$; o, como $f(P_0)$ pertenecería a $S(f(P_0))$, todo entorno reducido $S'(P_0)$ contendría un punto P tal que $f(P)$ sea de $[S(f(P_0))]^c$. Ahora, bien, supongamos que S^* sea el conjunto de los puntos P de S tales que $f(P)$ esté en $[S(f(P_0))]^c$. Se observa que $[S(f(P_0))]^c$ es cerrado. Así, pues, por hipótesis S^* es cerrado. Pero, hemos demostrado que P_0 es un punto de acumulación de S^* . Por tanto, P_0 está en S^* . Pero, esto es imposible, porque $f(P_0)$ es de $S(f(P_0))$, con lo cual se completa la demostración.

6.23. Demostrar el teorema 6.9, a saber: Si f es una aplicación continua de un conjunto S (de E) en F y g es una aplicación continua de la imagen $f(S)$ (de F) en G , demostrar que la aplicación $(g \circ f)(P) = g(f(P))$ es una aplicación continua de S en G .

Supongamos que sea $S((g \circ f)(P_0)) = S(g(f(P_0)))$ un entorno arbitrario de $(g \circ f)(P_0)$. Como g es continua en $f(S)$, existe un $S(f(P_0))$ tal que $g(Q)$ es de $S(g(f(P_0)))$ si Q es de $S(f(P_0)) \cap f(S)$. Puesto que f es continua en S , existe un $S(P_0)$ tal que $f(P)$ es de $S(f(P_0))$ si P es de $S(P_0) \cap S$. En consecuencia, para P en $S(P_0) \cap S$, tendremos $f(P)$ en $S(f(P_0)) \cap f(S)$ y, por tanto, $g(f(P))$ en $S(g(f(P_0)))$. Así, pues, $g \circ f$ es continua en P_0 , que era lo que se quería demostrar.

6.24. Demostrar el teorema 6.8, a saber: Si f es una aplicación continua de un conjunto compacto S (de E) en F , entonces la imagen de f es compacta.

Sea $\{O_\alpha^*\}$ un recubrimiento abierto arbitrario de $f(S)$. Y supongamos que para cada punto Q de S , O_α^* designa un conjunto abierto de la familia $\{O_\alpha^*\}$ que contiene a $f(Q)$. Por ser f continua en S , y de acuerdo con el problema 6.19, se infiere que existirá en E , un conjunto abierto O_Q que contenga a Q , tal que para un P de $O_Q \cap S$, tengamos una $f(P)$ de O_Q , o, lo que es igual, que $f(O_Q)$ esté contenida en O_α^* . La familia $\{O_Q\}$, es un recubrimiento abierto de S , pues contiene cualquier Q de S . Puesto que S es compacto, existe un recubrimiento finito $\{O_{Q_1}, O_{Q_2}, \dots, O_{Q_n}\}$. Y como $f(O_{Q_i})$ está contenida en $O_{\alpha_i}^*$ para $i = 1, \dots, n$, y $\{O_{Q_i}\}$ es un recubrimiento de S , se colige que $\{O_{\alpha_1}^*, O_{\alpha_2}^*, \dots, O_{\alpha_n}^*\}$ es un recubrimiento finito de $f(S)$. De esta suerte, $f(S)$ es compacta.

6.25. Si f es una aplicación inyectiva y continua de un conjunto compacto S (de E) en F , demostrar que f es un homeomorfismo de S sobre su imagen.

Basta demostrar que f^{-1} es una aplicación continua de la imagen de f (de F) sobre E . Para ello, supongamos que C es cualquier conjunto cerrado de E y que S^* es el conjunto de los puntos $f(P)$ de $f(S)$ tales que $f^{-1}(f(P)) = P$ esté en C . Tal como se ve en la figura 6-28, de esto se deduce que $f^{-1}(S^*) = C \cap S$. Ahora bien, puesto que el conjunto compacto S es cerrado y C es cerrado, entonces $f^{-1}(S^*)$ también es cerrado. Como quiera que un subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto (problema 6.39), entonces $f^{-1}(S^*)$ es compacto. Como la imagen de un compacto por medio de una aplicación continua es compacta, se colige que $f(f^{-1}(S^*)) = S^*$ es compacta. Y como un conjunto compacto es cerrado, entonces S^* es cerrado. De esta suerte, dado un conjunto cerrado, arbitrario, C de E , el conjunto S^* de los puntos P de F tales que $f^{-1}(P)$ sea de C , es cerrado. De ello se infiere que, de acuerdo con el problema 6.20, f^{-1} es continua en la imagen $f(S)$.

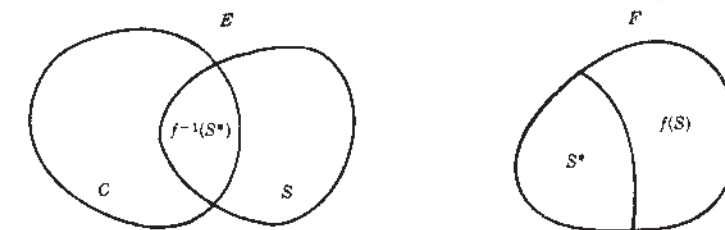


Fig. 6-28

Problemas propuestos

- 6.26. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son, (i) abiertos, (ii) cerrados, (iii) acotados, (iv) conexos, (v) compactos.
- Dos intervalos finitos, cerrados y disjuntos de E^1 .
 - Dos discos abiertos y disjuntos de E^2 .
 - El complemento de dos discos de E^2 abiertos y disjuntos.
 - Dos esferas de E^3 cerradas y disjuntas.
 - El complemento de dos esferas de E^3 cerradas y disjuntas.
 - Un toro de E^3 .
 - El complemento de un toro de E^3 .
- Resp. (a) Cerrado, acotado, inconexo, compacto.
 (b) Abierto, acotado, inconexo, no-compacto.
 (c) Cerrado, no-acotado, conexo, no-compacto.
 (d) Cerrado, acotado, inconexo, compacto.
 (e) Abierto, no-acotado, conexo, no-compacto.
 (f) Cerrado, acotado, conexo, compacto.
 (g) Abierto, no-acotado, inconexo, no-compacto.
- 6.27. Demostrar que la intersección de cualquier número de conjuntos cerrados de E es cerrada.
- 6.28. Demostrar que P es un punto de acumulación de un conjunto S de E si y sólo si todo conjunto abierto que contenga a P contiene un punto de S diferente de P .
- 6.29. Si P es un punto de acumulación de un conjunto S de E , demostrar que todo conjunto abierto que contenga a P , contiene infinitos puntos de S .
- 6.30. Demostrar que un conjunto formado por un número finito de puntos de E es acotado.
- 6.31. Demostrar que la unión de un número finito de entornos esféricos de E es acotada.
- 6.32. Demostrar que el conjunto de los puntos límites de un conjunto de E es un conjunto cerrado.
- 6.33. Si T es un conjunto cerrado que contiene un conjunto S de E , demostrar que T contiene la clausura \hat{S} de S .
- 6.34. Se dice que un punto P es exterior a un conjunto S , si P es un punto interior del complemento de S . Véase el problema 6.8. Demostrar que el conjunto de los puntos exteriores de S , que se denomina el exterior de S , es un conjunto abierto.
- 6.35. Se dice que un punto P es un punto frontera de S si P no es ni interior ni exterior al conjunto S . Demostrar que el conjunto de los puntos fronteras de S , llamado la frontera de S , es cerrado.
- 6.36. Demostrar que E es conexo.
- 6.37. Demostrar que S es un conjunto compacto de E^2 si y sólo si S es un conjunto compacto cuando se le mira como subconjunto de un plano de E^3 .
- 6.38. Demostrar directamente, a partir de la definición (es decir, sin utilizar el teorema 6.6), que E no es compacto.
- 6.39. Demostrar directamente (o sea, sin utilizar el teorema 6.6), que un subconjunto cerrado de un conjunto compacto de E es compacto.
- 6.40. Demostrar que todo subconjunto infinito S^* de un conjunto compacto S de E , tiene un punto de acumulación perteneciente a S .
- 6.41. Demostrar que $x = u, y = v, z = f(u, v)$ define una aplicación inyectiva bicontinua de un conjunto S (de E^2) en E^3 si $f(u, v)$ es continua en S .

- 6.42. Demostrar que $x = au + bv + c, y = du + ev + f, ae - bd \neq 0$, define una aplicación inyectiva bicontinua del plano uv sobre el plano xy .
- 6.43. Sea f una aplicación de un conjunto S (de E) en F . Definir: f es discontinua en el punto P_0 de S . Resp. Se dice que f es discontinua en P_0 si existe un entorno $S(f(P_0))$ tal que, por cada $S(P_0)$ exista un punto P de $S(P_0)$ para el cual se cumpla que $f(P)$ sea de $[S(f(P_0))]^c$.
- 6.44. Demostrar que la aplicación definida por
- $$x = u, \quad y = v, \quad z = \begin{cases} u^2 + v^2, & \text{si } u \geq 0 \\ 1, & \text{si } u < 0 \end{cases}$$
- es, (a) continua en $(-1, -1)$, (b) continua en $(1, 1)$, (c) continua en $(1, 0)$, (d) discontinua en $(2, 0)$.
- 6.45. Demostrar que el perímetro de un cuadrado es topológicamente equivalente a una circunferencia, mostrando para ello una aplicación inyectiva y bicontinua del cuadrado sobre la circunferencia.
- 6.46. Sea f una aplicación de un conjunto S (de E) en F que conserve las distancias entre los puntos, es decir, que para cualesquiera P y Q de S se cumpla que $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$. Demostrar que f es un homeomorfismo de S sobre su imagen.
- 6.47. Sea f una aplicación bicontinua de un conjunto conexo S (de E) en el eje de las x . Si $f(P) = a$ y $f(Q) = b, a < b$, y c es cualquier número del intervalo $a < x < b$, demostrar que existe un P_0 de S tal que $f(P_0) = c$.
- 6.48. Si f es una aplicación continua de un conjunto compacto S (de E) en F , demostrar directamente (es decir, sin utilizar los teoremas 6.6 y 6.8) que la imagen $f(S)$ es un conjunto acotado de F .
- 6.49. Sea f una aplicación continua de un conjunto cerrado C (de E) en F . Sea, además, C^* cualquier conjunto cerrado de F . Demostrar que el conjunto de puntos P de E para los cuales $f(P)$ está en C^* , es un conjunto cerrado de E .
- 6.50. Sea f una aplicación de un conjunto S (de E) en F , tal que si O es cualquier conjunto abierto de F , el conjunto de los puntos P de S para los cuales $f(P)$ pertenece a O es abierto. Demostrar que f es continua en S .
- 6.51. Demostrar que la propiedad de ser topológicamente equivalente, es una relación de equivalencia entre conjuntos de espacios euclídeos.

Capítulo 7

Funciones vectoriales de variable vectorial

FUNCIONES VECTORIALES

Sea f una aplicación de un conjunto de vectores V (de E) en F . A f se le da el nombre de *función numérica vectorial de variable vectorial*, pues a cada vector x de V le hace corresponder un vector $f(x)$ de F .

Supongamos, ahora, que la dimensión de E es n y que la de F es m . En nuestro caso, m y n son cualesquiera de los números 1, 2 ó 3. Si se fija una base (e_1, \dots, e_n) de E y, además $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, designaremos por $f(x_1, \dots, x_n)$ al vector que se le asigne a x . La aplicación f hace corresponder un vector a un conjunto de números reales y, como tal, se denomina función numérica vectorial de x_1, \dots, x_n . Si en F se escoge una base (g_1, \dots, g_m) , entonces, para cada x , f viene a ser una combinación lineal del tipo de

$$f(x) = f_1(x)g_1 + \dots + f_m(x)g_m$$

En este caso, f se asocia a las m funciones numéricas reales, $f_1(x), \dots, f_m(x)$ de x , que son las componentes de f respecto de (g_1, \dots, g_m) . La aplicación f se representa, respecto de ambas bases, por medio de m funciones numéricas reales, $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ de x_1, \dots, x_n , que son las componentes de $f(x_1, \dots, x_n)$.

Ejemplo 7.1.

(a) Sea $n(x)$ la normal unitaria, dirigida hacia afuera, en un punto x de la superficie de una esfera S de E^3 , que tiene centro en el origen y radio igual a r , tal como se ve en la figura 7-1. Entonces, $n = x/r$ es una función vectorial de x que aplica el conjunto de los $|x| = r$ (de E^3) en E^3 . Si (e_1, e_2, e_3) es una base de E^3 y $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, entonces n viene dada por la expresión

$$n = \frac{x}{r} = \frac{x_1}{r} e_1 + \frac{x_2}{r} e_2 + \frac{x_3}{r} e_3, \quad |x| = r$$

Las componentes de n son las siguientes funciones numéricas reales de (x_1, x_2, x_3)

$$n_1 = x_1/r, \quad n_2 = x_2/r, \quad n_3 = x_3/r$$

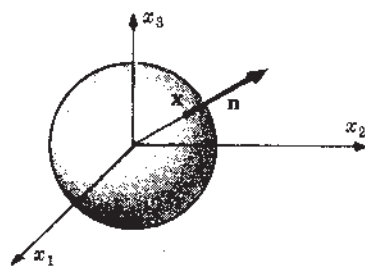


Fig. 7-1

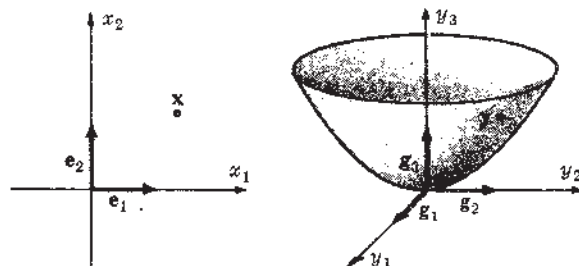


Fig. 7-2

(b) Sean $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ y $y = y_1 g_1 + y_2 g_2 + y_3 g_3$. La ecuación

$$y = (x_1 + x_2)g_1 + (x_1 - x_2)g_2 + (x_1^2 + x_2^2)g_3$$

determina una aplicación de E^2 en E^3 , como se puede ver en la figura 7-2. Las componentes de y son

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2, \quad y_3 = x_1^2 + x_2^2$$

Eliminando a x_1 y x_2 , encontramos que el dominio de las imágenes de la aplicación es el paraboloide elíptico dado por

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$$

FUNCIONES LINEALES

Se dice que una función f de E en F es *lineal*, si, para cualesquiera a y b de E , se cumple que

$$(i) \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$(ii) \quad f(ka) = kf(a) \quad k = \text{escalar}$$

Si f es lineal y $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, entonces, aplicando el hecho anterior, se tiene,

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = f(x_1 e_1) + \dots + f(x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$$

Si, por añadidura, (g_1, \dots, g_m) es una base de F y los vectores $f(e_i)$ son

$$f(e_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2 + \dots + a_{m1}g_m$$

$$f(e_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 + \dots + a_{m2}g_m$$

$$\dots$$

$$f(e_n) = a_{1n}g_1 + a_{2n}g_2 + \dots + a_{mn}g_m$$

entonces, $f(x)$ se puede expresar así

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1(a_{11}g_1 + \dots + a_{m1}g_m) + x_2(a_{12}g_1 + \dots + a_{m2}g_m) + \dots + x_n(a_{1n}g_1 + \dots + a_{mn}g_m) \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)g_1 + (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n)g_2 + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)g_m \end{aligned}$$

De esta suerte, las componentes de una función lineal $f(x)$ son las siguientes funciones numéricas en los reales, homogéneas y lineales de (x_1, \dots, x_n)

$$f_1(x) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$f_2(x) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$$\dots$$

$$f_m(x) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$$

Obsérvese que los coeficientes a_{ij} dependen de las bases de E y F .

La recíproca de lo anterior también es verdadera. En el problema 7.5 demostraremos que si las componentes de una función vectorial f son funciones homogéneas lineales de (x_1, \dots, x_n) , entonces f es lineal.

La matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denomina *representación matricial* de f respecto de las bases (e_1, \dots, e_n) y (g_1, \dots, g_m) . Se puede demostrar que el rango de la matriz, es decir, el orden del menor, no-nulo, más grande de la matriz, es independiente de las bases y recibe el nombre de *rango* u *orden* de f .

Obsérvese que, si f es lineal, entonces

$$f(0) = f(0 - 0) = f(0) - f(0) = 0$$

De esta suerte, si f es una aplicación lineal de E en F , el origen correspondiente a E siempre se aplica en el origen correspondiente a F .

Supongamos ahora que f sea una aplicación lineal de E^3 en E^3 . En el problema 7.3 demostraremos que la aplicación es inyectiva y sobreyectiva si y sólo si las imágenes de los vectores de la base, a saber

$$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$

$$f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$$

$$f(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$$

son independientes. Pero, según el teorema 1.5 los anteriores vectores son independientes si y sólo si el

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$$

es decir, si y sólo si el rango de la representación matricial de f es 3. Así, pues, una aplicación lineal f de E^3 en E^3 es biyectiva si y sólo si el rango de f es igual a 3.

Si $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ son dependientes pero, por ejemplo, $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son independientes, entonces todas las combinaciones lineales de $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ están en el plano que pasa por el origen y que contiene a $f(e_1)$ y $f(e_2)$. Dejamos como ejercicio al lector la demostración de que esto ocurre si y sólo si el rango de f es igual a 2.

Por último, si dos de los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ no son independientes, pero, por ejemplo $f(e_1) \neq 0$, entonces f aplica a E^3 sobre la recta que pasa por el origen y que contiene a $f(e_1)$. Esto ocurre si y solamente si el rango de la f es igual a 1.

En esta forma tenemos el

Teorema 7.1. Sea f una aplicación lineal de E^3 en E^3 . Entonces

- (i) f es inyectiva y sobreyectiva si y sólo si el rango de f es igual a 3.
- (ii) f aplica a E^3 sobre un plano de E^3 si y sólo si el rango de f es igual a 2.
- (iii) f aplica a E^3 sobre una recta de E^3 si y sólo si el rango de f es igual a 1.

Demostraremos, además, el

Teorema 7.2. Sea f una aplicación lineal de E^2 en E^3 . Entonces

- (i) f aplica a E^2 biyectivamente sobre un plano de E^3 si y sólo si el rango de f es igual a 2.
- (ii) f aplica a E^2 sobre una recta de E^3 si y sólo si el rango de f es igual a 1.

Ejemplo 7.2.

(a) Las ecuaciones

$$x_1 = 2u - v$$

$$x_2 = u + v$$

$$x_3 = -u + v$$

definen una aplicación lineal de E^2 en E^3 . La representación matricial es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que el

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$$

la aplicación es de rango 2. Si se eliminan u y v se puede verificar fácilmente que la aplicación lleva a E^2 sobre el plano $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$.

(b) Las ecuaciones

$$y_1 = 2x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$y_2 = x_1 + x_2 - x_3$$

$$y_3 = -x_1 + x_3$$

definen una aplicación lineal de E^3 en E^3 . Puesto que el

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

pero, el

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

entonces, el rango de la aplicación es 2. En este caso, la aplicación lleva a E^3 sobre el plano $y_1 - y_2 + y_3 = 0$.

CONTINUIDAD Y LIMITES

Recordemos que un entorno esférico de amplitud ϵ de un vector x_0 de E , que designamos por $S_\epsilon(x_0)$, se compone de todos los vectores que cumplen la condición de que $|x - x_0| < \epsilon$. La figura 7-3 permite ver que $S_\epsilon(x_0)$ consta de todos los vectores cuya distancia a x_0 es menor que ϵ . Recordemos, por otra parte, que una función f que aplica el conjunto V (de E) en F , es continua en el punto x_0 de V , si para cada entorno esférico $S(f(x_0))$ de $f(x_0)$, existe un $S(x_0)$ tal que $f(x)$ pertenezca a $S(f(x_0))$ si x es de $S(x_0) \cap V$. De esta suerte, f es continua en x_0 si a cada $\epsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para x en V y $|x - x_0| < \delta$.

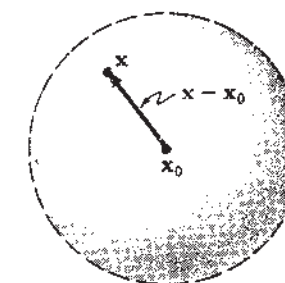


Fig. 7-3

Ejemplo 7.3.

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x/|x|, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Si $x_0 \neq 0$ y $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{x}{|x|} - \frac{x_0}{|x_0|} \right| \leq \left| \frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x_0|} \right| + \left| \frac{x}{|x_0|} - \frac{x_0}{|x_0|} \right| \\ &= |x| \left| \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x_0|} \right| + \frac{1}{|x_0|} |x - x_0| \leq \frac{2|x - x_0|}{|x_0|} \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la desigualdad triangular $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$. De esta suerte, para $|x - x_0| < \frac{1}{2}\epsilon|x_0|$, $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$ y, en esta forma, f es continua para todo $x_0 \neq 0$. Pero, en $x_0 = 0$, $f(x)$ no es continua, pues $|f(x) - f(0)| = |x|/|x| = 1$, que no puede ser menor que ϵ si $\epsilon \leq 1$.

Al igual que en el caso de las funciones vectoriales de una sola variable, tenemos los siguientes teoremas

Teorema 7.3. La función $f = f_1g_1 + \dots + f_mg_m$ es continua en x si y sólo si lo es cada una de sus componentes f_i , $i = 1, \dots, m$ en x .

Teorema 7.4. Si f , g y h son continuas en x , entonces, $|f|$, $f + g$, hf , $f \cdot g$ y $f \times g$ son continuas en x .

Una función f que transforma el conjunto V (de E) en F , tiene límite L en x_0 , que se designa por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, si para cada $S(L)$ existe un entorno reducido $S'(x_0)$ tal que $f(x)$ sea de $S(L)$ para x en $S'(x_0) \cap V$. Así, pues, f tiene límite L en x_0 si a cada $\epsilon > 0$ se le puede hacer corresponder un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para x en V y $0 < |x - x_0| < \delta$. No

es necesario que \mathbf{x}_0 pertenezca a V ; sin embargo, se supone que \mathbf{x}_0 es un vector límite de V , es decir, que cada $S(\mathbf{x}_0)$ contiene un vector de V diferente de \mathbf{x}_0 . En el problema 7.10 demostraremos que si \mathbf{x}_0 es un vector límite de V y f es continua en \mathbf{x}_0 , entonces $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. Por otra parte, si $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$ y $f(\mathbf{x}_0) = L$, entonces f es continua en \mathbf{x}_0 .

Por último, al igual que en el estudio de los vectores de una sola variable, introducimos la notación \mathbf{o} y \mathbf{O} de Landau, a saber: Sea una función escalar $g(\mathbf{x})$, supuesta diferente de cero en algún entorno reducido de \mathbf{x}_0 . Se dice que una función $f(\mathbf{x})$ es "o minúscula" de $g(\mathbf{x})$ en \mathbf{x}_0 , y se escribe $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(g(\mathbf{x}))$, si $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$. Y se dice que la función $f(\mathbf{x})$ es "O mayúscula" de $g(\mathbf{x})$ en \mathbf{x}_0 , y se escribe $f(\mathbf{x}) = \mathbf{O}(g(\mathbf{x}))$, si $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ es acotada en \mathbf{x}_0 ; es decir, si existe un escalar $M > 0$ tal que $|f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})| \leq M$ en algún entorno de \mathbf{x}_0 .

Ejemplo 7.4.

Sea $f(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 \mathbf{e}_1 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \mathbf{e}_2$. Entonces, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(|\mathbf{x}|^2)$. En efecto, introduciendo coordenadas polares, $x_1 = |\mathbf{x}| \cos \theta$, $x_2 = |\mathbf{x}| \sin \theta$, tenemos

$$|f(\mathbf{x})|/|\mathbf{x}|^2 = ||\mathbf{x}|(\cos^2 \theta \sin \theta) \mathbf{e}_1 + |\mathbf{x}|(\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) \mathbf{e}_2| \leq |\mathbf{x}| \leq \epsilon$$

para $|\mathbf{x}| < \epsilon/2$. Así, $f(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|^2 \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ y, por tanto, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{o}(|\mathbf{x}|^2)$. Además, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{O}(|\mathbf{x}|^3)$, pues

$$|f(\mathbf{x})|/|\mathbf{x}|^3 = |(\cos^2 \theta \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (\cos^3 \theta + \cos \theta \sin^2 \theta) \mathbf{e}_2| \leq 2.$$

O sea, $f(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|^3$ es acotada en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y, así, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{O}(|\mathbf{x}|^3)$.

De ordinario, definiremos nuestras funciones vectoriales en conjuntos abiertos. Recordemos que V es abierto si cada \mathbf{x}_0 de V tiene un entorno $S(\mathbf{x}_0)$ de vectores que también pertenecen a V .

DERIVADAS DIRECCIONALES

Sean f una función definida en un conjunto abierto V (de E), \mathbf{x}_0 perteneciente a V y \mathbf{u}_0 un vector no nulo que pertenezca a E . Se da el nombre de *derivada direccional de f en \mathbf{x}_0 y en la dirección de \mathbf{u}_0* al vector

$$D_{\mathbf{u}_0} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_0) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

siempre que ese límite exista. Si consideramos a f como una función de h a todo lo largo de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_0$, es decir, si introducimos la función $F(h) = f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_0)$, entonces,

$$D_{\mathbf{u}_0} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_0) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0)$$

O sea, $D_{\mathbf{u}_0} f(\mathbf{x}_0)$ es la derivada de $F(h) = f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_0)$ en $h = 0$.

Supongamos que, como se ve en la figura 7-4, f es una aplicación de E^2 en E^3 . Obsérvese que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_0$ es una recta que pasa por \mathbf{x}_0 y es paralela a \mathbf{u}_0 y que la imagen de la recta, $\mathbf{y} = F(h) = f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}_0)$, es una representación paramétrica de una curva sobre la superficie $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Por consiguiente, la derivada direccional $D_{\mathbf{u}_0} f(\mathbf{x}_0) = F'(0)$ es un vector tangente a la curva $\mathbf{y} = F(h)$ en el punto $f(\mathbf{x}_0)$.

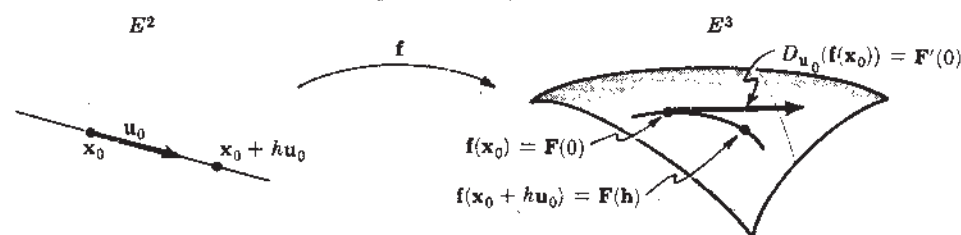


Fig. 7-4

Ejemplo 7.5.

(a) Consideremos la función.

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \mathbf{g}_1 + x_2 \mathbf{g}_2 + (x_1^2 + x_2^2) \mathbf{g}_3$$

$$\text{Aquí, es } F(h) = f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) = (x_1 + hu_1) \mathbf{g}_1 + (x_2 + hu_2) \mathbf{g}_2 + [(x_1 + hu_1)^2 + (x_2 + hu_2)^2] \mathbf{g}_3$$

$$F'(h) = u_1 \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2 + [2u_1(x_1 + hu_1) + 2u_2(x_2 + hu_2)] \mathbf{g}_3$$

$$\text{y } F'(0) = u_1 \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2 + (2u_1 x_1 + 2u_2 x_2) \mathbf{g}_3$$

De este modo, existe la derivada de f en todo $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ y en cualquier dirección $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ y viene dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = u_1 \mathbf{g}_1 + u_2 \mathbf{g}_2 + 2(u_1 x_1 + u_2 x_2) \mathbf{g}_3$$

(b) Es posible que una función tenga derivada en una dirección, pero no en otra. En efecto, consideremos la función numérica real de E^2 ,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2, & \text{si } x_1 = 0, \text{ o, } x_2 = 0 \\ 1, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

En $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y en la dirección $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$, es

$$F(h) = f(h\mathbf{u}) = f(h, 0) = h, \text{ y } F'(h) = 1$$

En esta forma, $D_{\mathbf{e}_1} f(\mathbf{0}) = F'(0) = 1$. Además, en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y en la dirección $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$, es

$$F(h) = f(h\mathbf{u}) = f(0, h) = h, \text{ y } F'(h) = 1$$

Y, en consecuencia, $D_{\mathbf{e}_2} f(\mathbf{0}) = 1$. Sin embargo, en cualquier otra dirección, es decir, para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$, en donde $u_1 \neq 0$ y $u_2 \neq 0$, tendremos

$$F(h) = f(h\mathbf{u}) = f(hu_1, hu_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } h = 0 \\ 1, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

que no tiene derivada en $h = 0$. Así, pues, f sólo tiene derivada en las direcciones $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ y $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$ para $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Supongamos, ahora, que en E se fija una base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. A la derivada en \mathbf{x} y en la dirección de un vector \mathbf{e}_k de la base, es decir, a la $D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{x})$, se le denomina la *derivada parcial de f respecto de la k -ésima componente de \mathbf{x}* . Si escribimos

$$f(\mathbf{x}) = f_1(x_1, \dots, x_n) \mathbf{g}_1 + \dots + f_m(x_1, \dots, x_n) \mathbf{g}_m$$

entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f_1(x_1, \dots, x_n)}{h} \mathbf{g}_1 \\ &\quad + \dots + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_m(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - f_m(x_1, \dots, x_n)}{h} \mathbf{g}_m \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \mathbf{g}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \mathbf{g}_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \mathbf{g}_m \end{aligned}$$

De esta suerte, $D_{\mathbf{e}_k} f(\mathbf{x})$ es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_k$ en \mathbf{x} de las componentes de f . La derivada $D_{\mathbf{e}_k} f$ se designa, además, por $D_k f$ o por $\partial f / \partial x_k$.

Ejemplo 7.6.

Sea $f(u, v) = ue^v \mathbf{g}_1 + (u^2 + v^2) \mathbf{g}_2 + uv \mathbf{g}_3$. Entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (ue^v) \mathbf{g}_1 + \frac{\partial}{\partial u} (u^2 + v^2) \mathbf{g}_2 + \frac{\partial}{\partial u} (uv) \mathbf{g}_3 = e^v \mathbf{g}_1 + 2u \mathbf{g}_2 + v \mathbf{g}_3$$

$$\text{y } \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (ue^v) \mathbf{g}_1 + \frac{\partial}{\partial v} (u^2 + v^2) \mathbf{g}_2 + \frac{\partial}{\partial v} (uv) \mathbf{g}_3 = ue^v \mathbf{g}_1 + 2v \mathbf{g}_2 + u \mathbf{g}_3$$

Ejemplo 7.7.

Consideremos la función que aplica E^3 en E^3 , dada por

$$f(x) = (2x_1 - x_2)e_1 + x_1x_3e_2 + (x_2^2 - x_3^2)e_3$$

La diferencial de f es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 \\ = (2e_1 + x_3e_2) dx_1 + (-e_1 + 2x_2e_3) dx_2 + (x_1e_2 - 2x_3e_3) dx_3$$

La matriz jacobiana de f en x es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 2x_2 & -2x_3 \end{pmatrix}$$

y el jacobiano de f en x es

$$J(f)(x) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = -2(2x_1x_2 + x_3^2)$$

Recordemos que si f es una aplicación de E^2 en E^3 , entonces la derivada direccional $D_x f(x_0) = df(x_0)$ es un vector tangente en $y_0 = f(x_0)$ a una curva de la superficie $y = f(x)$. En particular, si el orden de df como función lineal de dx en x_0 es 2, es decir, si el rango de la matriz jacobiana $(\partial f_i / \partial x_j)$ en x_0 es 2, se concluye, según el teorema 7.2(i), que $df(x_0)$ es una aplicación biyectiva de los vectores dx pertenecientes a E^2 sobre un plano, como puede verse en la figura 7-5. El plano que pasa por y_0 , paralelo a los vectores $df(x_0)$, se denomina el plano tangente a $y = f(x)$ en y_0 . La ecuación del plano tangente es $y = y_0 + df(x_0)$.

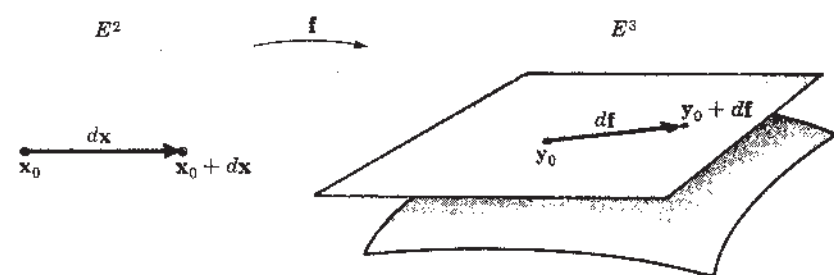


Fig. 7-5

Ejemplo 7.8.

Consideremos la aplicación de E^2 en E^3 dada por

$$y = (u - v)g_1 + (u + v)g_2 + (u^2 + v^2)g_3$$

La diferencial

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = (g_1 + g_2 + 2ug_3) du + (-g_1 + g_2 + 2vg_3) dv \\ = (du - dv)g_1 + (du + dv)g_2 + (2u du + 2v dv)g_3$$

En $u = 1, v = -1$, tenemos $y_0 = 2g_1 + 2g_3$, y

$$dy_0 = (du - dv)g_1 + (du + dv)g_2 + (2du - 2dv)g_3$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente en y_0 es

$$y = y_0 + dy_0 = (2 + du - dv)g_1 + (du + dv)g_2 + (2 + 2du - 2dv)g_3$$

o sea,

$$y_1 = 2 + du - dv, \quad y_2 = du + dv, \quad y_3 = 2 + 2du - 2dv$$

o, eliminando a du y dv , $2y_1 - y_3 = 2$.

Al igual que en el caso de las derivadas de funciones de una sola variable, se tiene el

Teorema 7.7. Sean f y g dos funciones vectoriales de un conjunto abierto V (de E) en F , y h una función escalar en V . Si f, g y h son derivables en x , entonces $f + g, hf, f \cdot g$ y $f \times g$ son derivables en x y, además,

- (i) $d(f + g) = df + dg$
- (ii) $d(hf) = hdf + (dh)f$
- (iii) $d(f \cdot g) = f \cdot dg + (df) \cdot g$
- (iv) $d(f \times g) = f \times dg + (df) \times g$

Por último, si f es derivable en cada x perteneciente a V , entonces df es una función de dos variables vectoriales, x y dx . Si df es continua en x y dx , entonces se dice que f es *continuamente derivable* en V .

Si f es continuamente derivable en V , entonces las $\partial f / \partial x_i$ son continuas en V y, en consecuencia, todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ son continuas en V . La recíproca también es verdadera. Es decir,

Teorema 7.8. Una función vectorial f , que transforma un conjunto abierto V (de E) en F , es continuamente derivable en V si y sólo si todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ respecto de las bases de E y F son continuas en V .

FUNCIONES COMPUESTAS. REGLA DE LA CADENA

Consideremos los espacios euclídeos E, F y G . Y sean: f una función que transforma un conjunto V (de E) en F , y g una función que aplica un conjunto U (de F) en G . Para todo x perteneciente a V y tal que $f(x)$ sea de U , definimos la *función compuesta* $g \circ f$ de los x de E con imágenes en G , mediante la expresión: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Ejemplo 7.9.

$$(a) \quad f(x) = (x_1 - x_2)g_1 + (x_1^2 + x_2^2)g_2 + (x_1x_2)g_3$$

lleva un $x = x_1e_1 + x_2e_2$ (de E^2) a E^3 ; y

$$g(y) = (y_1 + y_2 + y_3)g_1 + y_1y_2g_2 + (y_2^2 - y_3^2)g_3$$

lleva un $y = y_1g_1 + y_2g_2 + y_3g_3$ de E^3 a E^3 . Si hacemos

$$y = f(x) = (x_1 - x_2)g_1 + (x_1^2 + x_2^2)g_2 + x_1x_2g_3$$

en forma que $y_1 = x_1 - x_2, \quad y_2 = x_1^2 + x_2^2, \quad y_3 = x_1x_2$

veremos que la función compuesta $g(f(x))$, que lleva un x (de E^2) a E^3 , es

$$g(f(x)) = [(x_1 - x_2) + (x_1^2 + x_2^2) + x_1x_2]g_1 + (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)g_2 + [(x_1^2 + x_2^2)^2 - (x_1x_2)^2]g_3$$

(b) Las ecuaciones siguientes

$$x = f(t) = (t^2 + 1)e_1 + te_2, \quad \text{o} \quad x_1 = t^2 + 1, \quad x_2 = t$$

definen una aplicación de E^1 en E^2 y representan una curva de E^2 . La ecuación

$$y = g(x) = x_1g_1 + x_2g_2 + (x_1^2 + x_2^2)g_3$$

define una aplicación de E^2 en E^3 y representan una superficie de E^3 . La aplicación compuesta

$$y = g(f(t)) = (t^2 + 1)g_1 + tg_2 + [(t^2 + 1)^2 + t^2]g_3 = (t^2 + 1)g_1 + tg_2 + (t^4 + 3t^2 + 1)g_3$$

es una aplicación de E^1 en E^3 y representa una curva que está en la superficie $y = g(x)$ de E^3 , como se ve en la figura 7-6.

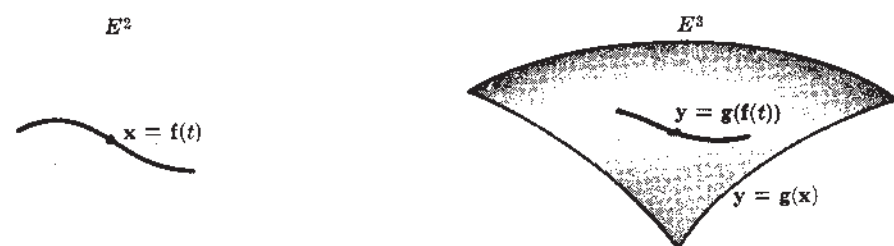


Fig. 7-6

Si f es una función lineal que lleva E a F y g es una función lineal que transforma F en G , entonces la función compuesta $h = g \circ f$ es una función lineal que aplica E en G . En efecto, sean a y b dos vectores de E ; entonces,

$$h(a+b) = g(f(a+b)) = g[f(a) + f(b)] = g(f(a)) + g(f(b)) = h(a) + h(b)$$

Además, $h(ka) = f(g(ka)) = f(kg(a)) = kf(g(a)) = kh(a)$

De modo que h es lineal en E . Supongamos, además, que en E , F y G se escojan las bases respectivas y que las componentes de $y = f(x)$ y $z = g(y)$ se expresen por medio de las siguientes ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1m}y_m \\ z_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2m}y_m \\ &\dots\dots\dots \\ z_r &= b_{r1}y_1 + b_{r2}y_2 + \cdots + b_{rm}y_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{o, dicho más brevemente,} \quad y_k &= \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j, \quad k=1, \dots, m \\ z_i &= \sum_{k=1}^m b_{ik}y_k, \quad i=1, \dots, r \end{aligned}$$

Al hacer las sustituciones convenientes, encontramos que las componentes de $z = g(f(x))$ son

$$z_i = \sum_{k=1}^m b_{ik} \left(\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^m b_{ik}a_{kj} \right) x_j, \quad i=1, \dots, r$$

Si (a_{ij}) y (b_{ij}) son las representaciones matriciales de f y g , respectivamente, reconoceremos, sin más, que la representación matricial $(c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^m b_{ik}a_{kj} \right)$ de la función compuesta, es la matriz producto $(c_{ij}) = (b_{ij})(a_{ij})$.

Ejemplo 7.10.

$$\begin{aligned} \text{Las ecuaciones} \quad y_1 &= 2x_1 + x_2 & y \quad z_1 &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2 &= -x_1 + 2x_2 & z_2 &= 2y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

definen aplicaciones lineales de E^2 en E^3 y, viceversa, de E^3 en E^2 . La aplicación compuesta de ellas es una aplicación lineal de E^2 en E^2 , dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} z_1 &= (2x_1 + x_2) - (-x_1 + 2x_2) + (x_1 - x_2) = 4x_1 - 2x_2 \\ z_2 &= 2(2x_1 + x_2) + (-x_1 + 2x_2) - (x_1 - x_2) = 2x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

Obsérvese que la representación matricial de z como función de x es el producto

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si f es continua en x , y g es continua en $y = f(x)$, entonces la $g \circ f$ es continua en x . Este hecho conforma el

Teorema 7.9. La función compuesta de dos funciones continuas es continua.

Un enunciado análogo es verdadero para el caso de funciones derivables. Ello, unido a la regla de la cadena, es decir, la que permite determinar las derivadas de las funciones compuestas, se incluye en el importante teorema siguiente:

Teorema 7.10. Si f es derivable en x y tiene la derivada $L_x(v)$ y g es derivable en $y = f(x)$ y posee la derivada $M_y(u)$, entonces $h = g \circ f$ es derivable en x y su derivada es igual a la compuesta de las derivadas de f y g , a saber

$$H_x(v) = (M \circ L)_x(v) = M_{f(x)}(L_x(v))$$

Recordemos que la representación matricial de la diferencial de f es la matriz jacobiana $(\partial f_i / \partial x_j)$, $i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$, y la representación matricial de la diferencial de g es $(\partial g_i / \partial y_j)$, $i=1, \dots, r$; $u=1, \dots, m$. De esto, se colige que la representación matricial de la diferencial de $h = g \circ f$ es el producto

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_k} \right) \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right) = \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right)$$

Se tiene así la fórmula

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j}, \quad i=1, \dots, r; \quad j=1, \dots, n \quad (7.5)$$

que es la regla de la cadena utilizada en el cálculo de las derivadas parciales de las componentes de las funciones compuestas. Si $h = h_1 e_1 + \cdots + h_r e_r$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x_j} &= \frac{\partial h_1}{\partial x_j} e_1 + \cdots + \frac{\partial h_r}{\partial x_j} e_r \\ &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right) e_1 + \cdots + \left(\frac{\partial g_r}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g_r}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \right) e_r \\ &= \left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1} e_1 + \cdots + \frac{\partial g_r}{\partial y_1} e_r \right) \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \cdots + \left(\frac{\partial g_1}{\partial y_m} e_1 + \cdots + \frac{\partial g_r}{\partial y_m} e_r \right) \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$\text{Así, pues,} \quad \frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \quad (7.6)$$

que es la regla de la cadena utilizada para calcular las derivadas parciales de la propia función vectorial compuesta.

Ejemplo 7.11.

(a) Sea $y = (x_1 + x_2)e_1 + (x_1 - x_2)e_2 + (x_1^2 + x_2^2)e_3$, $x_1 = t^2 + 1$, $x_2 = \sin t$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = (e_1 + e_2 + 2x_1 e_3)(2t) + (e_1 - e_2 + 2x_2 e_3) \cos t \\ &= (2t + \cos t)e_1 + (2t - \cos t)e_2 + (4t^3 + 4t + 2 \sin t \cos t)e_3 \end{aligned}$$

(b) Sea $y = u(\cos v)e_1 + u(\sin v)e_2 + ve_3$, $u = \theta + \phi$, $v = \theta\phi$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{d\theta} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{d\theta} = (\cos v)e_1 + (\sin v)e_2 + (-u(\sin v)e_1 + u(\cos v)e_2 + e_3)\phi \\ &= (\cos(\theta\phi) - \phi(\theta + \phi)\sin(\theta\phi))e_1 + (\sin(\theta\phi) + \phi(\theta + \phi)\cos(\theta\phi))e_2 + \phi e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \phi} &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \phi} = (\cos v) \mathbf{e}_1 + (\sin v) \mathbf{e}_2 + (-u(\sin v) \mathbf{e}_1 + u(\cos v) \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \theta \\ &= (\cos(\theta\phi) - \theta(\theta + \phi) \sin(\theta\phi)) \mathbf{e}_1 + (\sin(\theta\phi) + \theta(\theta + \phi) \cos(\theta\phi)) \mathbf{e}_2 + \theta \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

FUNCIONES DE CLASE C^m . FORMULA DE TAYLOR

Supongamos que f tiene derivada en una determinada dirección \mathbf{u} , en cada \mathbf{x} de un conjunto abierto V de E . Entonces, también la $D_{\mathbf{u}}f$ es una función de \mathbf{x} , perteneciente a V , y podemos considerar su derivada en \mathbf{x} en una dirección \mathbf{v} ; a saber: $D_{\mathbf{v}}(D_{\mathbf{u}}f)(\mathbf{x})$. Esta, cuando existe, se denomina *derivada direccional de segundo orden de f en \mathbf{x}* y se simboliza por $D_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^2f(\mathbf{x})$.

Recordemos que, si $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ es una base de E , entonces

$$D_{\mathbf{e}_i}f = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \mathbf{g}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \mathbf{g}_2 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \mathbf{g}_m$$

$$\text{Por tanto, } D_{\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{g}_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{g}_2 + \dots + \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{g}_m$$

Es decir, las componentes de las derivadas de segundo orden en la dirección de la base, son las derivadas parciales de segundo orden de las componentes.

En forma análoga, se definen otras derivadas de orden superior. Por ejemplo, $D_{\mathbf{w}}(D_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^2f)(\mathbf{x})$ es una derivada direccional de tercer orden en \mathbf{x} y se simboliza por $D_{\mathbf{w}\mathbf{v}\mathbf{u}}^3f(\mathbf{x})$. Nuevamente, en este caso, las derivadas en la dirección de la base son las derivadas parciales,

$$D_{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i}^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^3 f_1}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} \mathbf{g}_1 + \dots + \frac{\partial^3 f_m}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} \mathbf{g}_m$$

Si f es continua en V , decimos que f pertenece a la clase C^0 en V . Si todas las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, respecto a una base de E , son continuas en V , entonces se dice que f pertenece a la clase C^1 en V . En general, f es de clase C^m en V si todas las derivadas de orden m -ésimo $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ existen y son continuas en V .

Obsérvese que, de acuerdo con los teoremas 7.6 y 7.8, las funciones que pertenezcan a la clase C^1 pertenecerán a la clase C^0 . Y, entonces, las funciones de clase C^2 serán de clase C^1 . En general, las funciones de clase C^m están en la clase C^{m-1} .

Ejemplo 7.12.

La función numérica en los reales, $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{5/3}$ pertenece a C^2 para todos los valores de \mathbf{x} en E , pero no pertenece a C^3 para todos los \mathbf{x} de E . En efecto,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{5}{3} |\mathbf{x}|^{2/3} \frac{\partial}{\partial x_i} |\mathbf{x}| = \frac{5}{3} |\mathbf{x}|^{2/3} |\mathbf{x}|^{-1} x_i = \frac{5}{3} |\mathbf{x}|^{-1/3} x_i = \frac{5}{3} |\mathbf{x}|^{5/3} \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$$

en donde utilizamos la igualdad $x_i = |\mathbf{x}| \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$. Análogamente,

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{5}{3} |\mathbf{x}|^{-1/3} \delta_{ij} + \frac{16}{9} |\mathbf{x}|^{2/3} \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$$

Pero, una derivada de tercer orden contendrá el término

$$\frac{64}{27} |\mathbf{x}|^{-4/3} \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) \cos \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$$

que no es acotado en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Obsérvese que es posible que sea $\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} \neq \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Sin embargo, esto no ocurrirá si f es de clase C^2 . En general, si f es de clase C^m , al hacer las derivadas parciales de orden m -ésimo,

no importa el orden de las derivaciones respecto de cada variable sino solamente el número de ellas. Si se desea una demostración de esta afirmación, remitimos al lector a cualquier texto de cálculo superior.

Supongamos, ahora, que f es de clase C^2 en V . Entonces, según el teorema 7.8, f es derivable en V ; y, de acuerdo con la ecuación (7.2), se tiene

$$D_{\mathbf{u}}f = \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} u_n$$

Pero, además, $D_{\mathbf{u}}f$ es derivable en V . Por tanto,

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^2 f &= D_{\mathbf{v}}(D_{\mathbf{u}}f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} D_{\mathbf{u}}f \right) v_1 + \dots + \left(\frac{\partial}{\partial x_n} D_{\mathbf{u}}f \right) v_n \\ &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} u_n \right] v_1 + \dots + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} u_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} u_n \right] v_n\end{aligned}$$

$$\text{o sea, } D_{\mathbf{v}\mathbf{u}}^2 f = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i u_j \quad (7.7)$$

Para derivadas de orden superior se pueden obtener fórmulas análogas. Por ejemplo,

$$D_{\mathbf{w}\mathbf{v}\mathbf{u}}^3 f = \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} w_i v_j u_k$$

En esta forma, tenemos el

Teorema 7.11. Si f pertenece a la clase C^m de V , entonces todas las derivadas direccionales de orden m son continuas en V , independientes del orden en que se obtengan las derivadas, y vienen dadas por

$$D_{\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m}^m f = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} (u_1)_{i_1} (u_2)_{i_2} \dots (u_m)_{i_m}$$

Ejemplo 7.13.

Supongamos que

$$f(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \mathbf{g}_1 + (x_1^3 + x_2^3) \mathbf{g}_2 + x_1^3 x_2 \mathbf{g}_3$$

$$\text{Entonces, } D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} u_2 = (x_2 \mathbf{g}_1 + 3x_1^2 \mathbf{g}_2 + 3x_1^2 x_2 \mathbf{g}_3) u_1 + (x_1 \mathbf{g}_1 + 3x_2^2 \mathbf{g}_2 + x_1^3 \mathbf{g}_3) u_2$$

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}^2 f(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} u_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} u_1 u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} u_2 u_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} u_2^2 \\ &= (6x_1 \mathbf{g}_2 + 6x_1 x_2 \mathbf{g}_3) u_1^2 + 2(\mathbf{g}_1 + 3x_1^2 \mathbf{g}_3) u_1 u_2 + 6x_2 \mathbf{g}_2 u_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} u_1 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} u_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} u_2 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} u_2 v_2 \\ &= (6x_1 \mathbf{g}_2 + 6x_1 x_2 \mathbf{g}_3) u_1 v_1 + (\mathbf{g}_1 + 3x_1^2 \mathbf{g}_3)(u_1 v_2 + v_1 u_2) + 6x_2 \mathbf{g}_2 u_2 v_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}\mathbf{v}\mathbf{u}}^3 f(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1} u_1^3 v_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} u_1^2 u_2 v_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} u_1 u_2^2 v_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_1} u_2 u_1^2 v_1 \\ &\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2} u_1 u_2 v_2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1 \partial x_2} u_2 u_1 v_2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_1} u_2 u_2 v_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_2 \partial x_2} u_2 u_2 v_2 \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} u_1^3 v_1 + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} (u_1^2 v_2 + 2u_1 u_2 v_1) + \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} (2u_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_1) + \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} u_2^3 v_2 \\ &= (6\mathbf{g}_2 + 6x_2 \mathbf{g}_3) u_1^3 v_1 + 6x_1 \mathbf{g}_3 (u_1^2 v_2 + 2u_1 u_2 v_1) + 6\mathbf{g}_2 u_2^3 v_2\end{aligned}$$

Teorema 7.12. Fórmula de Taylor. Si f es de la clase C^m en un entorno de \mathbf{x}_0 , entonces, para todo \mathbf{x} suficientemente próximo a \mathbf{x}_0 , se cumple que

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + D_{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}_0) + \dots + \frac{1}{m!} D_{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}^m f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{R}_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$$

en donde, $R_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^m \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

Ejemplo 7.14.

Sea $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)\mathbf{e}_1 + x_1^3 x_2 \mathbf{e}_2$. Entonces,

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} v_2 = (2x_1 \mathbf{e}_1 + 3x_1^2 x_2 \mathbf{e}_2) v_1 + (3x_2^2 \mathbf{e}_1 + x_1^3 \mathbf{e}_2) v_2$$

$$D_{\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} v_2^2 = (2\mathbf{e}_1 + 6x_1 x_2 \mathbf{e}_2) v_1^2 + 6x_1^2 \mathbf{e}_2 v_1 v_2 + 6x_2 \mathbf{e}_1 v_2^2$$

En $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, tenemos: $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (x_1 - 1)\mathbf{e}_1 + (x_2 + 1)\mathbf{e}_2$, $f(\mathbf{x}_0) = -\mathbf{e}_2$, $D_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}_0) = (2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)(x_1 - 1) + (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)(x_2 + 1)$, $D_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}^2 f(\mathbf{x}_0) = (2\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2)(x_1 - 1)^2 + 6\mathbf{e}_2(x_1 - 1)(x_2 + 1) - 6\mathbf{e}_1(x_2 + 1)^2$. Así, pues,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + D_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} D_{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}^2 f(\mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2) \\ &= -\mathbf{e}_2 + (2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)(x_1 - 1) + (3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)(x_2 + 1) + (\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2)(x_1 - 1)^2 \\ &\quad + 3\mathbf{e}_2(x_1 - 1)(x_2 + 1) - 3\mathbf{e}_1(x_2 + 1)^2 + o((x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2) \end{aligned}$$

Este resultado también puede obtenerse directamente al desarrollar a f por medio de potencias de $(x_1 - 1)$ y $(x_2 + 1)$ en la siguiente forma

$$x_1^2 = [(x_1 - 1) + 1]^2 = (x_1 - 1)^2 + 2(x_1 - 1) + 1$$

$$x_2^3 = [(x_2 + 1) - 1]^3 = (x_2 + 1)^3 - 3(x_2 + 1)^2 + 3(x_2 + 1) - 1$$

$$x_1^3 x_2 = [(x_1 - 1) + 1]^3 [(x_2 + 1) - 1] = [(x_1 - 1)^3 + 3(x_1 - 1)^2 + 3(x_1 - 1) + 1][(x_2 + 1) - 1]$$

y, de esta suerte,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (x_1^2 + x_2^3)\mathbf{e}_1 + x_1^3 x_2 \mathbf{e}_2 = \{(x_1 - 1)^2 + 2(x_1 - 1) + 1 - 3(x_2 + 1)^2 + 3(x_2 + 1) - 1\}\mathbf{e}_1 \\ &\quad + \{3(x_1 - 1)(x_2 + 1) + (x_2 + 1) - 3(x_1 - 1)^2 - 3(x_1 - 1) - 1\}\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \{(x_2 + 1)^3 \mathbf{e}_1 + [(x_1 - 1)^3(x_2 + 1) + 3(x_1 - 1)^2(x_2 - 1)]\mathbf{e}_2\} \end{aligned}$$

Obsérvese que el último término es, en verdad, $o((x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2)$, y este resultado concuerda con el primero. El segundo método para obtener un desarrollo de Taylor se puede aplicar siempre que las componentes de f sean polinomios; pero, en general, es necesario aplicar la fórmula del teorema 7.12.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función de \mathbf{x} que aplica un conjunto abierto V de E^3 en E^3 . En general, tal función no será inyectiva. Sin embargo, supongamos que en un punto \mathbf{x}_0 de V se tiene el jacobiano $J(f) = \det(\partial f_i / \partial x_j) \neq 0$. Recordemos que $(\partial f_i / \partial x_j)$ es la representación matricial de la diferencial como función lineal. Puesto que el $\det(\partial f_i / \partial x_j) \neq 0$ en \mathbf{x}_0 , el rango de $df(\mathbf{x}_0)$ es 3. Y, en consecuencia, de acuerdo con el teorema 7.1(i), $df(\mathbf{x}_0)$ es inyectiva. Pero, $f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es una aproximación de $f(\mathbf{x})$ cerca de \mathbf{x}_0 . Así, pues, contamos con que f sea inyectiva al menos en alguna vecindad de \mathbf{x}_0 . Este resultado es parte del importante teorema siguiente denominado *teorema de la función inversa*:

Teorema 7.13. Sea f una función de \mathbf{x} de clase C^m ($m \geq 1$) en un conjunto abierto V (de E) aplicado en E . Sea $J(f) = \det(\partial f_i / \partial x_j) \neq 0$ el jacobiano en un punto \mathbf{x}_0 de V . Entonces, existe un entorno $S(\mathbf{x}_0)$ contenido en V tal que:

- La restricción de f a $S(\mathbf{x}_0)$ es inyectiva.
- La imagen $f(S(\mathbf{x}_0))$ de $S(\mathbf{x}_0)$ es abierta.
- La inversa f^{-1} de f es de clase C^m en $f(S(\mathbf{x}_0))$. (Véase la figura 7-7.)

De nuevo, para la demostración de este teorema, remitimos al lector a un texto de cálculo avanzado.

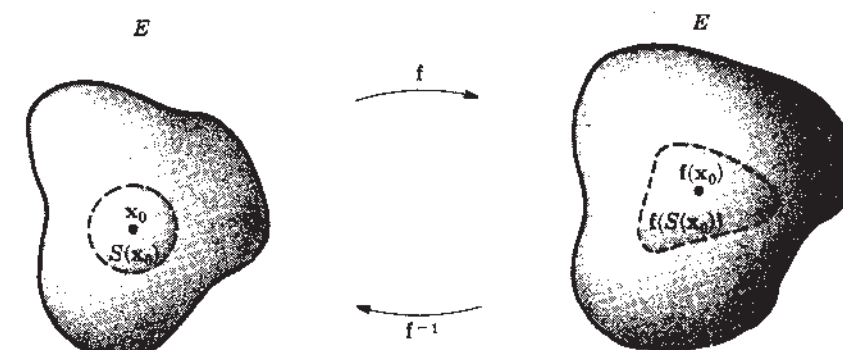


Fig. 7-7

Ejemplo 7.15.

Las ecuaciones $y_1 = x_1 \cos x_2$, $y_2 = x_1 \sin x_2$, ($x_1 > 0$)

definen una aplicación del semi-plano $x_1 x_2$ de la derecha sobre el plano $y_1 y_2$, exceptuando su origen, como se muestra en la figura 7-8(a). Para $x_1 > 0$,

$$J(f) = \det \begin{pmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \partial y_1 / \partial x_2 \\ \partial y_2 / \partial x_1 & \partial y_2 / \partial x_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix} = x_1 \neq 0$$

En este caso, alrededor de cualquier punto (x_1, x_2) del semi-plano de la derecha, existirá algún $S(x_1, x_2)$ dentro del cual la aplicación sea inyectiva y sobreyectiva sobre un conjunto abierto del plano $y_1 y_2$. La aplicación inversa viene dada por

$$x_1 = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2}, \quad x_2 = \tan^{-1}(y_2/y_1)$$

en donde debe tomarse la rama conveniente del arco tangente. Obsérvese que la aplicación del semi-plano de la derecha en sí mismo, no es inyectiva, aunque sea $\det(\partial y_i / \partial x_j) \neq 0$ en cada punto, pues la sola tira $0 \leq x_2 < 2\pi$ recubre todo el plano $y_1 y_2$, exceptuando el origen, como se muestra en la figura 7-8(b). De esta suerte, el teorema de la función inversa nos proporciona una inversa local pero, en general, no nos permite obtener una inversa global.

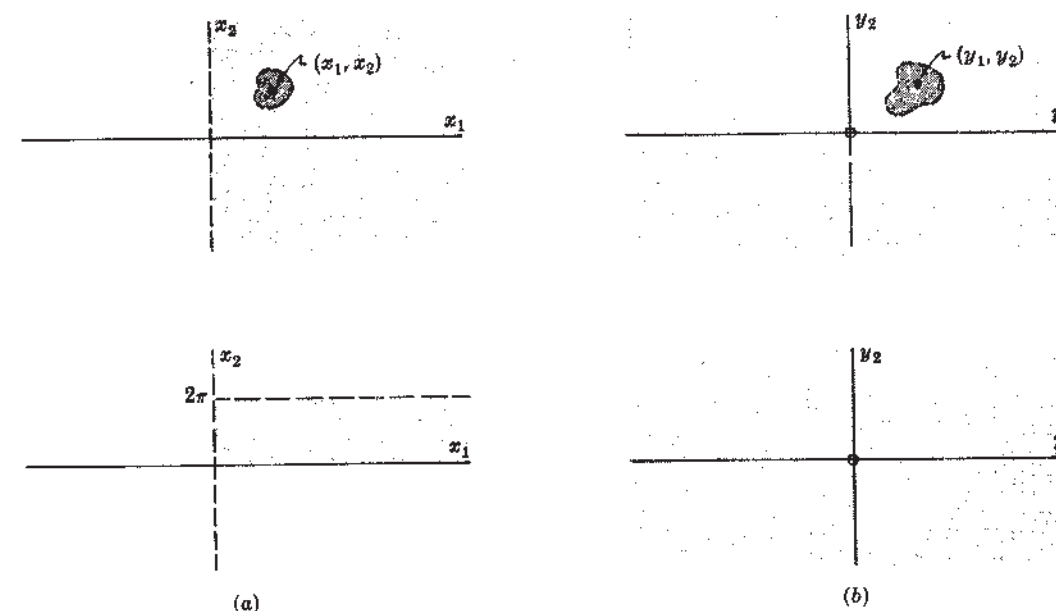


Fig. 7-8

Problemas resueltos

FUNCIONES VECTORIALES. FUNCIONES LINEALES

7.1. Demostrar que

$$y = (\sin x_1 \cos x_2)g_1 + (\sin x_1 \sin x_2)g_2 + (\cos x_1)g_3$$

define una aplicación de la región $0 \leq x_1 \leq \pi$, $0 \leq x_2 < 2\pi$ sobre la esfera de centro en el origen y radio igual a 1, en E^3 . ¿Es inyectiva esta aplicación?

$$|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = \sin^2 x_1 \cos^2 x_2 + \sin^2 x_1 \sin^2 x_2 + \cos^2 x_1 = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 = 1$$

Por tanto, la aplicación es en la esfera. A fin de demostrar que esta aplicación es sobreyectiva, para un y fijo que cumpla la condición de ser $|y|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, supongamos que

$$x_1 = \cos^{-1} y_3 \quad y \quad x_2 = \begin{cases} \cos^{-1} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & \text{para } y_2 > 0 \\ 2\pi - \cos^{-1} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} & \text{para } y_2 < 0 \\ 0 & \text{para } y_2 = y_1 = 0 \\ 0 & \text{para } y_2 = 0 \text{ y } y_1 > 0 \\ \pi & \text{para } y_2 = 0 \text{ y } y_1 < 0 \end{cases}$$

En cada uno de los casos es $\cos x_1 = y_3$. Si $y_2 \neq 0$, entonces

$$\sin x_1 \cos x_2 = \sqrt{1 - y_3^2} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = y_1$$

Si $y_2 > 0$, entonces:

$$\sin x_1 \sin x_2 = \sqrt{1 - y_3^2} \frac{|y_2|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = |y_2| = y_2$$

Si $y_2 < 0$, entonces:

$$\sin x_1 \sin x_2 = \sqrt{1 - y_3^2} \frac{-|y_2|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = -|y_2| = y_2$$

Si $y_1 = y_2 = 0$, entonces $|y_3| = 1$. Esto implica que $x_1 = 0, \pi$, y, de esta suerte,

$$\sin x_1 \cos x_2 = 0 = y_1, \quad \sin x_1 \sin x_2 = 0 = y_2$$

Si $y_2 = 0$ y $y_1 > 0$, entonces $x_2 = 0$ y, de esta suerte,

$$\sin x_1 \cos x_2 = \sin x_1 = \sqrt{1 - y_3^2} = y_1, \quad \sin x_1 \sin x_2 = 0 = y_2$$

Si $y_2 = 0$ y $y_1 < 0$, entonces $x_2 = \pi$ y, de esta suerte,

$$\sin x_1 \cos x_2 = -\sin x_1 = -\sqrt{1 - y_3^2} = -|y_1| = y_1, \quad \sin x_1 \sin x_2 = 0 = y_2$$

Así, pues, en cada caso se establece que: $\sin x_1 \cos x_2 = y_1$, $\sin x_1 \sin x_2 = y_2$ y $\cos x_1 = y_3$, y por ello, la aplicación es sobreyectiva respecto de la esfera.

7.2. Determinar cuál es el rango y cuál la imagen de la aplicación lineal siguiente

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= -4x_1 - 2x_2 \\ y_3 &= -2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

La representación matricial de la aplicación es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Puesto que $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 0$ y $\det \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 0$, el rango de la matriz es 1. De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $2y_1 + y_2 = 0$, y de las dos últimas sacamos que $y_2 - 2y_3 = 0$. De este modo, la imagen de la aplicación es la intersección de los planos $2y_1 + y_2 = 0$ y $y_2 - 2y_3 = 0$.

7.3. Demostrar que una función lineal de E^3 en E^3 es biyectiva si y sólo si las imágenes de una base son linealmente independientes.

Supongamos que (e_1, e_2, e_3) es una base y f una función lineal de E^3 en E^3 , tal que $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sean independientes. Entonces, $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ también es una base y todo b se puede escribir como

$$b = b_1 f(e_1) + b_2 f(e_2) + b_3 f(e_3)$$

Definimos, ahora, $a = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$. Entonces,

$$f(a) = f(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = b_1 f(e_1) + b_2 f(e_2) + b_3 f(e_3) = b$$

Y, por tanto, f es sobreyectiva respecto de E^3 . Para demostrar que f es inyectiva, supongamos que fuera $f(a') = f(a)$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= f(a') - f(a) = f(a' - a) = f((a'_1 - a_1)e_1 + (a'_2 - a_2)e_2 + (a'_3 - a_3)e_3) \\ &= (a'_1 - a_1)f(e_1) + (a'_2 - a_2)f(e_2) + (a'_3 - a_3)f(e_3) \end{aligned}$$

Puesto que $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ son independientes, se deduce que $a'_1 - a_1 = 0$, $a'_2 - a_2 = 0$, $a'_3 - a_3 = 0$. De modo que $a' = a$ y f es inyectiva. Recíprocamente, si f es inyectiva, entonces $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ son independientes. En efecto, de no ser así, existirían valores b_1, b_2, b_3 , no todos nulos, y con ellos un $a = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \neq 0$, tales que

$$0 = b_1 f(e_1) + b_2 f(e_2) + b_3 f(e_3) = f(b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = f(a)$$

Pero, para cada función lineal también sería $f(0) = 0$, lo cual resulta imposible por ser f inyectiva. Así, pues, queda probada la proposición.

7.4. Demostrar el teorema 7.2(i), a saber: Una aplicación lineal f de E^2 sobre E^3 es biyectiva respecto de un plano de E^3 si y sólo si el rango de f es igual a 2.

Supongamos que (e_1, e_2) sea una base de E^2 y que los vectores $f(e_1)$ y $f(e_2)$ sean linealmente independientes en E^3 . Como quiera que $f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2)$, todo x de E^2 va a aplicarse sobre el plano determinado por $f(e_1)$ y $f(e_2)$, como se muestra en la figura 7-9. Pero, además, todo b del plano puede escribirse en forma única, como una combinación de $f(e_1)$ y $f(e_2)$. De aquí se desprende, al igual que en el problema precedente, que f aplica E^2 inyecta y sobreyectivamente a un plano de E^3 . Recíprocamente, si f es una aplicación inyectiva sobre un plano, entonces, como en el problema anterior, $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son linealmente independientes. Dejamos al lector la demostración de este hecho. Así, pues, la aplicación es inyectiva sobre un plano, si y sólo si $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son independientes.

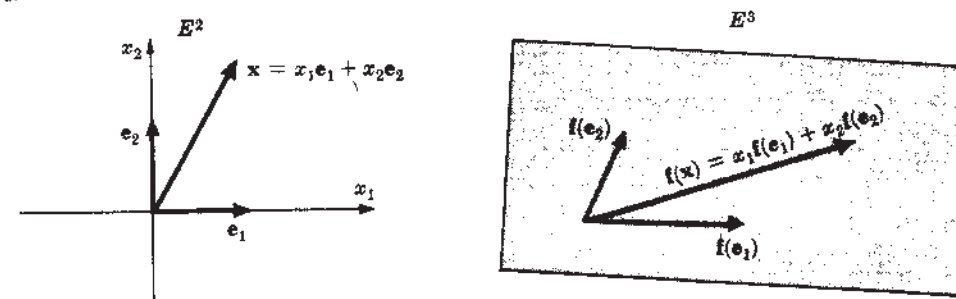


Fig. 7-9

Falta por demostrar que $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son independientes si y sólo si el rango de f es igual a 2. Para ello, supongamos que

$$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 \quad \text{y} \quad f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$$

Recordemos que $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son independientes si y sólo si

$$f(e_1) \times f(e_2) = (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})e_1 + (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32})e_2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_3 \neq 0$$

Pero, las componentes del vector anterior son los tres determinantes de orden 2×2 de la representación matricial de f , que es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

De suerte que $f(e_1)$ y $f(e_2)$ son linealmente independientes si y sólo si uno, por lo menos, de los tres menores de orden 2×2 de la matriz representativa de f es diferente de cero; es decir, si y sólo si el rango de f es igual a 2. Y esto demuestra el teorema.

- 7.5. Si las componentes de una función vectorial $f(x)$ son funciones lineales homogéneas de (x_1, \dots, x_n) , demostrar que f es una función lineal de x .

Se supone que

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right] g_i$$

Entonces, para todo $u = u_1e_1 + \dots + u_ne_n$ y $v = v_1e_1 + \dots + v_ne_n$, tenemos que

$$f(u+v) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(u_j+v_j) \right] g_i = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j \right] g_i + \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j \right] g_i = f(u) + f(v)$$

$$\text{y} \quad f(ku) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}ku_j \right] g_i = k \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j \right] g_i = kf(u)$$

Así, pues, f es lineal, que era lo que se quería demostrar.

CONTINUIDAD Y LIMITES

- 7.6. Calcular el $\lim_{x \rightarrow 0} [(x_1^2 + x_2^2)e_1 - x_1x_2e_2]$.

Como $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)e_1 - x_1x_2e_2$ es continua en $x = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(x_1^2 + x_2^2)e_1 - x_1x_2e_2] = 0$$

- 7.7. Demostrar que la función numérica en los reales dada por

$$f(x) = \begin{cases} x_1x_2/(x_1^2 + x_2^2), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$.

Para ello, escribimos $x_1 = |x| \cos \angle(x, e_1)$, $x_2 = |x| \cos \angle(x, e_2)$. Entonces,

$$|f(x) - f(0)| = \frac{|x|^3 \cos \angle(x, e_1) \cos^2 \angle(x, e_2)}{|x|^2} \leq |x| |\cos \angle(x, e_1)| |\cos^2 \angle(x, e_2)| \leq |x| < \epsilon$$

porque $|x| < \delta = \epsilon$. De esto se deduce que $f(x)$ es continua en 0.

- 7.8. Demostrar que la función numérica en los reales dada por

$$f(x) = \begin{cases} x_1x_2/(x_1^2 + x_2^2), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es continua en $x = 0$.

Para ello, consideremos los vectores, vecinos de cero, de la forma $x = h^2e_1 + he_2$, $h \neq 0$. Entonces, $x_1 = h^2$ y $x_2 = h$ y

$$|f(x) - f(0)| = \frac{h^4}{(h^4 + h^4)} - 0 = \frac{1}{2}$$

que no puede ser menor que ϵ si $\epsilon \leq \frac{1}{2}$.

- 7.9. Se dice que una función f es *acotada* en x_0 si existen los escalares $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq M$ para $|x - x_0| < \delta$. Demostrar que f es acotada en x_0 si es continua en él.

Escojamos cualquier $\epsilon > 0$. Como f es continua en x_0 , existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para $|x - x_0| < \delta$. Utilizando la desigualdad $|a| - |b| \leq |a - b|$, se deduce que $|f(x)| \leq |f(x_0)| + \epsilon = M$ para $|x - x_0| < \delta$, lo cual demuestra la proposición.

- 7.10. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, demostrar que f es continua en x_0 .

Puesto que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ cuando x pertenezca al entorno reducido $0 < |x - x_0| < \delta$. Pero, en $x = x_0$, se tiene que $f(x) = f(x_0)$. En consecuencia, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ si x pertenece al entorno completo $|x - x_0| < \delta$. Es decir, f es continua en x_0 .

- 7.11. Demostrar que $f = f_1g_1 + \dots + f_mg_m$ es continua en x_0 si y sólo si cada f_i es continua en x_0 .

Supongamos que f es continua en x_0 . Entonces, para $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Pero, entonces, para $|x - x_0| < \delta$, es

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| |\cos \angle(f(x) - f(x_0), g_i)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Por tanto, f_i es continua en x_0 . Recíprocamente, supongamos que cada una de las f_i , $i = 1, \dots, m$, es continua en x_0 . Entonces, para $|x - x_0| < \delta_i$, $i = 1, \dots, m$, $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \epsilon/m$. De esto se deduce que, para $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m)$, tendremos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(f_1(x) - f_1(x_0))g_1 + \dots + (f_m(x) - f_m(x_0))g_m| \\ &\leq |f_1(x) - f_1(x_0)| + \dots + |f_m(x) - f_m(x_0)| < m\epsilon/m = \epsilon \end{aligned}$$

y con esto queda demostrada la proposición.

- 7.12. Si el $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(v)}{|v|} = 0$, demostrar que el $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(hu_0)}{h} = 0$ ($u_0 \neq 0$).

Puesto que $(R(v)/|v|) \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow 0$, dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|R(v)/|v|| = |R(v)|/|v| < \epsilon/|u_0|$ para $0 < |v| < \delta$. Pero, entonces,

$$|R(hu_0)/h| = (|R(hu_0)|/|hu_0|)|u_0| < (\epsilon/|u_0|)|u_0| = \epsilon$$

para $0 < |hu_0| < \delta$, o sea $0 < |h| < \delta/|u_0|$. Así, pues, $(R(hu_0)/h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

- 7.13. Si f y g son continuas en x_0 , demostrar que $f \cdot g$ es continua en x_0 .

Consideremos

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| &\leq |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0)| + |f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)| \\ &= |f(x)| |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| |f(x) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Puesto que f y g son continuas en x_0 y particularmente f es acotada en x_0 , para todo $\epsilon > 0$ existen los δ_1 , δ_2 , δ_3 y $M > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq M \quad \text{para } |x - x_0| < \delta_1$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2|g(x_0)|} \quad \text{para } |x - x_0| < \delta_2$$

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{para } |x - x_0| < \delta_3$$

Entonces, para $\|x - x_0\| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$,

$$\|f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)\| < M \frac{\epsilon}{2M} + \|g(x_0)\| \frac{\epsilon}{2\|g(x_0)\|} = \epsilon$$

y, de esta suerte, $f \cdot g$ es continua en x_0 .

DERIVADAS DIRECCIONALES. FUNCIONES DERIVABLES

7.14. Demostrar que la siguiente función numérica en los reales,

$$f(x) = \begin{cases} x_1 x_2^2 / (x_1^2 + x_2^2), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene en $x = 0$ derivadas en todas las direcciones. Obsérvese que f no es continua en $x = 0$, como se demostró en el problema 7.8.

Sea $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, un vector, no nulo, tal que $u_1 \neq 0$. Entonces,

$$D_u f(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hu) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_1 u_2^2}{(u_1^2 + h^2 u_2^2)} = \frac{u_2^2}{u_1}$$

Para $u_1 = 0$, es decir, para $u = u_2 e_2$, tenemos que

$$D_u f(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + hu) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Por tanto, en 0 , f tiene derivada en todas las direcciones. Obsérvese que $D_u f(0)$ no es lineal, si se la considera como función de u . Este hecho contrasta con el caso en que f es derivable, pues entonces, $D_u f = df(u)$ es lineal en u .

7.15. Hallar la derivada de

$$f(x) = (x_1 \sin x_2) e_1 + (x_2 \sin x_1) e_2$$

en la dirección de $u_0 = (1/\sqrt{5})e_1 + (2/\sqrt{5})e_2$ en $x_0 = (\pi/2)e_1 + (\pi/4)e_2$.

Como las derivadas parciales de f son continuas, de acuerdo con el teorema 7.8 se deduce que f es derivable. Por ello, podemos utilizar la ecuación (7.2) y obtendremos

$$\begin{aligned} D_u f(x) &= df(x)(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} u_2 \\ &= ((\sin x_2) e_1 + (x_2 \cos x_1) e_2) u_1 + ((x_1 \cos x_2) e_1 + (\sin x_1) e_2) u_2 \end{aligned}$$

Por tanto
$$D_{u_0} f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{5}} e_1 + \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} e_1 + e_2 \right) \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2+\pi}{2\sqrt{10}} e_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} e_2$$

7.16. Para cada una de las siguientes funciones de E^2 en E^3 , determinar: (i) el conjunto V en el que f es continuamente derivable, (ii) la diferencial de f en V , (iii) el rango de df .

(a) $f(x) = (x_1 \cos x_2) g_1 + (x_1 \sin x_2) g_2 + x_2 g_3$

(b) $f(x) = |x_1 + x_2| g_1 + |x_1 - x_2| g_2 + g_3$

(a) (i) $f(x) = (x_1 \cos x_2) g_1 + (x_1 \sin x_2) g_2 + x_2 g_3$ tiene derivadas continuas para todo valor de x . En consecuencia, f es continuamente derivable en la totalidad de E^2 .

(ii) La diferencial de f es

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 \\ &= [(\cos x_2) g_1 + (\sin x_2) g_2] dx_1 + [(-x_1 \sin x_2) g_1 + (x_1 \cos x_2) g_2 + g_3] dx_2 \end{aligned}$$

(iii) La matriz de la diferencial es

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_x = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} &\left[\det \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix} \right]^2 + \left[\det \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 + \left[\det \begin{pmatrix} \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 \\ &= x_1^2 + \cos^2 x_2 + \sin^2 x_2 = x_1^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

se concluye que el rango de df es 2 para todo valor de x en E^2 .

(b) (i) La función $f(x) = |x_1 + x_2| g_1 + |x_1 - x_2| g_2 + g_3$ tiene derivadas continuas si $x_1 + x_2 = 0$ y $x_1 - x_2 \neq 0$. O sea: f es continuamente derivable en los siguientes cuatro conjuntos abiertos

$$A = \{x_1 + x_2 > 0 \text{ y } x_1 - x_2 > 0\}$$

$$B = \{x_1 + x_2 < 0 \text{ y } x_1 - x_2 > 0\}$$

$$C = \{x_1 + x_2 < 0 \text{ y } x_1 - x_2 < 0\}$$

$$D = \{x_1 + x_2 > 0 \text{ y } x_1 - x_2 < 0\}$$

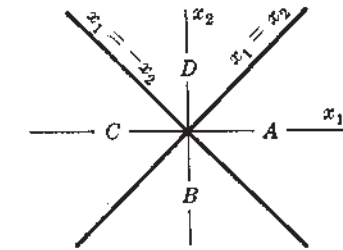


Fig. 7-10

que se muestran en la figura 7-10.

(ii) Si x pertenece a A , entonces $|x_1 + x_2| = x_1 + x_2$, $|x_1 - x_2| = x_1 - x_2$, y la diferencial es

$$df = (g_1 + g_2) dx_1 + (g_1 - g_2) dx_2$$

Si x pertenece a B , entonces $|x_1 + x_2| = -x_1 - x_2$, $|x_1 - x_2| = x_1 - x_2$ y

$$df = (-g_1 + g_2) dx_1 - (g_1 + g_2) dx_2$$

Si x pertenece a C , entonces $|x_1 + x_2| = -x_1 - x_2$, $|x_1 - x_2| = -x_1 + x_2$ y

$$df = -(g_1 + g_2) dx_1 + (-g_1 + g_2) dx_2$$

Si x pertenece a D , entonces $|x_1 + x_2| = x_1 + x_2$, $|x_1 - x_2| = -x_1 + x_2$ y

$$df = (g_1 - g_2) dx_1 + (g_1 + g_2) dx_2$$

(iii) Las representaciones matriciales de df son:

$$\begin{array}{ccc} & A & B & C & D \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En cada conjunto, el rango de df es igual a 2.

7.17. Sea $f = f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$ una función vectorial de E^2 en E^3 , derivable en $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Demostrar que el rango de df en x es igual a 2 si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} g_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_1} g_3 \right) \times \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} g_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} g_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} g_3 \right) \\ &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) g_1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \right) g_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) g_3 \end{aligned}$$

Obsérvese que las componentes de $\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2}$, con la salvedad de un signo, son los tres menores de orden 2×2 de la matriz siguiente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

De aquí se deduce que $\frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{\partial f}{\partial x_2} \neq 0$ si y sólo si uno de los menores de orden 2×2 no se anula, es decir, si y sólo si el rango de df es igual a 2.

7.18. Demostrar que si f es derivable en x_0 , existe un $M \geq 0$ tal que $\frac{df(x_0)(v)}{|v|} \leq M$ para todo valor de $v \neq 0$.

De acuerdo con la ecuación (7.2) de la página 137, es

$$\begin{aligned} \frac{|df(x_0)(v)|}{|v|} &= \left| v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right| / |v| \\ &\leq \left| \cos \angle(v, e_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + \cos \angle(v, e_n) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right| \leq M \end{aligned}$$

que era el resultado que se buscaba.

7.19. Demostrar que $f(x)$ es continua en x_0 si es derivable en x_0 .

Como se supone que f es derivable en x_0 , entonces,

$$f(x_0 + v) = f(x_0) + df(x_0)(v) + R(x_0, v);$$

o, si hacemos $v = x - x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + R(x_0, x - x_0)$$

en donde $(R(x_0, x - x_0)/|x - x_0|) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow x_0$. De aquí se deduce que, para $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |df(x_0)(x - x_0) + R(x_0, x - x_0)| \\ &\leq \frac{|df(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} |x - x_0| + \frac{|R(x_0, x - x_0)|}{|x - x_0|} |x - x_0| \leq (M_1 + M_2) |x - x_0| \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado el resultado del problema precedente y el hecho de que $R(x_0, x - x_0)/|x - x_0|$ es, además, acotada en un entorno reducido de x_0 , pues $(R(x_0, x - x_0)/|x - x_0|) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow x_0$. En consecuencia, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para $0 < |x - x_0| < \epsilon/(M_1 + M_2)$. Por ello, es $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ y, por tanto, $f(x)$ es continua en x_0 .

7.20. Demostrar el teorema 7.7(iii), a saber: Si f y g son derivables en x , entonces $f \cdot g$ es derivable en x y $d(f \cdot g) = f \cdot dg + (df) \cdot g$.

Consideremos la función de v ,

$$\begin{aligned} R(x, v) &= f(x+v) \cdot g(x+v) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)(v) - df(x)(v) \cdot g(x) \\ &= f(x+v) \cdot [g(x+v) - g(x) - dg(x)(v)] \\ &\quad + [f(x+v) - f(x) - df(x)(v)] \cdot g(x) + [f(x+v) - f(x)] \cdot dg(x)(v) \end{aligned}$$

Ahora, bien, como f y g son derivables, entonces

$$f(x+v) = f(x) + df(x)(v) + R_1(x, v) \text{ y } g(x+v) = g(x) + dg(x)(v) + R_2(x, v)$$

en donde, $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R_1(x, v)|}{|v|} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R_2(x, v)|}{|v|} = 0$. Sustituyendo en la anterior,

$$\begin{aligned} \frac{|R(x, v)|}{|v|} &= \frac{|f(x+v) \cdot R_2(x, v) + g(x) \cdot R_1(x, v) + [f(x+v) - f(x)] \cdot dg(x)(v)|}{|v|} \\ &\leq |f(x+v)| \frac{|R_2(x, v)|}{|v|} + |g(x)| \frac{|R_1(x, v)|}{|v|} + |f(x+v) - f(x)| \frac{|dg(x)(v)|}{|v|} \end{aligned}$$

Pero, $f(x+v)$ es acotada si v está en un entorno de 0, pues f es continua en x y $|dg(x)(v)/v|$ es acotada si $v \neq 0$, de acuerdo con el problema 7.18. Por otra parte, $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R_1(x, v)|}{|v|} = 0$ y $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R_2(x, v)|}{|v|} = 0$ como se vio anteriormente, y $\lim_{v \rightarrow 0} |f(x+v) - f(x)| = 0$, pues f es continua en x , y, de este modo, $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R(x, v)|}{|v|} = 0$. Así, pues,

$$f(x+v) \cdot g(x+v) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)(v) + df(x)(v) \cdot g(x) + R(x, v)$$

en donde, $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(x, v)}{|v|} = 0$. De aquí se concluye que $f \cdot g$ es derivable en x y $d(f \cdot g) = f \cdot dg + (df) \cdot g$, lo cual demuestra el teorema.

7.21. Teorema del valor medio. Sea f una función de x , numérica en los reales, sobre un conjunto abierto de E y derivable en todo punto de la recta $x^* = x_0 + tv_0$, $0 \leq t \leq 1$, como se muestra en la figura 7-11. Demostrar que existe un t_0 , $0 < t_0 < 1$, tal que $f(x_0 + v_0) = f(x_0) + D_{v_0}f(x_0 + t_0v_0)$.

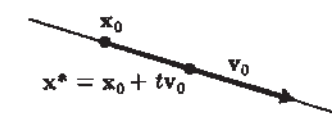


Fig. 7-11

Necesitamos demostrar que la función $F(t) = f(x_0 + tv_0)$ tiene derivada en todo $0 \leq t \leq 1$ y, después, aplicar el teorema del valor medio referido a una función de una sola variable real. Por ser f derivable a todo lo largo de $x_0 + tv_0$, $df(x_0 + tv_0)(v) = D_{v_0}f(x_0 + tv_0)$, y es lineal en v . De esta suerte,

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \frac{f(x_0 + tv_0 + hv_0) - f(x_0 + tv_0)}{h} = \frac{D_{hv_0}f(x_0 + tv_0) + R(x_0 + tv_0, hv_0)}{h} \\ &= D_{v_0}f(x_0 + tv_0) + \frac{R(x_0 + tv_0, hv_0)}{h} \end{aligned}$$

en donde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + tv_0, hv_0)}{|hv_0|} = 0$ y, por tanto, de acuerdo con el problema 7.12, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + tv_0, hv_0)}{h} = 0$. De ello se desprende que $F'(t)$ existe en todo $0 \leq t \leq 1$ y viene dada por la expresión

$$F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = D_{v_0}f(x_0 + tv_0)$$

De acuerdo con el teorema del valor medio relativo a una función numérica en los reales y de variable real, se deduce que existe un t_0 , $0 < t_0 < 1$, tal que $F(1) = F(0) + F'(t_0)$, o sea

$$f(x_0 + v_0) = f(x_0) + D_{v_0}f(x_0 + t_0v_0)$$

FUNCIONES COMPUESTAS. REGLA DE LA CADENA

7.22. Sea $y = (x_1^2 + x_2^2)e_1 + x_1x_2^2e_2$, $x = (u_1 \cos u_2)e_1 + (u_1 \sin u_2)e_2$

Hallar: (a) Las derivadas parciales $\partial y_1/\partial u_1$, $\partial y_2/\partial u_1$, $\partial y_1/\partial u_2$ y $\partial y_2/\partial u_2$ como funciones de u . (b) La diferencial dy como función de u .

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{\partial y_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = 2x_1 \cos u_2 + 2x_2 \sin u_2 = 2u_1 \cos^2 u_2 + 2u_1 \sin^2 u_2 = 2u_1 \\
 \frac{\partial y_2}{\partial u_1} &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = x_2^2 \cos u_2 + 2x_1 x_2 \sin u_2 \\
 &= u_1^2 \sin^2 u_2 \cos u_2 + 2u_1^2 \cos u_2 \sin^2 u_2 = 3u_1^2 \cos u_2 \sin^2 u_2 \\
 \frac{\partial y_1}{\partial u_2} &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = -2x_1 u_1 \sin u_2 + 2x_2 u_1 \cos u_2 \\
 &= -2u_1^2 \cos u_2 \sin u_2 + 2u_1^2 \cos u_2 \sin u_2 = 0 \\
 \frac{\partial y_2}{\partial u_2} &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = -x_2^2 u_1 \sin u_2 + 2x_1 x_2 u_1 \cos u_2 \\
 &= -u_1^3 \sin^3 u_2 + 2u_1^3 \cos^2 u_2 \sin u_2 \\
 &= u_1^3 (\sin u_2)(2 \cos^2 u_2 - \sin^2 u_2)
 \end{aligned}$$

Otro método:

$$\begin{aligned}
 y &= (u_1^2 \cos^2 u_2 + u_1^2 \sin^2 u_2) \mathbf{e}_1 + (u_1^3 \cos u_2 \sin^2 u_2) \mathbf{e}_2 = u_1^2 \mathbf{e}_1 + (u_1^3 \cos u_2 \sin^2 u_2) \mathbf{e}_2 \\
 \frac{\partial y_1}{\partial u_1} &= 2u_1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial u_1} = 3u_1^2 \cos u_2 \sin^2 u_2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u_2} = 0 \\
 \frac{\partial y_2}{\partial u_2} &= u_1^3 (2 \cos^2 u_2 \sin u_2 - \sin^3 u_2) = u_1^3 (\sin u_2)(2 \cos^2 u_2 - \sin^2 u_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad dy &= \frac{\partial y}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2} du_2 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial y_2}{\partial u_1} \mathbf{e}_2 \right) du_1 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial u_2} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial y_2}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 \right) du_2 \\
 &= (2u_1 \mathbf{e}_1 + (3u_1^2 \cos u_2 \sin^2 u_2) \mathbf{e}_2) du_1 + u_1^3 \sin u_2 (2 \cos^2 u_2 - \sin^2 u_2) \mathbf{e}_2 du_2
 \end{aligned}$$

7.23. Si $y = f(x)$ y $w = g(y)$ son aplicaciones de E en E , derivables, demostrar que el jacobiano de la aplicación compuesta $w = h(x) = g(f(x))$ y x es el producto del jacobiano de g en $f(x)$ por el jacobiano de f en x , es decir,

$$\frac{\partial(w_1 \cdots w_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \frac{\partial(w_1 \cdots w_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} \frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}$$

Recordemos que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de las matrices factores, es decir, si $(c_{ij}) = (a_{ij})(b_{ij})$, entonces $\det(c_{ij}) = \det(a_{ij}) \det(b_{ij})$. Como la matriz jacobiana de la función compuesta $w = h(x)$ es $\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial w_i}{\partial y_j} \right) \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_j} \right)$, se deduce que $\det \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) = \det \left(\frac{\partial w_i}{\partial y_j} \right) \det \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_j} \right)$, lo cual proporciona el resultado buscado.

7.24. Sea $y = f(x)$ una aplicación de clase C^1 de E^2 en E^3 , tal que el rango de df sea igual a 2 para todo valor de x , y sea $x = x(t)$ una curva regular de clase C^1 en E^3 . Demostrar que

(a) $y = f(x(t))$ es una curva regular de clase C^1 en E^3 .

$$(b) \quad \left| \frac{dy}{dt} \right|^2 = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \right|^2 \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \right|^2 \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2$$

(a) Del teorema 7.10 se deduce que $y = f(x(t))$ pertenece a C^1 y que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} = D_{dx/dt} f$$

Falta demostrar que $dy/dt \neq 0$. Como el rango de df es igual a 2, según el teorema 7.2(i), se concluye que en todo t la función lineal $D_x f$ de v es inyectiva. Por tanto, como es $dx/dt \neq 0$, entonces, $dy/dt = D_{dx/dt} f \neq 0$.

(b) Desarrollando la expresión dada, se tiene

$$\left| \frac{dy}{dt} \right|^2 = \left(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial y}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1} \right) \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2} \right) \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2$$

lo cual proporciona el resultado buscado.

7.25. Demostrar el teorema 7.10, a saber: Si f es derivable en x , y g es derivable en $f(x)$, entonces la función compuesta $h = g \circ f$ es derivable en x y su diferencial $H_x = M_{f(x)} \circ L_x$, en donde L_x es la diferencial de f en x y $M_{f(x)}$ es la diferencial de g en $f(x)$.

Es menester demostrar que

$$h(x+v) = h(x) + (M_{f(x)} \circ L_x)(v) + R(x, v)$$

en donde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(x, v)}{|v|} = 0$, o, lo que es igual,

$$g(f(x+v)) = g(f(x)) + M_{f(x)}(L_x(v)) + R(x, v)$$

en donde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R(x, v)}{|v|} = 0$. Ahora, bien, como f es derivable en x , entonces,

$$f(x+v) = f(x) + L_x(v) + R_1(x, v)$$

en donde $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R_1(x, v)}{|v|} = 0$. Además, como g es derivable en $f(x)$, se tiene

$$g(f(x) + u) = g(f(x)) + M_{f(x)}(u) + R_2(f(x), u)$$

en donde $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{R_2(f(x), u)}{|u|} = 0$. Supongamos ahora que

$$u = f(x+v) - f(x) = L_x(v) + R_1(x, v)$$

Entonces, sustituyendo en lo anterior y utilizando el hecho de que M es lineal, tendremos que

$$\begin{aligned}
 g(f(x+v)) &= g(f(x)) + M_{f(x)}(L_x(v) + R_1(x, v)) + R_2(f(x), u) \\
 &= g(f(x)) + M_{f(x)}(L_x(v)) + M_{f(x)}(R_1(x, v)) + R_2(f(x), u)
 \end{aligned}$$

En esta forma, sólo falta demostrar que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{M_{f(x)}(R_1(x, v)) + R_2(f(x), u)}{|v|} = 0$$

Del problema 7.18 se deduce que existe una constante K tal que

$$|M_{f(x)}(R_1(x, v)) + R_2(f(x), u)| \leq K |R_1(x, v) + R_2(f(x), u)| \leq K |R_1(x, v)| + K |R_2(f(x), u)|$$

Pero, $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R_1(x, v)|}{|v|} = 0$, pues f es derivable en x . Por otra parte, $R_2(f(x), u) = 0$ cuando $u = 0$, y, en los demás casos,

$$\frac{|R_2(f(x), u)|}{|v|} = \frac{|R_2(f(x), u)|}{|u|} \frac{|u|}{|v|}$$

Ahora, bien $\frac{|u|}{|v|} = \frac{|L_x(v) + R_1(x, v)|}{|v|}$ es acotado cuando v pertenece a un entorno de 0, de acuerdo

con el problema 7.18 y porque el $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R_1(x, v)|}{|v|} = 0$, por ser f derivable en x . Como quiera que

$u \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow 0$ y como $\frac{|u|}{|v|}$ es acotado y el $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{|R_2(f(x), u)|}{|u|} = 0$ por ser g derivable en $f(x)$, entonces

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{|R_2(f(x), u)|}{|v|} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{|R_2(f(x), u)|}{|u|} = 0$$

Reuniendo todo lo anterior, se concluye que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{M_{f(x)}(R_1(x, v)) + R_2(f(x), u)}{|v|} = 0$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

FUNCIONES DE CLASE C^n . TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

7.26. Hallar las siguientes derivadas de la función $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)g_1 + x_1 e^{x_2} g_2 + x_2 e^{x_1} g_3$ en el punto $x_0 = e_1 - e_2$: (a) $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2$, (b) $\partial^3 f / \partial x_1^2 \partial x_2$, (c) $D_{v_0}^2 f$ en las direcciones de $u_0 = (e_1 + e_2)$ y de $v_0 = (e_1 - 2e_2)$.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} \right] = \frac{\partial}{\partial x_1} [2x_2 g_1 + x_1 e^{x_2} g_2 + e^{x_1} g_3] = x_2 g_2 + e^{x_1} g_3 \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) &= e^{-1} g_2 + e g_3 \\
 (b) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = e^{x_1} g_3, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2}(x_0) = e g_3 \\
 (c) \quad D_{v_1}^2 f(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} u_1 v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} u_2 v_2 \\
 &= (2g_1 + x_2 e^{x_1} g_3) u_1 v_1 + (e^{x_2} g_2 + e^{x_1} g_3) (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (2g_1 + x_1 e^{x_2} g_2) u_2 v_2 \\
 D_{v_0 u_0}^2 f(x_0) &= (2g_1 - e g_3) + (e^{-1} g_2 + e g_3)(-1) + (2g_1 + e^{-1} g_2)(-2) = -(2g_1 + 3e^{-1} g_2 + 2e g_3)
 \end{aligned}$$

7.27. Sea $w = g(y_1, y_2)$, $y_1 = y_1(x_1, x_2)$, $y_2 = y_2(x_1, x_2)$. Demostrar que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} \left[\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right] \\
 &\quad + \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 \frac{\partial w}{\partial x_2} &= \frac{\partial w}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right) \\
 &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} \right) \right] \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial w}{\partial y_2} \right) \right] \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 &= \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right] \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 &\quad + \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y_1 \partial y_2} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right] \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial y_2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2}
 \end{aligned}$$

que es el resultado deseado.

7.28. Demostrar que la función

$$f(x) = (e^{x_1} \cos x_2) e_1 + (e^{x_1} \sin x_2) e_2$$

cumple las condiciones del teorema de la función inversa en E^2 , pero, no es inyectiva en E^2 .

Es evidente que f es de clase C^1 en E^2 . Además,

$$J(f)(x) = \det \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos x_2 & -e^{x_1} \sin x_2 \\ e^{x_1} \sin x_2 & e^{x_1} \cos x_2 \end{pmatrix} = e^{2x_1} \neq 0$$

para todo valor de x . Como es $f(x + 2\pi e_2) = f(x)$, entonces la función no es inyectiva en E^2 .

7.29. Supongamos que la aplicación $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ cumpla la condición del teorema de la función inversa y que la aplicación inversa venga dada por $x_1 = F_1(y_1, y_2)$, $x_2 = F_2(y_1, y_2)$. Si $J = \partial(f_1 f_2) / \partial(x_1, x_2)$, demostrar que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = \frac{1}{J} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{J} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = -\frac{1}{J} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_2} = \frac{1}{J} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

De acuerdo con la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\partial y_1}{\partial y_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & 0 &= \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \\
 0 &= \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & 1 &= \frac{\partial y_2}{\partial y_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial F_2}{\partial y_2}
 \end{aligned}$$

Despejamos $\partial F_1 / \partial y_1$ y $\partial F_2 / \partial y_1$ en las ecuaciones primera y tercera y obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} &= \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}} = \frac{1}{J} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} &= \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}
 \end{aligned}$$

Análogamente, se procede para $\partial F_1 / \partial y_2$ y $\partial F_2 / \partial y_2$, con lo cual se completa el problema.

Problemas propuestos

- 7.30. Demostrar que $y = \cos x_1 g_1 + \sin x_1 g_2 + x_2 g_3$ aplica la semi-faja $0 \leq x_1 < 2\pi$, $-\infty < x_2 < \infty$ biyectivamente sobre el cilindro circular de radio igual a 1 y eje en y_3 .
- 7.31. Demostrar que $y = \sinh x_1 \sin x_2 g_1 + \sinh x_1 \cos x_2 g_2 + \sinh x_1 g_3$ aplica la semi-faja $x_1 \geq 0$, $0 < x_2 < 2\pi$ sobre un cono circular que tiene como eje el y_3 .
- 7.32. Demostrar que el rango de la aplicación lineal
- $$y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3, \quad y_2 = x_1 - x_2 - 2x_3, \quad y_3 = 3x_1 + 3x_2$$
- es igual a 2 y determinar el plano sobre el cual se aplica el E^3 .
- 7.33. Demostrar el teorema 7.1(ii), a saber: Una aplicación lineal f de E^3 aplica E^3 sobre un plano de E^3 si y sólo si el rango de f es igual a 2.
- 7.34. Demostrar el teorema 7.2(ii), a saber: Una aplicación lineal f de E^2 en E^3 aplica E^2 sobre una recta de E^3 si y sólo si el rango de f es igual a 1.
- 7.35. Demostrar que $f(x) = \begin{cases} x_1 \sin 1/x_2 + x_2 \sin 1/x_1, & \text{si } x_1 x_2 \neq 0 \\ 0, & \text{si } x_1 x_2 = 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$.
- 7.36. Si f es una función lineal de x , demostrar que existe un $M > 0$ tal que $|f(x)| < M|x|$ para todo valor de x .
- 7.37. Demostrar que si f y g son continuas en x , también $f + g$ es continua en x .
- 7.38. Demostrar que, si f es continua en un conjunto compacto V , existe un $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ si x está en V .
- 7.39. Demostrar que el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = L_i$, $i = 1, \dots, m$, donde $f = f_1 g_1 + \dots + f_m g_m$ y $L = L_1 g_1 + \dots + L_m g_m$.
- 7.40. Demostrar que, si el $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, entonces es $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$.
- 7.41. Demostrar que, si f es una función lineal en E , entonces es continua en E .

7.42. Hallar la derivada de $f(x) = x_1x_2e_1 + (x_1^2 + x_2^2)e_2$ en la dirección de $u_0 = (e_1 - e_2)/\sqrt{2}$ en $x_0 = e_1 + e_2$. Resp. 0

7.43. Determinar: (a) el conjunto de los puntos (x_1, x_2) en donde $f(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}e_1 + (x_1^2 - x_2^2)^{-1}e_2$ es continuamente derivable, y (b) el jacobiano de f .
Resp. (a) $x_1 \neq \pm x_2$, (b) $-8x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-2}(x_1^2 - x_2^2)^{-2}$

7.44. Determinar el conjunto de los puntos (x_1, x_2, x_3) para los cuales el rango de
 $f(x) = (x_1 \sin x_2 \cos x_3)e_1 + (x_1 \sin x_2 \sin x_3)e_2 + (x_1 \cos x_2)e_3$
es igual a 3. Resp. $x_1^2 \sin x_2 \neq 0$

7.45. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de E^3 definida por
 $y = (x_1^2 + x_2^2)e_1 - x_1x_2e_2 + x_2x_1^2e_3$
en el punto que corresponde a $x_0 = e_1 + e_2$.
Resp. $y_1 = 2 + 2v_1 + 2v_2$, $y_2 = -1 - v_1 - 2v_2$, $y_3 = 1 + 2v_1 + v_2$

7.46. Demostrar que el jacobiano de una función f , definida en E^3 , viene dado por el siguiente triple producto

$$J(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

7.47. Demostrar que, si f y g son derivables en x , entonces,
(a) $f + g$ es derivable en x y $d(f + g) = df + dg$,
(b) $f \times g$ es derivable en x y $d(f \times g) = (df) \times g + f \times dg$.

7.48. Sean $\begin{cases} w_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ w_2 = y_1y_2 \\ w_3 = y_1y_3 \end{cases}$ y $\begin{cases} y_1 = x_1x_2x_3 \\ y_2 = e^{x_2} \\ y_3 = e^{x_3} \end{cases}$ Determinar $\frac{\partial(w_1w_2w_3)}{\partial(x_1x_2x_3)}$
Resp. $x_1x_2^2x_3^2e^{x_2+x_3}(x_1x_2x_3 - e^{x_2} - e^{x_3})$

7.49. Hallar las siguientes derivadas de $f(x) = (x_1 + x_2)^2e_1 + x_1 \sin x_2e_2$ en $x_0 = e_1 + \pi e_2$:
(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, (b) $\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2}$, (c) $D_{v_0}u_0 f$; $u_0 = (e_1 + 2e_2)$ y $v_0 = (e_1 - e_2)$
Resp. (a) $2e_1 - e_2$, (b) 0, (c) $-e_2$.

7.50. Si $w = (y_1 + y_2)e_1 + e^{y_1+y_2}e_2$ y $y = x_1x_2^2e_1 + x_1^2x_2e_2$, hallar: $\partial^2 w / \partial x_1 \partial x_2$, utilizando la regla de la cadena. Resp. $(2x_2 + 2x_1)e_1 + e^{y_1+y_2}[(x_1^2 + 2x_1x_2)(x_2^2 + 2x_1x_2) + (2x_2 + 2x_1)]e_2$

7.51. Demostrar que $f(x) = (x_1^2 - x_2^2)e_1 + x_1x_2e_2$ cumple las condiciones del teorema de la función inversa para todo valor de x , excepto para $x = 0$, pero no es inyectiva en este conjunto.

7.52. Demostrar que la función

$$f(x) = \frac{x_1}{1 + x_1 + x_2 + x_3}g_1 + \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2 + x_3}g_2 + \frac{x_3}{1 + x_1 + x_2 + x_3}g_3$$

cumple las condiciones del teorema de la función inversa para todos los valores de x en E^3 en los cuales $1 + x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$. Demostrar que f es inyectiva donde esté definida, y hallar $f^{-1}(x)$ en forma explícita.

$$\text{Resp. } f^{-1}(x) = \frac{x_1}{1 - x_1 - x_2 - x_3}g_1 + \frac{x_2}{1 - x_1 - x_2 - x_3}g_2 + \frac{x_3}{1 - x_1 - x_2 - x_3}g_3$$

7.53. Demostrar que si f cumple las condiciones del teorema de la función inversa en un conjunto abierto V de E , entonces $J(f^{-1})J(f) = 1$, en donde f sea inyectiva.

7.54. Hallar los tres primeros términos del desarrollo de $f(x) = (x_1 \sin x_2)e_1 + (x_2 \cos x_1)e_2$ alrededor de $x_0 = \pi e_2$. Resp. $\pi e_2 + e_2(x_2 - \pi) - \frac{1}{2}\pi e_2 x_1^2 - e_1 x_1(x_2 - \pi)$

Capítulo 8

Concepto de superficie

REPRESENTACIONES PARAMÉTRICAS REGULARES

Intuitivamente consideramos una superficie como un conjunto de puntos del espacio que semeja una porción de plano en la vecindad de cada uno de ellos. Esto ocurrirá cuando la superficie sea la imagen de una aplicación suficientemente regular de un conjunto de puntos del plano en puntos de E^3 . Como lo que necesitamos es aplicar a la superficie los métodos del cálculo, supondremos que la aplicación es, por lo menos, de clase C^1 . Además, para cerciorarnos de que la superficie tiene en cada punto un plano tangente, supondremos que, en todo punto, el rango de la matriz jacobiana de la aplicación es dos. En esta forma, llegamos a la siguiente definición:

Una representación paramétrica regular de clase C^m ($m \geq 1$) de un conjunto de puntos S de E^3 es una aplicación $x = f(u, v)$ de un conjunto abierto U del plano uv sobre S , tal que

(i) f es de clase C^m en U .

(ii) Si (e_1, e_2, e_3) es una base de E^3 y $f(u, v) = f_1(u, v)e_1 + f_2(u, v)e_2 + f_3(u, v)e_3$, entonces, para todo (u, v) de U , es el

$$\text{rango de } \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

Recordemos que f es de clase C^m en U si todas las derivadas parciales de f de orden m , o menor, son continuas en U . Recordemos, además, que el rango de una matriz es el orden del menor, no-nulo, más grande de la matriz. De esta suerte, el rango de la matriz anterior es 2 si y sólo si por lo menos uno de los tres menores de orden 2×2 de la matriz es diferente de cero.

Al igual que en el caso de las curvas, en el de las superficies a las variables u y v se las denomina parámetros. Además, denotaremos una representación paramétrica mediante la expresión $x = x(u, v)$, y sus derivadas parciales, con los siguientes símbolos

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}, \quad \text{etc.}$$

Obsérvese que, hablando en sentido estricto, una representación paramétrica del tipo $x = x(u, v)$ es una aplicación. Sin embargo, a veces hablaremos un poco vagamente e identificaremos la aplicación con su imagen, que es un conjunto de puntos de E^3 . Por ejemplo, podremos decir que P es un punto de la representación paramétrica $x = x(u, v)$ cuando P sea un punto de la imagen de $x = x(u, v)$, o que la representación paramétrica $x = x(u, v)$ está contenida en un conjunto de puntos S en E^3 cuando la imagen de $x = x(u, v)$ sea un subconjunto de S .

Supongamos ahora que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una representación paramétrica regular de S , definida en U , como se muestra en la figura 8-1. Obsérvese que la imagen de la recta coordenada $v = v_0$ en U será una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v_0)$ de S , a lo largo de la cual u es un parámetro. Esta curva recibe el nombre de *curva $v = v_0$, de parámetro u* . Análogamente, la imagen de la recta coordenada $u = u_0$ es la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v)$ de S , que se denomina *curva $u = u_0$, de parámetro v* . De esta suerte, la representación paramétrica cubre a S con dos familias de curvas, que constituyen la imagen de las rectas coordenadas $v = \text{constante}$ y $u = \text{constante}$.

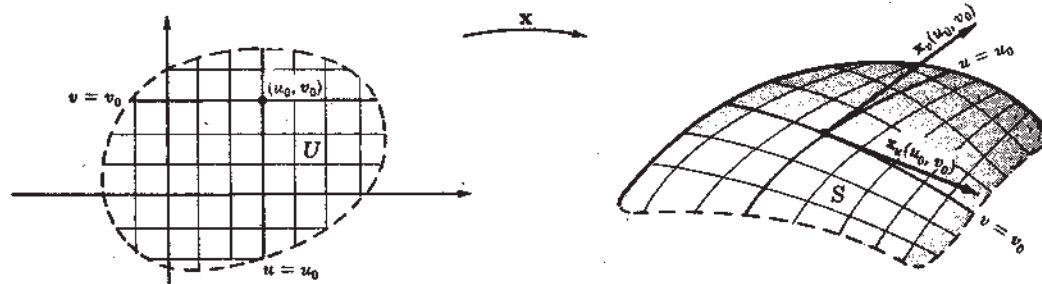


Fig. 8-1

Recordemos, además, que $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ es la derivada de \mathbf{x} en (u_0, v_0) y en la dirección del eje u . En consecuencia, $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ es un vector tangente en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ a la curva de parámetro u , en el sentido del crecimiento de u . Análogamente, $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ es un vector tangente en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ a la curva de parámetro v , en el sentido del crecimiento de v .

Por último, observemos que las tres componentes del producto vectorial

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \mathbf{e}_2 & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \mathbf{e}_3 & \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_3}{\partial v} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

difieren de los menores de orden 2×2 de la matriz jacobiana de \mathbf{x} a lo sumo en un signo. Por tanto, el rango de la matriz jacobiana de \mathbf{x} es dos si y sólo si $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$. De esta suerte, una aplicación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de un conjunto abierto U sobre S es una representación paramétrica regular de clase C^m de S si y sólo si

- \mathbf{x} pertenece a la clase C^m ($m \geq 1$) de U .
- $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$, para todo (u, v) en U .

Ejemplo 8.1.

(a) La ecuación

$$\mathbf{x} = (u+v)\mathbf{e}_1 + (u-v)\mathbf{e}_2 + (u^2+v^2)\mathbf{e}_3$$

define una aplicación del plano uv sobre el paraboloide elíptico $x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ que se muestra en la figura 8-2. Es evidente que \mathbf{x} tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes. Además, para todo (u, v) es

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| &= \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & 1 & 1 \\ \mathbf{e}_2 & 1 & -1 \\ \mathbf{e}_3 & 2u & 2v \end{pmatrix} \right| \\ &= [4 + 8(u^2 + v^2)]^{1/2} \neq 0 \end{aligned}$$

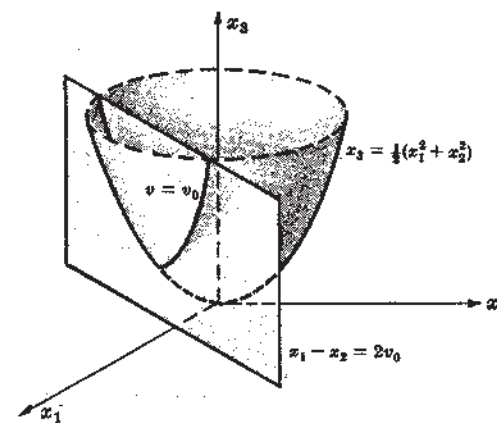


Fig. 8-2

Así, pues, \mathbf{x} es una representación paramétrica regular de clase C^∞ del paraboloide. Al eliminar u en las componentes $x_1 = u + v_0$, $x_2 = u - v_0$, encontramos que la curva $v = v_0$, de parámetro u , es la intersección del paraboloide con el plano vertical $x_1 - x_2 = 2v_0$. Análogamente, la curva $u = u_0$, de parámetro v , es la intersección del paraboloide con el plano vertical $x_1 + x_2 = 2u_0$.

- (b) Recordemos que (véase el problema 7.1 de la página 146)

$$\mathbf{x} = (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 + (\cos \phi) \mathbf{e}_3$$

define una aplicación del plano $\theta\phi$ sobre la esfera unidad, $|\mathbf{x}| = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. También en este caso, \mathbf{x} tiene derivadas parciales de todos los órdenes. Sin embargo, es de observar que la aplicación no es regular a todo lo largo de las rectas coordenadas $\phi = \pm \pi n$, $n = 0, 1, \dots$, en donde

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi| &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \\ \mathbf{e}_2 & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \mathbf{e}_3 & 0 & -\sin \phi \end{pmatrix} \\ &= |(-\cos \theta \sin^2 \phi) \mathbf{e}_1 - (\sin \theta \sin^2 \phi) \mathbf{e}_2 - (\sin \phi \cos \phi) \mathbf{e}_3| = |\sin \phi| = 0 \end{aligned}$$

Si la aplicación se restringe a la faja infinita $-\infty < \theta < \infty$, $0 < \phi < \pi$, será una representación paramétrica regular de clase C^∞ de la esfera agujereada en los polos norte y sur, como se muestra en la figura 8-3.

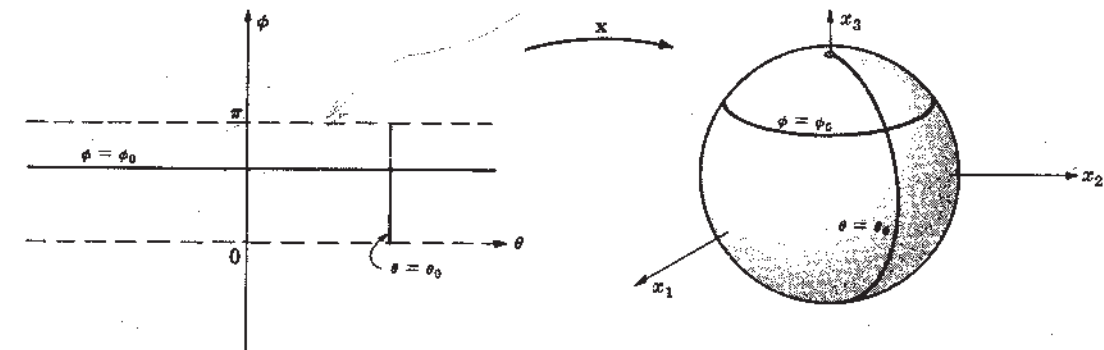


Fig. 8-3

La familia de curvas $\phi = \phi_0$, de parámetro θ , recibe el nombre de *paralelos de latitud*, y son las intersecciones de la esfera con la familia de planos horizontales $x_3 = \cos \phi_0$. La familia de curvas $\theta = \theta_0$, de parámetro ϕ , se llama *meridianos de longitud*. Y son las intersecciones de la esfera con la familia de planos que pasan por el eje x_3 , $x_1 \sin \theta_0 - x_2 \cos \theta_0 = 0$. Obsérvese que los paralelos de latitud y los meridianos de longitud se cortan en ángulos rectos, pues

$$\mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = ((-\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2) \cdot ((\cos \theta \cos \phi) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_2 - (\sin \phi) \mathbf{e}_3) = 0$$

- (c) Se llama *cilindro* a una superficie engendrada por una recta L que se mueve, conservándose paralela a sí misma, a lo largo de una curva C . Como puede verse en la figura 8-4, si C está dada por $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u)$, y \mathbf{g} es un vector unidad en la dirección de L , entonces el cilindro viene representado por $\mathbf{x} = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{g}$. Es evidente que \mathbf{x} es una representación regular de clase C^m si \mathbf{y} es de clase C^m y $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \mathbf{y}' \times \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$ para todo u . Las curvas de parámetro u son *traslaciones* de C en la dirección de \mathbf{g} . Las curvas de parámetro v son copias de L y reciben el nombre de *generatrices* del cilindro.

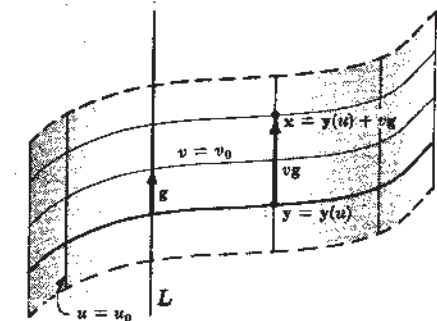


Fig. 8-4

CARTAS LOCALES

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ sea una representación paramétrica regular de clase C^m de S , definida en U , como se muestra en la figura 8-5, y que $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ sea una aplicación de clase C^m de U en el plano $\theta\phi$, tal que en cada (u, v) el jacobiano $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) \neq 0$. Ahora, bien, en general, tal aplicación, $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$, no es inyectiva. Sin embargo, del teorema de la función inversa se infiere que esto es lo que ocurre, al menos localmente. Es decir, para cada (u_0, v_0) en U existirá un conjunto abierto W que contenga a (u_0, v_0) y tal que $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ aplique a W inyectiva y sobreyectiva en un conjunto abierto W^* de tal suerte que su inversa, $u = u(\theta, \phi)$, $v = v(\theta, \phi)$, sea de clase C^m en W^* . Consideremos, ahora, la aplicación compuesta, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi) = \mathbf{x}(u(\theta, \phi), v(\theta, \phi))$ de W^* en S . De acuerdo con la regla de la cadena, $\mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ es de clase C^m . Además,

$$\mathbf{x}_\theta^* \times \mathbf{x}_\phi^* = (\mathbf{x}_u u_\theta + \mathbf{x}_v v_\theta) \times (\mathbf{x}_u u_\phi + \mathbf{x}_v v_\phi) = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u_\theta v_\phi - v_\theta u_\phi) = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \neq 0$$

pues $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ y el jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} = \left[\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)} \right]^{-1} \neq 0$. Así, pues, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ es una representación paramétrica regular de clase C^m ; pero, es necesario observar que lo es únicamente de una parte de S . Como resultaría excesivo restringirnos a considerar únicamente los cambios de parámetro $u = u(\theta, \phi)$, $v = v(\theta, \phi)$ que son inyectivos en la totalidad de U , nos vemos precisados a definir una superficie por medio de una colección de tales representaciones parciales de la misma, en vez de hacerlo por una única representación de la superficie total. Damos, pues, la siguiente definición.

Se llama *carta local de clase C^m* ($m \geq 1$) en S , a una aplicación de un conjunto abierto U en S tal que

- \mathbf{x} sea de clase C^m en U .
- $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$, para todo (u, v) de U .
- \mathbf{x} sea inyectiva y bicontinua sobre U .

De esta suerte, una *carta local* es una representación paramétrica regular de una parte de S , que es inyectiva y bicontinua.

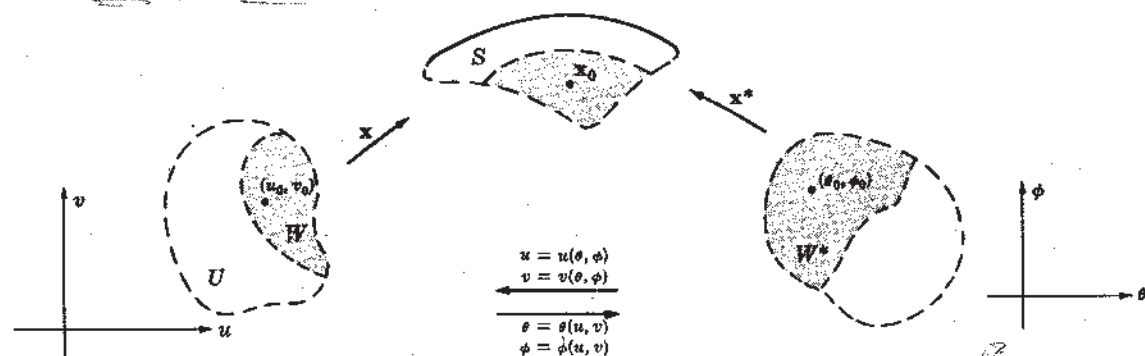


Fig. 8-5

Ejemplo 8.2.

(a) define una aplicación del disco unidad $u^2 + v^2 < 1$ sobre la semi-esfera superior de la esfera unidad $|x| = 1$. Es evidente que \mathbf{x} es de clase C^∞ . Además,

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \left| \frac{u}{[1 - (u^2 + v^2)]^{1/2}} \mathbf{e}_1 + \frac{v}{[1 - (u^2 + v^2)]^{1/2}} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right| = [1 + (u^2 + v^2)]^{-1/2} \neq 0$$

para todo (u, v) . Así, pues, \mathbf{x} es una representación paramétrica regular de clase C^∞ de la semi-esfera. La aplicación es inyectiva; en efecto, $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u', v')$ implica que $(u, v) = (u', v')$, pues $x_1 = u$ y $x_2 = v$. La aplicación es, además, bicontinua; pues evidentemente, \mathbf{x} es continua y la aplicación inversa,

$$(u, v) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(u, v)) = \mathbf{x}^{-1}(x_1, x_2)$$

$$(u, v) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(u, v)) = \mathbf{x}^{-1}(x_1, x_2) \quad \text{no es continua}$$

que es la proyección $u = x_1$, $v = x_2$, es continua. De esta suerte, pues, la aplicación es una carta local de clase C^∞ sobre la esfera.

- (b) Consideremos el cilindro engendrado por una recta vertical que se mueve a lo largo de la curva del plano x_1x_2 cuya ecuación polar es $r = \sin 2\theta$ para valores de θ en el intervalo $0 < \theta < 3\pi/4$, como se muestra en la figura 8-6. Obsérvese que el cilindro no se corta a sí mismo, en absoluto, pues hemos excluido el extremo $\theta = 0$. Fácilmente se verifica que

$$\mathbf{x} = (\sin 2\theta \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\sin 2\theta \sin \theta) \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$$

($0 < \theta < 3\pi/4$, $-\infty < u < \infty$), es una representación paramétrica regular de clase C^∞ del cilindro. Esta representación es inyectiva. Pero, la aplicación inversa no es continua, pues cualquier entorno de un punto del eje x_3 , vale decir, donde $\theta = \pi/2$, incluirá puntos del cilindro próximos al borde, $\theta = 0$. Así, pues, esta representación no es una carta local sobre el cilindro. La restricción de \mathbf{x} a: (a) $0 < \theta < \pi/2$, $-\infty < u < \infty$, y, (b) $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$, $-\infty < u < \infty$, define dos cartas locales que cubren el cilindro.

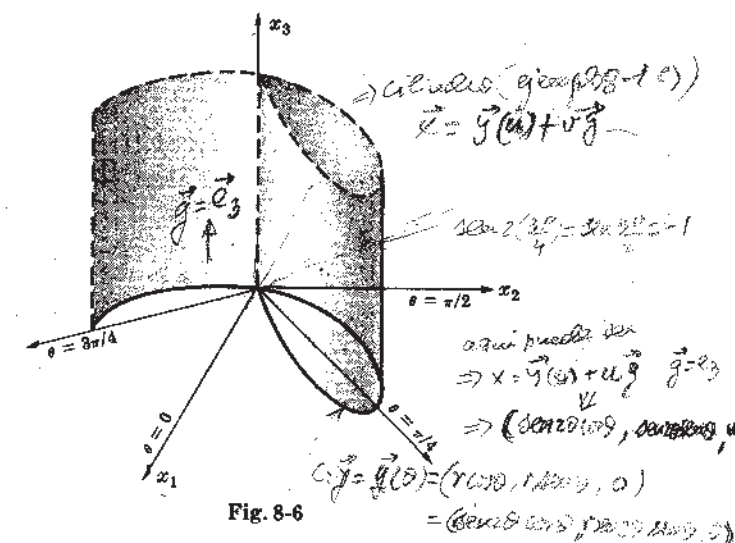


Fig. 8-6

En el problema 8.7 demostraremos que las funciones de la forma $\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + f(u, v)\mathbf{e}_3$, o $\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + f(u, v)\mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3$, o $\mathbf{x} = f(u, v)\mathbf{e}_1 + u\mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3$ definen cartas locales de clase C^m simplemente si $f(u, v)$ es una función de clase C^m . Estas cartas se denominan *cartas de Monge* y son muy útiles en el estudio de las superficies. Demostraremos que, si es posible representar un conjunto S mediante una representación paramétrica de clase C^m , entonces, por cada P_0 perteneciente a S , existirá una carta de Monge de clase C^m que pertenezca a S y contenga a P_0 . Por supuesto, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una representación paramétrica regular de clase C^m de S , definida en U , y (u_0, v_0) es un punto perteneciente a U que se aplica en P_0 , como se muestra en la figura 8-7. Como quiera que $\mathbf{x}(u, v)$ es regular, entonces, por lo menos uno de los menores de orden 2×2 de la matriz jacobiana de \mathbf{x} es diferente de cero en (u_0, v_0) . Sin perder generalidad, podremos suponer que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$$

en (u_0, v_0) . Consideremos, ahora, la aplicación $x_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$ de U en el plano x_1x_2 definida por las dos primeras componentes de \mathbf{x} . Es evidente que esta aplicación es de clase C^m en U , pues \mathbf{x} es de clase C^m en U . Además, su jacobiano, que es el determinante precedente, es diferente de cero en algún entorno de (u_0, v_0) pues es continuo y diferente de

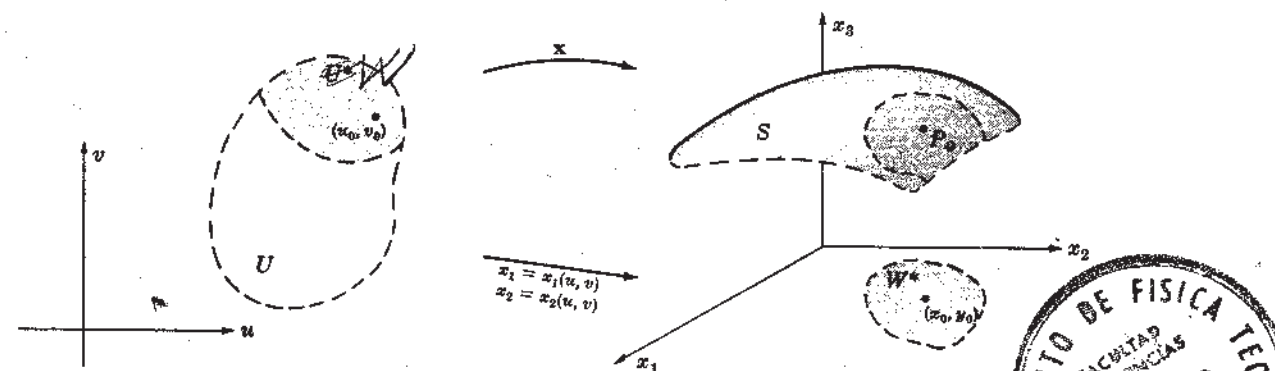


Fig. 8-7



cero en (u_0, v_0) . Y, entonces, de acuerdo con el teorema de la función inversa, se deduce que existirá un conjunto abierto W de U , que contenga a (u_0, v_0) , en el que la aplicación sea inyectiva y tenga una función inversa $u = u(x_1, x_2)$, $v = v(x_1, x_2)$, de clase C^m en un conjunto abierto W^* del plano x_1x_2 . Pero, en ese caso, la aplicación compuesta de W^* en S , a saber

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_2 + x_2(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_2 + x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_3 \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

es una carta de Monge de clase C^m de S , definida en W^* , cuya imagen contiene a P_0 . Tenemos así el

Teorema 8.1. Si un conjunto S de E^3 tiene una representación paramétrica regular de clase C^m , entonces para cada punto P de S existe una carta de Monge de clase C^m en S que contenga a P .

DEFINICION DE SUPERFICIE SIMPLE

Sea S un conjunto de puntos de E^3 para el cual exista una colección \mathcal{B} de cartas locales de clase C^m ($m \geq 1$) en S , que cumpla las siguientes condiciones

- \mathcal{B} cubre a S , es decir, por cada punto P de S existe una carta local $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ en \mathcal{B} que contiene a P .
- Toda carta local $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es la intersección de un conjunto abierto O de E^3 con S , tal como se muestra en la figura 8-8.

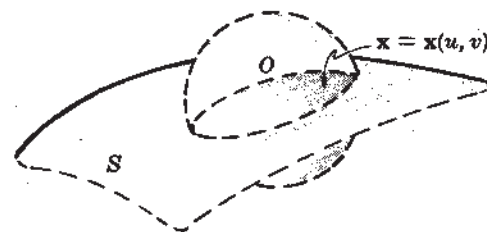


Fig. 8-8

Entonces, S juntamente con la totalidad de las cartas locales de clase C^m de S , es una superficie simple de clase C^m en E^3 .

Un conjunto de cartas \mathcal{B} de S que satisfaga las condiciones (i) y (ii) anteriores, recibe el nombre de *base*, o *representación de S mediante cartas locales*. De esta suerte, si es posible hallar una base de clase C^m para un conjunto de puntos S en E^3 , entonces S , junto con el conjunto de todas las cartas de clase C^m de S , es una superficie simple de clase C^m .

Obsérvese que no es extraño referirse al propio conjunto de puntos S como a la superficie misma. Sin embargo, estrictamente hablando, la superficie está formada por S y por todas las cartas de la clase dada en S .

Como quiera que una función de clase C^m es también de clase C^j para $j \leq m$, entonces, una base de clase C^m será a su vez de clase C^j , $j \leq m$. De esta suerte, una superficie de clase C^m se puede extender siempre a una superficie simple de clase C^j , $j \leq m$, agregando todas las cartas locales de clase C^j .

Ejemplo 8.3.

- La semi-esfera superior (excluyendo el ecuador) de la esfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ es una superficie simple de clase C^∞ , pues podemos tomar como base la carta de Monge de clase C^∞ , definida por

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\mathbf{e}_3, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1$$

que cubre la semi-esfera y que es la intersección de ésta con el propio conjunto abierto E^3 .

- Una superficie simple no tiene contorno. Por ejemplo, la semi-esfera superior de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, incluyendo el ecuador, no es una superficie simple. En efecto, supongamos lo contrario, y sea $P(x_1, x_2, 0)$ un punto del ecuador y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta en la semi-esfera que contiene a P . Como es una representación regular que contiene a P , se deduce del teorema previo que existe una carta de Monge, que contiene a P , de la forma *debe existir*

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\mathbf{e}_3$$

y que esté definida sobre un conjunto abierto W del plano x_1x_2 , en donde es $x_1^2 + x_2^2 < 1$ para (x_1, x_2) , perteneciente a W , como se muestra en la figura 8-9. Pero, cada entorno del punto $(x_1, x_2, 0)$ en W contiene puntos que no están en W , lo que es imposible, pues W es abierto. *estaría en*

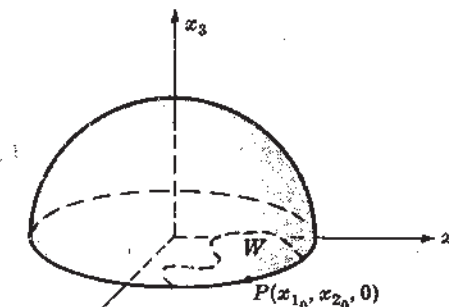


Fig. 8-9

- En cambio, la esfera completa es una superficie simple de clase C^∞ . Como base, podemos tomar las seis siguientes cartas de Monge

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\mathbf{e}_3, & \mathbf{x} &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 - \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x} &= \pm \sqrt{1-x_2^2-x_3^2}\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, & \mathbf{x} &= \pm \sqrt{1-x_1^2-x_3^2}\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

Es evidente que estas semi-esferas cubren la esfera y cada una de ellas es la intersección de la esfera con un apropiado semi-espacio abierto de E^3 . Por ejemplo, la carta $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\mathbf{e}_3$ es la intersección de la esfera con el semi-espacio $x_3 > 0$.

- Una superficie simple no puede cortarse a sí misma. Por ejemplo, consideremos el cilindro que se muestra en la figura 8-10 y supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ sea una carta que contenga un punto P de la intersección. Como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una aplicación inyectiva y bicontinua de un conjunto abierto del plano, es posible que pertenezca sólo a una porción de la intersección. Por otro lado, todo conjunto abierto de E^3 que contenga a P debe incluir puntos de ambas partes de la intersección. De esta suerte, una carta que contenga a P no puede ser intersección de un conjunto abierto de E^3 con el cilindro.

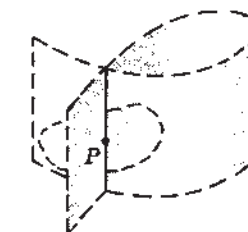


Fig. 8-10

Sean P un punto de una superficie simple S de clase C^m y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta local arbitraria de clase C^m de S , definida en un conjunto abierto U y que contenga a P , como se muestra en la figura 8-11. Obsérvese que la carta no es un conjunto conexo en E^3 si U no es conexo. Sin embargo, sean, (u, v) el punto de U que se aplica en P , y $S(u, v)$ un entorno esférico de (u, v) , contenido en U . $S(u, v)$ existe porque U es abierto. Pero, entonces la restricción de \mathbf{x} a $S(u, v)$ es una carta en S de clase C^m que es conexa y contiene a P . Lo anterior nos lleva al

Teorema 8.2. Por cada punto P de una superficie simple S de clase C^m existe una carta conexa de clase C^m de S que contiene a P .

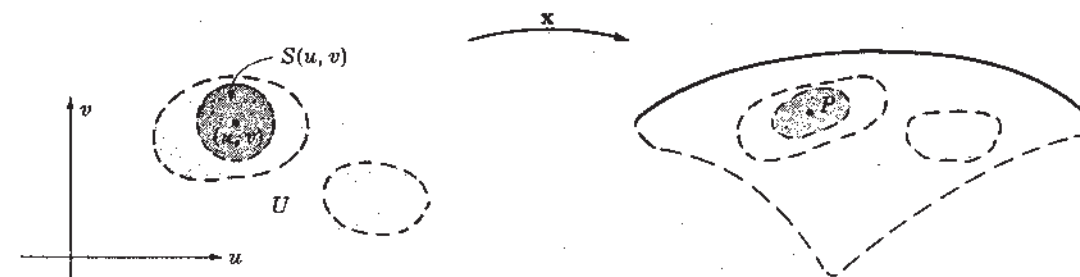


Fig. 8-11

Supongamos, ahora, que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ sean dos cartas de una superficie simple S de clase C^m y que tengan intersección no vacía G . Sean, W el conjunto del plano uv que \mathbf{x} aplica sobreyectivamente en G , y W^* el conjunto del plano $\theta\phi$ que \mathbf{x}^* aplica sobreyectivamente en G , como se muestra en la figura 8-12. Como ambas, \mathbf{x} y \mathbf{x}^* , son inyectivas, existirá una transformación paramétrica inyectiva, $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ tal que, para todo (u, v) en W tengamos $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}^*(\theta(u, v), \phi(u, v))$. En el problema 8.16, demostraremos que W es abierto, $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ es de clase C^m y para todo (u, v) el jacobiano $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) \neq 0$.

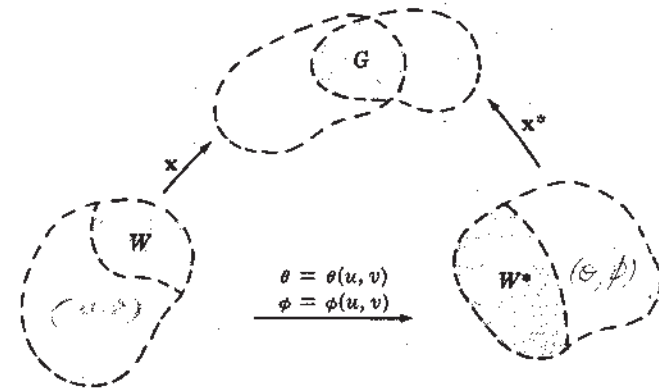


Fig. 8-12

Una aplicación $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ de clase C^m ($m \geq 1$) de un conjunto abierto W , perteneciente al plano uv , sobre el plano $\theta\phi$, inyectiva y tal que para todo (u, v) de W el jacobiano $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) \neq 0$, se denomina *transformación admisible de parámetro*. Obsérvese que del teorema de la aplicación inversa se deduce directamente que si $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ es una transformación admisible de parámetro de clase C^m que tenga imagen W^* , entonces W^* es abierto, la aplicación inversa $u = u(\theta, \phi)$, $v = v(\theta, \phi)$ es de clase C^m en W^* , y para todo (θ, ϕ) de W^* el jacobiano $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} = \left[\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)} \right]^{-1} \neq 0$. O sea, la inversa de una transformación coordinada admisible es otra transformación coordinada admisible. Un resultado de lo anterior es el

Teorema 8.3. En la intersección de dos cartas locales de una superficie simple de clase C^m , los parámetros se relacionan mediante transformaciones coordinadas admisibles de clase C^m .

Ejemplo 8.4.

Las ecuaciones

$$\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + \sqrt{1-u^2-v^2}\mathbf{e}_3, \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

y

$\mathbf{x} = (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2 + (\cos \phi)\mathbf{e}_3$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < \pi$ definen cartas locales de clase C^∞ en la esfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Su intersección es la mitad de la semi-esfera superior, como se muestra en la figura 8-13. A todo lo largo de ella tenemos la transformación de parámetro $u = \cos \theta \sin \phi$ y $v = \sin \theta \sin \phi$, donde $0 < \theta < \pi$ y $0 < \phi < \pi/2$. Esta aplicación es inyectiva, de clase C^∞ , y, como $0 < \phi < \pi/2$, entonces

$$\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) = \sin \phi \cos \phi \neq 0$$

La transformación inversa es

$$\phi = \cos^{-1} \sqrt{1-u^2-v^2}, \quad \theta = \cos^{-1} u/\sqrt{1-u^2-v^2}$$

en donde, $u^2 + v^2 < 1$ y $v > 0$.

Una propiedad que se defina en función de una base dada de una superficie puede ser o no ser independiente de la base particular que se escoja. Si lo es, decimos que la propiedad en cuestión es una propiedad de la superficie. En particular, una propiedad local es una propiedad de la superficie si y sólo si es independiente de cualquier transformación admisible de parámetros.

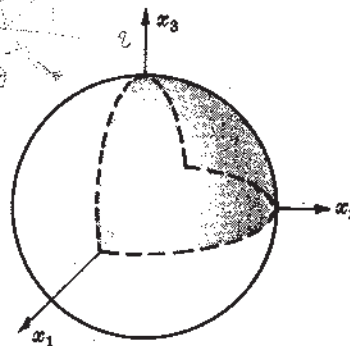


Fig. 8-13

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta de una superficie simple de clase C^m y sea $u = u(t)$, $v = v(t)$ una curva regular C de clase C^m en el plano de los parámetros. Consideremos, ahora, la imagen $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ de C sobre la superficie. Es evidente que $\mathbf{y}(t)$ es una función de clase C^m pues es una función compuesta de funciones de clase C^m . Además, para todo valor de t , el vector tangente $d\mathbf{y}/dt \neq 0$. En efecto, supongamos lo contrario. Puesto que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$, para todo (u, v) , se colige que \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son linealmente independientes. De esta suerte, si $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} = 0$ en algún t , entonces $du/dt = 0$ y $dv/dt = 0$ en t . Pero, esto es imposible porque C es regular. Así, pues, toda curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ de clase C^m en el plano de los parámetros, se aplica sobreyectivamente en una curva regular $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ de clase C^m de la superficie.

Supongamos ahora que iniciamos con una curva regular $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$ de clase C^m de la superficie. Es posible que no se halle una carta local única que contenga la curva completa. Sin embargo, consideremos cualquier parte conexa de la curva que esté contenida en una carta local $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Como $\mathbf{x}(u, v)$ es inyectiva, existe una única curva C , $u = u(t)$, $v = v(t)$ en el plano de los parámetros, tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$. Es posible demostrar que C también es regular y de clase C^m . De esta suerte, toda curva regular $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$ de clase C^m de la superficie es la imagen de una única curva regular $\tilde{u} = u(t)$, $\tilde{v} = v(t)$ de clase C^m en el plano de los parámetros de una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$.

Ahora, bien, un vector \mathbf{T} , no nulo, es *tangente* a una superficie S en un punto P si existe una curva regular $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$ de S que pase por P y sea tal que $\mathbf{T} = d\mathbf{y}/dt$. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta que contiene a P , y $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, entonces $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt}$. De modo que todas las tangentes a la superficie en P son linealmente dependientes sobre los dos vectores, \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v , linealmente independientes en P , como se ve en la figura 8-14.

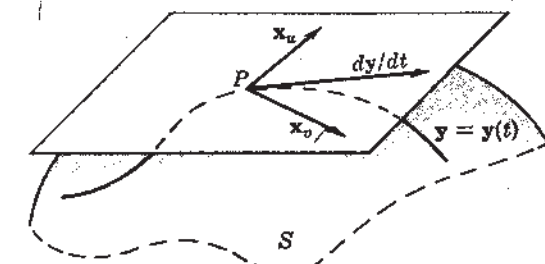


Fig. 8-14

Recordemos que \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son tangentes a las curvas de parámetro u y de parámetro v , respectivamente. Además, cada vector, no nulo, linealmente dependiente sobre \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v , es el vector tangente $d\mathbf{y}/dt$ de alguna curva que pasa por P . La demostración de este hecho se deja al lector como ejercicio.

El plano que pasa por P , paralelo a \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v , se denomina *plano tangente* a S en P . De lo anterior, se deduce que éste es independiente de la carta que contiene a P y que un vector, no nulo, \mathbf{T} , es tangente a S en P si y sólo si es paralelo por P al plano tangente. Es evidente que el plano tangente en un punto \mathbf{x} de una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ viene dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + h\mathbf{x}_u + k\mathbf{x}_v, \quad -\infty < h, k < \infty. \quad (8.1)$$

Ahora, bien, en cada punto P de la superficie hay dos vectores unitarios, de sentidos opuestos, perpendiculares al plano tangente en P . Veremos que no siempre es posible escoger, en cada punto, uno de ellos de modo que varíe continuamente en toda la extensión de la superficie. Sin embargo, en cualquier carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ adoptaremos el convenio de escoger el que forme con \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v en P un sistema dextrógiro. En otras palabras, escogeremos el vector $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$. Es evidente que \mathbf{N} tiene la unidad de longitud y es perpendicular al plano tangente en P , pues es perpendicular a \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v , y varía continuamente en toda la extensión

de la carta, pues \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son por lo menos de clase C^0 y $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$. El vector \mathbf{N} recibe el nombre de *vector unitario normal* a la superficie en P .

Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ es cualquier otra carta que contiene a P , entonces, en la intersección, será

$$\mathbf{x}_\theta^* \times \mathbf{x}_\phi^* = (\mathbf{x}_u \mathbf{u}_\theta + \mathbf{x}_v \mathbf{v}_\theta) \times (\mathbf{x}_u \mathbf{u}_\phi + \mathbf{x}_v \mathbf{v}_\phi) = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(\mathbf{u}_\theta \mathbf{v}_\phi - \mathbf{u}_\phi \mathbf{v}_\theta) = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)}$$

$$\text{de modo que: } \mathbf{N}^* = \frac{\mathbf{x}_\theta^* \times \mathbf{x}_\phi^*}{|\mathbf{x}_\theta^* \times \mathbf{x}_\phi^*|} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \bigg/ \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \right| = \mathbf{N} \operatorname{sig} \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \right)$$

Así, pues, \mathbf{N}^* tendrá en P el mismo sentido que \mathbf{N} si y sólo si $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) > 0$ en P .

En cualquier caso, la recta perpendicular en P al plano tangente en ese punto es independiente de la carta local y se denomina *recta normal* a la superficie en P . De esto se colige que la recta normal en \mathbf{x} viene dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + k\mathbf{N}, \quad -\infty < k < \infty \quad (8.2)$$

Ejemplo 8.5.

Cuando una circunferencia gira alrededor de una recta fija de su plano, se engendra un toro. Supongamos que la circunferencia se halla inicialmente en el plano x_1x_3 , que tiene su centro en el eje x_1 a una distancia b del origen y su radio es a ($a < b$). Consideremos, luego la circunferencia después de que haya girado un ángulo θ alrededor del eje x_3 , tal como se muestra en la figura 8-15. Si \mathbf{u} es el vector que va del origen al centro de la circunferencia, y es \mathbf{r} el radio vector de la circunferencia, entonces, $\mathbf{u} = (b \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (b \sin \theta)\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{r} = (a \sin \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (a \sin \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 + (a \cos \phi)\mathbf{e}_3$, donde ϕ es el ángulo que forma \mathbf{r} con el eje x_3 . De esto se deduce que

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{r} = (b + a \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\sin \theta)\mathbf{e}_2 + (a \cos \phi)\mathbf{e}_3$$

en donde $-\infty < \theta < \infty$ y $-\infty < \phi < \infty$. Es evidente que \mathbf{x} es de clase C^∞ ; además,

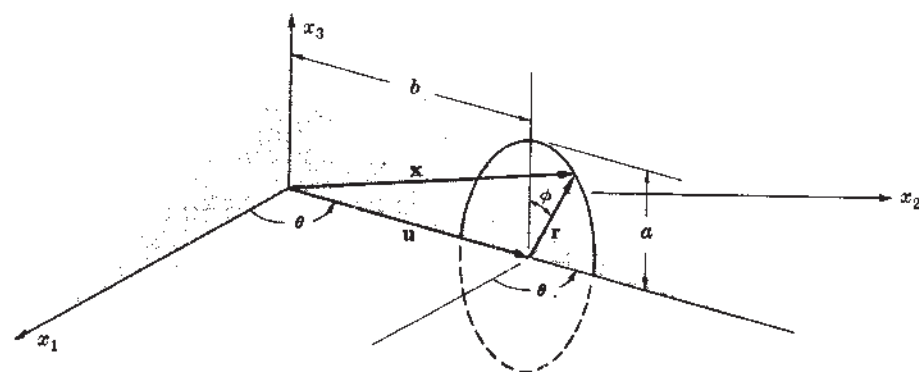


Fig. 8-15

$$\mathbf{x}_\theta = -(b + a \sin \phi)(\sin \theta)\mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_\phi = (a \cos \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (a \cos \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 - (a \sin \phi)\mathbf{e}_3$$

y

$$|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi| = |a(b + a \sin \phi)((-\sin \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 - (\sin \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 - (\cos \phi)\mathbf{e}_3)| = a(b + a \sin \phi) \neq 0$$

para todo (θ, ϕ) . Así, pues, \mathbf{x} es una representación paramétrica regular del toro de clase C^∞ . El toro es una superficie simple. Como base, podemos tomar un número suficiente de partes traslapadas de la representación precedente que sean inyectivas y cubran el toro. Por ejemplo, se puede constatar fácilmente que una base se obtiene restringiendo \mathbf{x} a los tres conjuntos abiertos siguientes del plano $\theta\phi$: (a) $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < 2\pi$, (b) $-\pi < \theta < \pi$, $-\pi < \phi < \pi$ y (c) $-(1/2)\pi < \theta < (3/2)\pi$, $-(1/2)\pi < \phi < (3/2)\pi$. Toda curva regular en el plano de los parámetros (θ, ϕ) aplicará sobreyectivamente una curva regular sobre el toro. Por ejemplo, las rectas coordenadas $\theta = \text{constante}$ se aplican en las curvas de parámetro ϕ de la superficie, que son las copias de la circunferencia que engendra el toro. Las rectas coordenadas $\phi = \text{constante}$ se aplican en las curvas de parámetro θ de la superficie, que son las circunferencias del toro descritas por un punto fijo, perteneciente a la circunferencia generatriz, al girar alrededor del eje x_3 . Obsérvese que $\mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0$. En consecuencia, las curvas de parámetro, pertenecientes a la superficie, se cortan ortogonalmente. También tiene interés

el conocimiento de la imagen que, sobre el toro, corresponde a la recta $\theta = t$, $\phi = kt$, ($k = \text{entero positivo}$) del plano de los parámetros. Esta es la curva

$$\mathbf{x} = (b + a \sin kt)(\cos t)\mathbf{e}_1 + (b + a \sin kt)(\sin t)\mathbf{e}_2 + (\cos kt)\mathbf{e}_3$$

Se trata de una hélice descrita sobre el toro y que se enrolla alrededor de éste exactamente k veces, como se muestra en la figura 8-16. El siguiente es un vector unitario normal al toro

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi|} = -(\sin \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 - (\sin \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 - (\cos \phi)\mathbf{e}_3$$

En este caso, \mathbf{N} varía continuamente en toda la extensión de la superficie. Ese vector está dirigido hacia el interior del toro, en sentido opuesto al del radio vector de la circunferencia generatriz, que es

$$\mathbf{r} = (a \sin \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (a \sin \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 + (a \cos \phi)\mathbf{e}_3$$

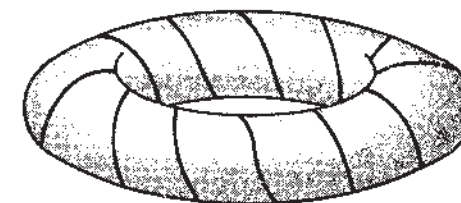


Fig. 8-16

PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LAS SUPERFICIES SIMPLES

Se dice que una superficie simple es *conexa* si es conexa considerada como un conjunto de puntos de E^3 . De esta suerte, S es conexa si no existen conjuntos abiertos O_1 y O_2 de E^3 que cubran a S y tengan con S intersecciones no vacías y disjuntas. En el problema 8.23 de la página 179 demostraremos el siguiente

Teorema 8.4. Si S es una superficie simple y conexa y si P y Q son puntos arbitrarios de S , entonces existirá un arco regular que une a P y Q . De esta suerte, una superficie conexa es arcoconexa por medio de arcos regulares.

Además, en el problema 8.22 demostraremos el siguiente teorema, interesante e importante en sumo grado

Teorema 8.5. Sean S y T superficies simples tales que S sea cerrada, T conexa y S esté contenida en T . Entonces, consideradas como conjuntos de puntos de E^3 , S es igual a T .

De esta suerte, una superficie simple cerrada es completa, en el sentido de que no puede ser un subconjunto propio de una superficie simple conexa.

Se dice que una superficie simple es *compacta* si es un conjunto compacto de puntos de E^3 . Así, pues, S es compacta si cada recubrimiento abierto de S tiene un subrecubrimiento finito; o, lo que es igual, S es compacta si es cerrada y acotada. De modo que una superficie compacta no tiene bordes a la vista. Debe ser finita en cuanto a tamaño y cerrada en sí misma, sin orificios ni cortes, como la superficie de la esfera o la del toro.

Si bien la orientabilidad es una propiedad topológica de una superficie simple y es posible definirla utilizando las nociones de continuidad, etc., aquí la definiremos con base en la estructura diferencial (cartas locales) de la superficie. A saber: Se dice que una superficie simple es *orientable* si existe una base de S tal que si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ son dos cartas ram-pantes de la base, entonces en la intersección será siempre $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) > 0$. Recordemos que las normales \mathbf{N} y \mathbf{N}^* en un punto son iguales si y sólo si $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) > 0$. De modo que S será orientable si y sólo si es posible definir sobre la superficie una normal unitaria que varíe continuamente en toda la extensión de la superficie.

Hablando en términos intuitivos, diremos que superficie *orientada* es la superficie orientable en la que se ha individualizado uno de los dos sentidos sobre la normal, de modo que varíe continuamente en toda la extensión de la superficie. Para ser más precisos, supongamos que sean: S un conjunto de puntos de E^3 y \mathcal{F} una colección de cartas locales de S de clase C^m que cumplan las siguientes condiciones

- (i) Existe en \mathcal{F} un conjunto de cartas locales que constituye una base de S .
- (ii) Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ son dos cartas rampantes cualesquiera de \mathcal{F} , entonces, en la intersección, será $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) > 0$.
- (iii) \mathcal{F} es maximal. Es decir, si a \mathcal{F} , se agrega una carta local de S , que no pertenezca a \mathcal{F} , entonces no se cumple la propiedad (ii).

El conjunto de puntos S conjuntamente con la colección \mathcal{F} constituyen una *superficie simple orientada* de clase C^m .

Obsérvese que si una superficie simple es orientable, entonces es posible orientarla agregando a una base que satisfaga la condición (ii) todas las cartas que mantengan la propiedad (ii). Por otra parte, una superficie S orientable *conexa* se puede orientar en una de dos (y únicamente dos) maneras; es decir, que las cartas locales de S pertenecen a uno de los dos conjuntos \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 , cada uno de los cuales cumple las condiciones (i), (ii) y (iii) precedentes. La demostración de este resultado se deja como ejercicio al lector.

Por último, hacemos la siguiente definición: Superficie *elemental* es una superficie simple para la cual existe una base formada por una carta local única. De esta definición se infiere que una superficie elemental es homeomórfica con un conjunto abierto en el plano y es, además, orientable.

Ejemplo 8.6.

La esfera y el toro son ejemplos de superficies simples, orientables, conexas y compactas. El paraboloide elíptico y el plano son ejemplos de superficies elementales conexas. La cinta de Moebius, que se muestra en la figura 8-17, no es orientable. La figura indica que un vector normal al desplazarse alrededor de la superficie, conservando su posición, puede retornar al punto de partida con sentido opuesto al inicial.

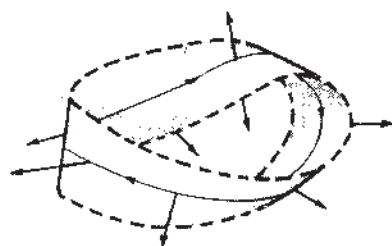


Fig. 8-17

Observación. A no ser que se diga lo contrario, supondremos que nuestras superficies son conexas. De este modo, cuando hablemos de "superficie de clase C^m " debe entenderse que nos referimos a una "superficie de clase C^m simple y conexa".

Problemas resueltos

REPRESENTACIONES PARAMÉTRICAS REGULARES

8.1. Demostrar que $\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + f(u, v)\mathbf{e}_3$ es una representación paramétrica regular de clase C^m si $f(u, v)$ es de clase C^m .

\mathbf{x} es de clase C^m , pues f es de clase C^m . Además,

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + f_u \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 + f_v \mathbf{e}_3$$

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = |-\mathbf{e}_1 f_v - \mathbf{e}_2 f_u + \mathbf{e}_3| = [f_u^2 + f_v^2 + 1]^{1/2} \neq 0$$

que era el resultado que se esperaba.

8.2. Demostrar que

$\mathbf{x} = (a \sin \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 + b(\sin \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 + c(\cos \phi)\mathbf{e}_3$, $a, b, c > 0$, $-\infty < \theta < \infty$, $0 < \phi < \pi$, es una representación paramétrica regular de clase C^∞ del elipsoide $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ agujereado en $(0, 0, c)$ y en $(0, 0, -c)$, como se muestra en la figura 8-18. Describir las curvas de parámetros θ y ϕ .

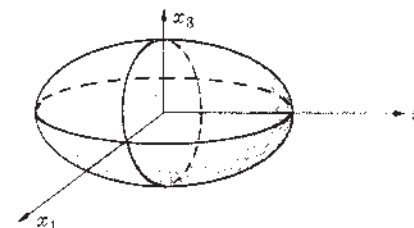


Fig. 8-18

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi = 1$$

$$\text{Además, } \mathbf{x}_\theta = (-a \sin \phi \sin \theta)\mathbf{e}_1 + (b \sin \phi \cos \theta)\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_\phi = (a \cos \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (b \cos \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 - (c \sin \phi)\mathbf{e}_3$$

$$\text{y } |\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi| = |(-bc \sin^2 \phi \cos \theta)\mathbf{e}_1 - (ac \sin^2 \phi \sin \theta)\mathbf{e}_2 - (ab \sin \phi \cos \phi)\mathbf{e}_3|$$

$$= |\sin \phi| [(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)c^2 \sin^2 \phi + a^2 b^2 \cos^2 \phi]^{1/2}$$

Podemos suponer que $0 < a \leq b \leq c$. Entonces,

$$|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi| \geq |\sin \phi| [(a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)a^2 \sin^2 \phi + a^4 \cos^2 \phi]^{1/2} \geq |\sin \phi| a^2 \neq 0$$

para $0 < \phi < \pi$. Además, \mathbf{x} es de clase C^∞ . De modo que \mathbf{x} es una representación paramétrica de clase C^∞ . Las curvas de parámetro θ ($\phi = \text{constante}$), son las intersecciones del elipsoide con la familia de planos horizontales $x_3 = c \cos \phi$, $0 < \phi < \pi$. Estas son las elipses $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 - \cos^2 \phi$.

Las curvas de parámetro ϕ ($\theta = \text{constante}$) son las intersecciones del elipsoide con la familia de semi-planos $x_1 = aR \cos \theta$, $x_2 = bR \sin \theta$, $R > 0$. Tales curvas son semi-elipses. En efecto, supongamos que la intersección de uno de tales semi-planos con el plano $x_1 x_2$ se expresa mediante la distancia t desde el origen, tomada como parámetro. Entonces,

$$x_1 = \frac{a(\cos \theta)t}{d}, \quad x_2 = \frac{b(\sin \theta)t}{d}, \quad \text{siendo } d^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta$$

En consecuencia, la intersección es la semi-elipse $\frac{t^2}{d^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$, $t > 0$.

8.3. Se denomina *superficie de revolución* S a la que se obtiene al hacer girar una curva plana C alrededor de una recta L de su plano, C se denomina la curva *generatriz* o curva *perfil* y L el eje de S . Las diferentes posiciones de C se llaman *meridianos* de S y las circunferencias engendradas por cada punto de C reciben el nombre de *paralelos* de S .

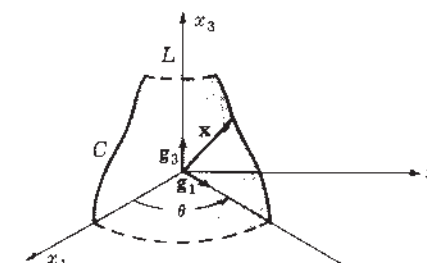


Fig. 8-19

Si $x_1 = f(t)$, $x_3 = g(t)$, $a < t < b$, es una curva regular de clase C^m en plano $x_1 x_3$ y $f' > 0$, demostrar que $\mathbf{x} = (f(t) \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (f(t) \sin \theta)\mathbf{e}_2 + g(t)\mathbf{e}_3$, $-\infty < \theta < \infty$, es una representación paramétrica regular de clase C^m de la superficie que se obtiene al hacer girar a C alrededor del eje x_3 . Demostrar, además, que las curvas de parámetro t (los meridianos) y las de parámetro θ (los paralelos) se cortan ortogonalmente.

Sean $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ una base que se obtiene al hacer girar la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un ángulo θ alrededor del eje x_3 , como se puede apreciar en la figura 8-19. El vector de posición de un punto de la generatriz (perfil) $x_1 = f(t)$, $x_3 = g(t)$, cuando ésta se halla en el plano que contiene a \mathbf{g}_1 y \mathbf{g}_3 , es el $\mathbf{x} = f(t)\mathbf{g}_1 + g(t)\mathbf{g}_3$. Pero, $\mathbf{g}_1 = (\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3$. De modo que $\mathbf{x} = (f(t) \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (f(t) \sin \theta)\mathbf{e}_2 + g(t)\mathbf{e}_3$. El \mathbf{x} es de clase C^m , pues f y g son esa clase. Además,

$$\mathbf{x}_t = (f' \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (f' \sin \theta) \mathbf{e}_2 + g' \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_\theta = (-f \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (f \cos \theta) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_\theta = |(-g'f \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (g'f \sin \theta) \mathbf{e}_2 + f'f \mathbf{e}_3| = f \sqrt{(g')^2 + (f')^2} \neq 0$$

pues $f > 0$ y $x_1 = f(t)$, $x_3 = g(t)$ es regular. De esta suerte, \mathbf{x} es regular y de clase C^m . Además, $\mathbf{x}_t \cdot \mathbf{x}_\theta = 0$ y, por ello, las curvas de parámetro t y las de parámetro θ se cortan ortogonalmente.

- 8.4. Se da el nombre de *superficie reglada* a una superficie engendrada por una familia de rectas de un parámetro. El conjunto de las distintas posiciones de las rectas generatrices se denomina *rayado* de la superficie. Sean, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u)$ una curva regular de clase C^m y $\mathbf{g}(u)$ un vector, no nulo, de clase C^m a todo lo largo de $\mathbf{y} = \mathbf{y}(u)$. Demostrar que $\mathbf{x} = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{g}(u)$ es una representación paramétrica regular de una superficie reglada de clase C^m , en el supuesto de que \mathbf{y} y \mathbf{g} sean de clase C^m y $(\mathbf{y}' + v\mathbf{g}') \times \mathbf{g} \neq 0$ para todo (u, v) . La parametrización de una superficie en la forma anterior, se denomina parametrización en *forma reglada*. La curva $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ se llama *curva de base* o *directriz* de la parametrización. Obsérvese que el cilindro (ejemplo 8.1(c) de la página 161) es una superficie reglada de generatrices paralelas, es decir, con $\mathbf{g} = \text{constante}$.

En la figura 8-20 se puede ver que un punto general de la superficie se representa por $\mathbf{x} = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{g}(u)$, siendo v un parámetro a todo lo largo del rayado de la superficie. Además, \mathbf{x} es de clase C^m , pues \mathbf{y} y \mathbf{g} lo son; y, como quiera que

$$\mathbf{x}_u = \frac{d\mathbf{y}}{du} + v \frac{d\mathbf{g}}{du}, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{g}$$

\mathbf{x} será regular si y sólo si, para todo (u, v) , se cumple que

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \left(\frac{d\mathbf{y}}{du} + v \frac{d\mathbf{g}}{du} \right) \times \mathbf{g} \neq 0$$

que es el resultado buscado. Obsérvese que, en la representación anterior, las curvas de parámetro v , a lo largo de las cuales $u = \text{constante}$, constituyen su propio rayado.

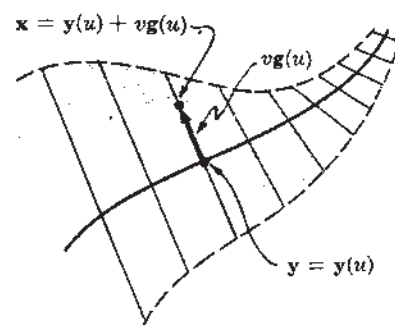


Fig. 8-20

- 8.5. Demostrar que el paraboloide hiperbólico $x_3 = x_1^2 - x_2^2$ es una superficie doblemente reglada; es decir, se puede considerar engendrada por dos diferentes familias de rectas. Hallar las representaciones paramétricas de la superficie en forma reglada y representar ambos rayados.

Obsérvese que $x_3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. De este modo, la intersección del plano $x_1 - x_2 = u_0$ con la superficie, es la recta determinada por los planos $x_1 - x_2 = u_0$ y $x_3 = u_0(x_1 + x_2)$. Esto nos lleva a tomar $x_1 - x_2 = u$, $x_1 + x_2 = v$, de tal suerte que $x_1 = \frac{1}{2}(u + v)$, $x_2 = \frac{1}{2}(u - v)$, y $x_3 = uv$. Lo anterior nos proporciona la siguiente representación

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(u+v)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}(u-v)\mathbf{e}_2 + uv\mathbf{e}_3$$

en la cual, las curvas $v = \text{constante}$ de parámetro u , y las curvas $u = \text{constante}$ de parámetro v , son líneas rectas. Así, pues, el hiperboloide es una superficie doblemente reglada. Escribiendo \mathbf{x} como sigue

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \right) + v \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right) = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{g}(u)$$

tenemos una representación en forma reglada en la que $\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$, o sea, la curva $v = 0$ de parámetro u , es la curva de base y $\mathbf{g} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right)$ está en la dirección de la curva de parámetro v en u . De modo análogo,

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \right) + u \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right)$$

es una representación en forma reglada en la cual $\mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2$, o sea, la curva $u = 0$ de parámetro v , es la curva de base y $\mathbf{g} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \right)$ está en la dirección de la curva de parámetro u , en v .

De querer decir: la curva (recta) de parámetro u que sea la curva de base y \mathbf{g} sea el vector $\mathbf{g}(u)$ es el de dirección de esa recta \mathbf{r}_u . pero cuando u toma el valor $u=0$, el vector $\mathbf{g}(u)$ es el de dirección de la curva recta \mathbf{r}_v para $u=0$.

- 8.6. Se denomina *conoide recta* a una superficie reglada de rayado paralelo a un plano P que pase por una recta L , perpendicular al plano. La recta L se llama eje de la conoide. Demostrar que si se escoge L como eje x_3 , tal cual se ve en la figura 8-21, la conoide tiene una representación por parámetros de la forma

$$\mathbf{x} = (v \cos \theta(u)) \mathbf{e}_1 + (v \sin \theta(u)) \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$$

en donde la función θ es el ángulo que la generatriz forma con el plano x_1x_2 . Demostrar que la representación es regular y de clase C^m , supuesto que $\theta(u)$ es de clase C^m .

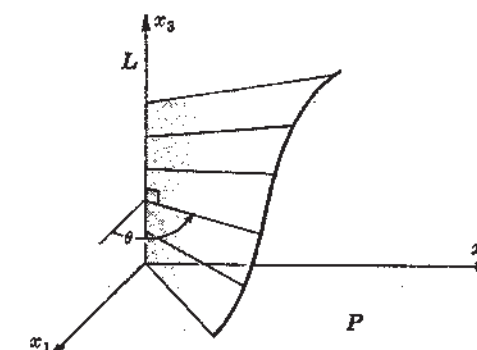


Fig. 8-21

Como curva de base de la superficie tomamos el eje x_3 , es decir, $\mathbf{y} = u\mathbf{e}_3$. Como quiera que las generatrices son paralelas al plano x_1x_2 es posible expresar un vector unidad en función de u y en la dirección del rayado, bajo la forma

$$\mathbf{g} = (\cos \theta(u)) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta(u)) \mathbf{e}_2$$

Y, en consecuencia, $\mathbf{x} = \mathbf{y} + v\mathbf{g} = (v \cos \theta(u)) \mathbf{e}_1 + (v \sin \theta(u)) \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$

es la representación de la superficie en forma reglada. En este caso, es

$$\mathbf{x}_u = (-v\theta' \sin \theta(u)) \mathbf{e}_1 + (v\theta' \cos \theta(u)) \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_v = (\cos \theta(u)) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta(u)) \mathbf{e}_2$$

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = |(-\sin \theta(u)) \mathbf{e}_1 + (\cos \theta(u)) \mathbf{e}_2 - v\theta' \mathbf{e}_3| = [v^2\theta'^2 + 1]^{1/2} \neq 0$$

para todo (v, θ) . En esta forma, \mathbf{x} es una representación regular de clase C^m con la única condición de que $\theta(u)$ sea de clase C^m . Obsérvese que si es $\theta' \neq 0$, la función $\theta(u)$ tendrá inversa y la superficie, una representación de la forma

$$\mathbf{x} = (v \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (v \sin \theta) \mathbf{e}_2 + u(\theta) \mathbf{e}_3$$

$$u = u(\theta)$$

SUPERFICIES SIMPLES

- 8.7. Demostrar que $\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + f(u, v)\mathbf{e}_3$ es una carta local de clase C^m si $f(u, v)$ es de clase C^m .

Según el problema 8.1, \mathbf{x} es una representación paramétrica regular de clase C^m . Falta demostrar que \mathbf{x} es inyectiva y que su inversa es continua. Puesto que $x_1 = u$, $x_2 = v$, se colige que $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u', v')$ implica que $u = u'$ y $v = v'$. O sea que \mathbf{x} es inyectiva. La aplicación inversa es $u = x_1$, $v = x_2$ y es continua. De modo que \mathbf{x} es una carta local de clase C^m .

- 8.8. Demostrar que la aplicación $\mathbf{x} = u^2\mathbf{e}_1 + uv\mathbf{e}_2 + v^2\mathbf{e}_3$ es una carta local de clase C^∞ en el primer cuadrante $u > 0$, $v > 0$.

Es evidente que \mathbf{x} es de clase C^∞ y que

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = |2v^2\mathbf{e}_1 - 4uv\mathbf{e}_2 + 2u^2\mathbf{e}_3| = 2\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + u^4} \neq 0$$

para $u > 0$ y $v > 0$. Como $x_1 = u^2$, $x_2 = uv$, se infiere que $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u', v')$ implica $u^2 = u'^2$ y $uv = u'v'$. Puesto que $u > 0$ y $u' > 0$, entonces se deduce, primero, que $u = u'$ y, luego, que $v = v'$. De modo que la aplicación es inyectiva. La inversa es $u = \sqrt{x_1}$, $v = x_2/\sqrt{x_1}$. Por ser $u > 0$, tenemos que $x_1 > 0$ y la inversa está definida y es continua. En conclusión, la aplicación es una carta local de clase C^∞ .

- 8.9. Demostrar que el paraboloide hiperbólico $x_3 = x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2$ es una superficie simple de clase C^∞ .

La siguiente aplicación

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + (x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2)\mathbf{e}_3$$

es una carta de Monge (y, por tanto, una carta local propia) de clase C^∞ , que cubre la superficie, y es la intersección de la superficie con el conjunto abierto E^3 .

- 8.10. Con frecuencia, las superficies se suelen representar en forma implícita, vale decir, como el conjunto de puntos S de E^3 que satisfacen una ecuación de la forma $f(x_1, x_2, x_3) = c$, $c = \text{constante}$. Como consecuencia del teorema de la función implícita, cuya demostración puede hallarse en cualquier texto de cálculo superior, el conjunto S juntamente con todas las cartas locales de clase C^m en S , es una superficie simple supuesto que f sea de clase C^m , y por lo menos una de las derivadas parciales $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$ sea diferente de cero en todo punto de S . Utilizar estos criterios para determinar los valores de c para los cuales $x_1^2 - 2x_1 + x_2x_3 = c$ es una superficie simple.

$f_{x_1} = 2x_1 - 2$, $f_{x_2} = x_3$, $f_{x_3} = x_2$. Estas se anulan simultáneamente si y sólo si $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; pero, este es un punto que satisface a $x_1^2 - 2x_1 + x_2x_3 = c$ si y sólo si $c = -1$. De modo que $x_1^2 - 2x_1 + x_2x_3 = c$ es una superficie simple para todo $c \neq -1$, que es el resultado buscado.

- 8.11. Las llamadas superficies cuadráticas o simplemente cuádricas, se definen mediante ecuaciones de la forma

$$f = \sum_{i=1}^3 a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^3 b_i x_i + c = 0$$

Es posible demostrar, con base en la rotación y la traslación de ejes de coordenadas, que los casos no triviales se pueden llevar a uno de los seis siguientes, dibujados en la figura 8-22.

(1) Elipsoide: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$

(2) Hiperboloide (de una hoja): $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$

(3) Hiperboloide (de dos hojas): $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$

(4) Paraboloide elíptico: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$

(5) Paraboloide hiperbólico: $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3 = 0$

(6) Cono cuádrico: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$, $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$

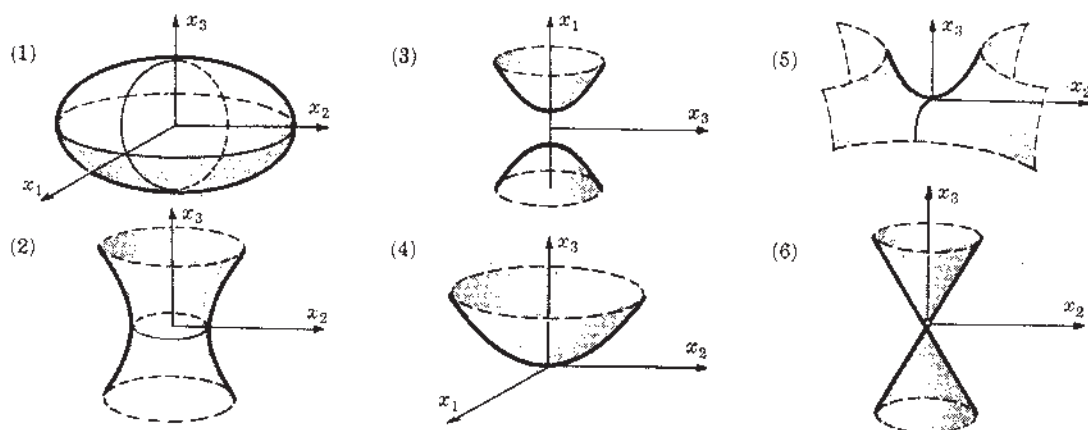


Fig. 8-22

Utilizando los criterios del problema 8.9, demostrar que cada una de las superficies precedentes es simple y de clase C^∞ .

En efecto, si $f = \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} \pm \frac{x_3^2}{c^2}$ tenemos $f_{x_1} = \frac{2x_1}{a^2}$, $f_{x_2} = \pm \frac{2x_2}{b^2}$, $f_{x_3} = \pm \frac{2x_3}{c^2}$ que se anulan conjuntamente si y sólo si $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Pero, el origen no es punto de las superficies (1), (2) y (3) anteriores y se ha excluido de la (6). En el caso de las dos restantes, $f = \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{x_2^2}{b^2} - x_3$, y, por tanto, $f_{x_3} = -1 \neq 0$. Por último, f es de clase C^∞ en todos los casos. En consecuencia, cada una de las superficies consideradas es simple y de clase C^∞ .

- 8.12. Demostrar que toda representación paramétrica regular es localmente inyectiva y bicontinua. Es decir, si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una representación paramétrica regular, definida en un conjunto abierto U , demostrar que a cada (u, v) de U corresponde un entorno $S(u, v)$ en el que \mathbf{x} es inyectiva y bicontinua.

Recordemos, de acuerdo con la demostración del teorema 8.1, que, como el rango de la matriz jacobiana de \mathbf{x} es dos, podemos suponer que en cada (u, v) hay una aplicación inyectiva $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(u, v)$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(u, v)$ de clase $m \geq 1$ que posee inversa de la misma clase, definida en un conjunto abierto W que contiene a (u, v) , y una carta de Monge, expresada por $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + f(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$ y definida en la imagen de W , tal que, restringida a W , sea la función compuesta

$$\mathbf{x} = x_1(u, v)\mathbf{e}_1 + x_2(u, v)\mathbf{e}_2 + f(x_1(u, v), x_2(u, v))\mathbf{e}_3$$

O sea, que en W , \mathbf{x} sea una aplicación compuesta de dos aplicaciones inyectivas y bicontinuas y, por tanto, también inyectiva y bicontinua, con lo cual queda demostrada la proposición.

- 8.13. Es posible demostrar que si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta local de una superficie simple S y es P un punto de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, entonces existe un entorno esférico $S(P)$ de E^3 tal que su intersección con la superficie S esté contenida en la carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Utilícese este resultado para demostrar que toda carta de S es la intersección de S con un conjunto abierto de E^3 . De aquí se deduce que cualquier conjunto de cartas que cubra una superficie simple S es una base de S .

Sea G la imagen de una carta arbitraria $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de S . A cada P , perteneciente a G , le corresponde un $S(P)$ tal que $S(P) \cap S \subset G$. Sea, además, $O = \bigcup_P S(P)$. Obsérvese que O es abierto, pues es la unión de conjuntos abiertos. Supongamos, ahora, que Q es un punto perteneciente a G . Puesto que $Q \in S(Q)$, se concluye que $Q \in O = \bigcup_P S(P)$. Además, $Q \in S$. En consecuencia, $Q \in S \cap O$. De modo que $G \subset S \cap O$. Recíprocamente, supongamos que $Q \in S \cap O$. Como $S \cap O = S \cap \left(\bigcup_P S(P)\right) = \bigcup_P (S \cap S(P))$, se infiere que Q pertenecerá a alguna $S \cap S(P)$. Pero, $S \cap S(P) \subset G$. En consecuencia, $Q \in G$. De modo que $S \cap O \subset G$. De donde se colige que $G = S \cap O$, que es el resultado buscado. En otras palabras: toda carta de S es la intersección de S con un conjunto abierto de E^3 .

- 8.14. Sean $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ dos cartas locales de una superficie simple S , definidas sobre los conjuntos abiertos U y U^* , en su orden, y que tengan las imágenes rampantes G y G^* sobre S . Sean además, W y W^* los subconjuntos respectivos de U y U^* que se aplican sobre $G \cap G^*$. Demostrar que W y W^* son conjuntos abiertos en sus correspondientes planos de parámetros.

Sea (u_0, v_0) un punto perteneciente a W que tenga a P_0 como imagen en $G \cap G^*$. Sean, por otra parte, $S_\epsilon(P_0)$ y $S_\delta(P_0)$ entornos de P_0 tales que $S_\epsilon(P_0) \cap S \subset G$ y $S_\delta(P_0) \cap S \subset G^*$. Supongamos, ahora, que $\epsilon \leq \delta$. Entonces $S_\epsilon(P_0) \cap S \subset G \cap G^*$. Como $\mathbf{x}(u, v)$ es continua, existe un $S_{\delta_1}(u_0, v_0)$ tal que para todo (u, v) de $S_{\delta_1} \cap U$ tengamos $\mathbf{x}(u, v)$ en $S_\epsilon(P_0)$ y, por tanto, en $G \cap G^*$. Pero, U es abierto. De esta suerte, dado un δ_2 suficientemente pequeño, tendremos a $\mathbf{x}(u, v)$ en $G \cap G^*$ para todo (u, v) de $S_{\delta_2}(u_0, v_0)$. Es decir, (u, v) pertenece a W siempre que esté (u, v) en $S_{\delta_2}(u_0, v_0)$. Como (u_0, v_0) es un punto arbitrario de W se deduce que W es abierto. Una argumentación parecida permitirá demostrar que W^* es abierto.

8.15. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta de una superficie simple S de clase C^m , definida en un conjunto abierto U que tenga una imagen G , y sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(x_1, x_2) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$ una carta de Monge en S , definida en un conjunto abierto V^* y que posea una imagen G^* contenida en G , como se puede ver en la figura 8-23.

Demostrar que existe en U un conjunto abierto W y una aplicación inyectiva $\mathbf{x}_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$ de clase C^m de W sobre V^* , siendo $\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v) \neq 0$ para todo (u, v) de U^* , tal que en W $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ sea la siguiente función compuesta: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(x_1(u, v), x_2(u, v))$.

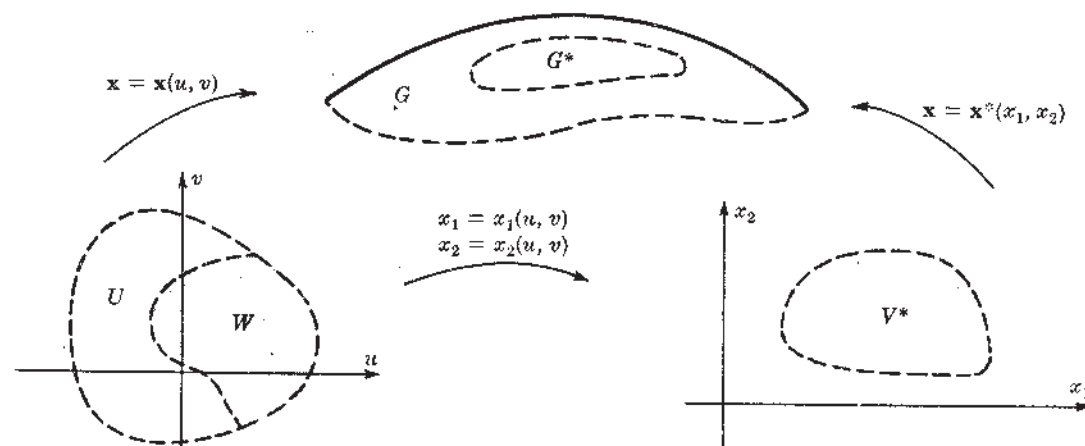


Fig. 8-23

De acuerdo con el problema precedente, existe en U un conjunto abierto W tal que \mathbf{x} aplique a U^* sobre $G \cap G^* = G^*$. Puesto que \mathbf{x} y \mathbf{x}^* son inyectivas, existe una aplicación de este tipo, la $\mathbf{x}_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$, de W sobre V^* tal que en W sea $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}^*(x_1(u, v), x_2(u, v))$. Falta por demostrar que $x_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$ son de clase C^m y $\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v) \neq 0$. Pero, $x_1 = x_1(u, v)$ y $x_2 = x_2(u, v)$ no son otra cosa que las dos primeras componentes de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Como $\mathbf{x}(u, v)$ es de clase C^m se deduce que $x_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$ es de clase C^m . Por último, como el rango de la matriz jacobiana de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(x_1, x_2)$, en cada punto, es dos, entonces la diferencial de ambas funciones en cada punto es una aplicación lineal inyectiva de los vectores de los planos respectivos sobre un plano de E^3 . Recordemos que la diferencial de una función compuesta es la función lineal que resulta de componer las aplicaciones individuales. De esta suerte, en cada punto, la diferencial de $x_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$ es una aplicación lineal inyectiva de los vectores del plano uv sobre los vectores del plano x_1x_2 . De este modo, el rango de la matriz jacobiana de $x_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$ es también dos, en cada punto, es decir, el $\det \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial u & \partial x_1/\partial v \\ \partial x_2/\partial u & \partial x_2/\partial v \end{pmatrix} \neq 0$, para todo (u, v) perteneciente a W , que era el resultado que se esperaba.

8.16. Demostrar el teorema 8.3, a saber: Demostrar que, en la intersección de dos cartas locales rampantes, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$, de una superficie simple S de clase C^m , los parámetros se relacionan entre sí mediante una transformación inyectiva $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ de clase C^m , definida en un conjunto abierto es tal que $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) \neq 0$ para cualquier (u, v) .

Según el problema 8.14, existen en los planos uv y $\theta\phi$, conjuntos abiertos W y W^* , en su orden, que se aplican sobre yectivamente en la intersección de las cartas, y una aplicación inyectiva $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ de W sobre W^* tal que $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}^*(\theta(u, v), \phi(u, v))$. Sólo falta demostrar que $\theta(u, v)$ y $\phi(u, v)$ son de clase C^m y $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) \neq 0$ para todo (u, v) perteneciente a W .

Sea (u_0, v_0) un punto de W que tenga la imagen P en S . Según el teorema 8.2, existirá en S una carta de Monge, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, x_2) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3(x_1, x_2)\mathbf{e}_3$ que contenga a P . Conforme al problema precedente, existirá una aplicación inyectiva $x_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$ de un conjunto abierto V , que contenga a (u_0, v_0) , sobre un conjunto abierto V^* del plano x_1x_2 , aplicación que será

de clase C^m en V y $\partial(x_1, x_2)/\partial(u, v) \neq 0$. Por otra parte, existirá una aplicación inyectiva $x_1 = x_1(\theta, \phi)$, $x_2 = x_2(\theta, \phi)$ de un conjunto abierto V^* del plano $\theta\phi$, que contenga a $(\theta(u_0, v_0), \phi(u_0, v_0))$, sobre V^* , aplicación que será de clase C^m en V^* y $\partial(x_1, x_2)/\partial(\theta, \phi) \neq 0$. De acuerdo con el teorema de la función inversa, la aplicación inversa $\theta = \theta(x_1, x_2)$, $\phi = \phi(x_1, x_2)$ es de clase C^m y $\partial(\theta, \phi)/\partial(x_1, x_2) \neq 0$. De este modo, $\theta = \theta(u, v) = \theta(x_1(u, v), x_2(u, v))$ y $\phi = \phi(u, v) = \phi(x_1(u, v), x_2(u, v))$ es de clase C^m en V y $\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(x_1, x_2)} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Como V contiene a (u_0, v_0) y este es un punto arbitrario de W , se colige que $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ es de clase C^m en W y $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) \neq 0$ en W .

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL

8.17. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie representada por

$$\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 - v^2)\mathbf{e}_3$$

en el punto correspondiente a $u = 1, v = 1$.

$$\mathbf{x}(1, 1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_u(1, 1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_v(1, 1) = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$$

De este modo, $\mathbf{y} = \mathbf{x}(1, 1) + h\mathbf{x}_u(1, 1) + k\mathbf{x}_v(1, 1) = (1+h)\mathbf{e}_1 + (1+k)\mathbf{e}_2 + 2(h-k)\mathbf{e}_3$

es el plano tangente en $\mathbf{x}(1, 1)$.

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u(1, 1) \times \mathbf{x}_v(1, 1)}{|\mathbf{x}_u(1, 1) \times \mathbf{x}_v(1, 1)|} = \frac{1}{3}(-2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Así, pues, $\mathbf{y} = \mathbf{x}(1, 1) + t\mathbf{N}(1, 1) = (1 - \frac{2}{3}t)\mathbf{e}_1 + (1 + \frac{2}{3}t)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{3}t\mathbf{e}_3$

o, también, haciendo $t = k/3$,

$$\mathbf{y} = (1 - 2t)\mathbf{e}_1 + (1 + 2t)\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3, \quad -\infty < t < \infty$$

es la ecuación de la normal en $\mathbf{x}(1, 1)$.

8.18. Demostrar que la imagen de la curva dada por $\theta = \log t$, $\phi = 2 \tan^{-1} t$, $t > 0$, sobre la esfera

$$\mathbf{x} = (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2 + (\cos \phi)\mathbf{e}_3$$

corta los meridianos, que son curvas de parámetro ϕ , bajo un ángulo constante igual a $\pi/4$. Obsérvese que cuando t varía de 0 a 1 a ∞ , el ángulo θ varía de $-\infty$ a 0 a ∞ , y el ángulo ϕ de 0 a $\pi/2$ a π . De este modo, la curva se enrolla en espiral alrededor de los polos norte y sur como se muestra en la figura 8-24.

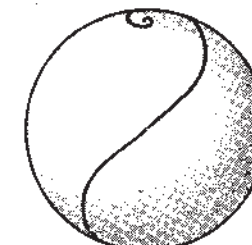


Fig. 8-24

$$\mathbf{x}_\theta = (-\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_\phi = (\cos \theta \cos \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \cos \phi)\mathbf{e}_2 - (\sin \phi)\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = \sin^2 \phi, \quad \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0, \quad \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

El coseno del ángulo α que forma la tangente a la curva sobre la superficie, esto es, $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{x}_\theta \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{x}_\phi \frac{d\phi}{dt}$, con la tangente \mathbf{x}_ϕ a la curva de parámetro ϕ , es

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(d\mathbf{y}/dt) \cdot \mathbf{x}_\phi}{|d\mathbf{y}/dt| |\mathbf{x}_\phi|} = \frac{d\phi}{dt} \left[\sin^2 \phi \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{2}{1+t^2} \left[\frac{\sin^2 \phi (2 \tan^{-1} t)^2}{t^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} \right]^{-1/2} \\ &= \frac{2}{1+t^2} \left[\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} \right]^{-1/2} = 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Y, de esta suerte, $\alpha = \pi/4 = \text{constante}$, que era el resultado que buscábamos.

8.19. Demostrar que el plano tangente es el mismo en todos los puntos de una generatriz de (a) un cilindro, (b) una rama de la superficie tangente de una curva.

(a) El cilindro, en forma reglada, se representa por

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(t) + v\mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = \text{constante} \neq 0, \quad \mathbf{y}' \times \mathbf{g} \neq 0$$

En este caso, $\mathbf{x}_t = \mathbf{y}'$, $\mathbf{x}_v = \mathbf{g}$, $\mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_v = \mathbf{y}' \times \mathbf{g}$, y $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{y}' \times \mathbf{g}}{|\mathbf{y}' \times \mathbf{g}|}$

Como \mathbf{N} es independiente del parámetro v a todo lo largo de una generatriz, de lo anterior se deduce el resultado que se requiere.

(b) La superficie tangente a una curva $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s)$ que no tenga puntos de inflexión, define por la siguiente representación

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}(s) + vt(s) = \mathbf{r}(s, v), \quad \mathbf{x}'_s = \mathbf{y}'(s) + v\mathbf{t}'(s) = \mathbf{t}(s) + v\mathbf{k}(s)\mathbf{n}(s)$$

Tal superficie no es regular para $v = 0$, es decir, a todo lo largo de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s)$, y hablamos de las dos ramas correspondientes a $v > 0$ y $v < 0$. Si $v > 0$, entonces,

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{t} + v\mathbf{i}, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{t}, \quad \mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_v = (\mathbf{t} + v\mathbf{i}) \times \mathbf{t} = v\mathbf{i} \times \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \text{si } v = 0$$

y $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_s \times \mathbf{x}_v|} = \frac{\mathbf{i} \times \mathbf{t}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{t}|}$ es independiente del parámetro v a todo lo largo de una generatriz.

Para el caso de $v < 0$, se hace un cálculo parecido.

$$\mathbf{N} = \frac{v\mathbf{i} \times \mathbf{t}}{|v\mathbf{i} \times \mathbf{t}|} = -\frac{\mathbf{i} \times \mathbf{t}}{|\mathbf{i} \times \mathbf{t}|}, \quad \text{independiente de } v$$

PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LAS SUPERFICIES SIMPLES

8.20. Demostrar que si $f(\mathbf{x})$ es continua en todo \mathbf{x} de E^3 , entonces el conjunto de todos los puntos M de E^3 que cumplen la condición de ser $f(\mathbf{x}) = c = \text{constante}$, es cerrado.

Supongamos que \mathbf{x}_0 pertenece al complemento M^c de M . En este caso, $f(\mathbf{x}_0) = c^* \neq c$. Como f es continua en \mathbf{x}_0 y está definida para todo valor de \mathbf{x} , existe un $\delta > 0$ tal que para todo \mathbf{x} de $S_\delta(\mathbf{x}_0)$, es

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \frac{1}{2}|c - c^*|, \quad \text{o sea } |f(\mathbf{x}) - c^*| < \frac{1}{2}|c - c^*|$$

De aquí se deduce que $f(\mathbf{x}) \neq c$ para todo \mathbf{x} de $S_\delta(\mathbf{x}_0)$. De esta suerte, todos los \mathbf{x} de $S_\delta(\mathbf{x}_0)$ pertenecen también a M^c . Y como \mathbf{x}_0 es un punto arbitrario de M^c , se concluye que M^c es abierto. Por tanto, M es cerrado, que era lo que queríamos demostrar.

8.21. Con base en el problema 8.20, decidir cuáles de las siguientes superficies son compactas:

(a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, (b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 = 1$.

(a) De acuerdo con el problema 8.20, el conjunto de todos los puntos que satisfacen la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ es cerrado. Pero, no es acotado. En efecto: supongamos que $x_1 = 1/\sqrt{2}$; en este caso, la ecuación se convierte en las $x_2^2 = 1/2 - x_3^2$. Y ésta la pueden cumplir valores de x_2 tan grandes como se quiera, con sólo tomar valores de x_3 suficientemente pequeños. Así, pues, la superficie no es compacta.

(b) También en este caso el conjunto de todos los puntos que satisfacen la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^4 = 1$ es cerrado. Pero, además, este conjunto es acotado. En realidad, lo es porque $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, $|x_3| \leq 1$.

8.22. Demostrar el teorema 8.5, a saber: Si S y T son superficies simples tales que S es cerrada, T es conexa, y S está contenida en T , entonces, considerando tales superficies como conjuntos de puntos de E^3 , S es igual a T .

Supongamos que fuera $S \neq T$, y que M^* es el conjunto de los puntos pertenecientes a T pero no a S . Obsérvese que $M^* \neq \emptyset$, $M^* \cup S = T$, y que $M^* \cap S = \emptyset$. Consideremos, ahora, que sea P un punto cualquiera de S . Necesitamos demostrar que existe un conjunto abierto O_P de E^3 que contiene a P y tal que $O_P \cap T \subset S$. Sea G la imagen de una carta de S que contiene a P . En este caso, existirá un conjunto abierto O_P tal que $O_P \cap S = G$. Pero, G es, además, una carta de T . De modo que $O_P \cap T = G \subset S$. Ahora, bien, supongamos que Q es un punto perteneciente a M^* . Como

S es cerrado y $Q \notin S$, existe un entorno $S(Q)$ tal que $S(Q) \cap S = \emptyset$. Por tanto, $S(Q) \cap T \subset M^*$. Por último, sean $O_1 = \bigcup_P O_P$ y $O_2 = \bigcup_Q S(Q)$. Entonces, O_1 y O_2 son abiertos y ambos tienen con T intersecciones disjuntas no vacías, a saber, S y M^* . Pero, esto, es imposible, porque T es conexo, lo cual demuestra el teorema.

8.23. Demostrar el teorema 8.4, a saber: Si S es una superficie simple conexa, entonces S es arco-conexa por arcos regulares.

Supongamos que S es conexa, y que, no obstante, P y Q son puntos de S que no se pueden unir por medio de un arco regular. Llamemos M_1 al conjunto de los puntos de S que se pueden unir con P y M_2 al conjunto de los puntos que no se pueden unir con P . Obsérvese que $M_2 \neq \emptyset$. Supongamos, ahora, que $P^* \in M_1$. Necesitamos demostrar que existe un conjunto abierto O_{P^*} que contiene a P^* y tal que $O_{P^*} \cap S \cap M_1$. Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta que contiene a P^* , C es un arco regular que va desde P hasta P^* , y (u_0, v_0) es el punto del plano de los parámetros que se aplica en P^* . En el plano de los parámetros, C es una curva regular, $u = u(t)$, $v = v(t)$, que tiene un extremo en (u_0, v_0) , como se muestra en la figura 8-25. Supongamos ahora que $S(u_0, v_0)$ es un entorno de (u_0, v_0) en el que \mathbf{x} está definida. Observemos que $S(u_0, v_0)$ existe por estar \mathbf{x} definida en un conjunto abierto. Es fácil ver que, por ser un arco regular, $u = u(t)$, $v = v(t)$ se puede prolongar hasta cualquier punto (u, v) en el interior de $S(u_0, v_0)$. Pero, en ese caso, la aplicación \mathbf{x} restringida a $S(u_0, v_0)$ es una carta de S cuyos puntos, en total, se pueden unir con P^* y, por tanto, con P . Y, por ser una carta de S , es la intersección de un conjunto abierto O_{P^*} con S . Así, pues, existe en E^3 un conjunto abierto O_{P^*} que contiene a P^* y tal que $O_{P^*} \cap S \subset M_1$. Con una argumentación análoga se demostrará que si Q^* es un punto perteneciente a M_2 , entonces existe un conjunto abierto O_{Q^*} que contiene a Q^* y tal que $O_{Q^*} \cap S \subset M_2$. Sea, ahora, $O_1 = \bigcup_{P^*} O_{P^*}$ y $O_2 = \bigcup_{Q^*} O_{Q^*}$. Los conjuntos O_1 y O_2 son abiertos, cubren a S y tienen con éste intersecciones no vacías y disjuntas, a saber, M_1 y M_2 . Pero, esto es imposible, pues S es conexo, con lo cual queda demostrado el teorema.

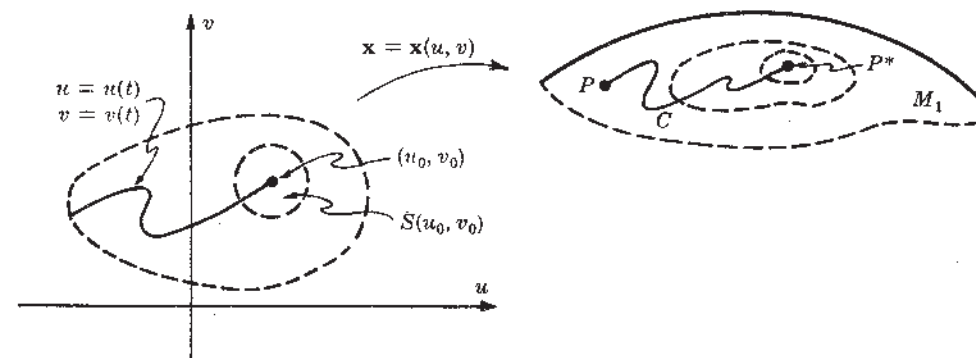


Fig. 8-25

Problemas propuestos

8.24. Demostrar que $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(u+v)\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}(u-v)\mathbf{e}_2 + uv\mathbf{e}_3$ es una representación paramétrica regular de clase C^∞ del paraboloide hiperbólico $x_3 = x_1^2 - x_2^2$. Describir las correspondientes curvas de parámetro u y de parámetro v .

8.25. Hallar una representación paramétrica regular del cilindro recto que tiene por directriz la elipse $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ en el plano x_1x_2 .

8.26. Hallar una base de cartas locales para la elipsoide $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$.

8.27. Demostrar que, si G y G^* son las imágenes de dos cartas locales de una superficie simple S , existe en S una carta cuya imagen es igual a la intersección $G \cap G^*$.

8.28. Demostrar que la normal unitaria de una superficie de revolución $\mathbf{x} = f(u)(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + f(u)(\sin \theta)\mathbf{e}_2 + g(u)\mathbf{e}_3$, $f > 0$, es $\mathbf{N} = [(-g' \cos \theta)\mathbf{e}_1 - (g' \sin \theta)\mathbf{e}_2 + f'\mathbf{e}_3]/[(f')^2 + (g')^2]^{1/2}$.

8.29. Demostrar que el hiperboloide $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$ es una superficie doblemente reglada.

8.30. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a $\mathbf{x} = (u+v)\mathbf{e}_1 + (u-v)\mathbf{e}_2 + uv\mathbf{e}_3$ en $u = 1$, $v = -1$.

8.31. Demostrar que la restricción de la presentación del toro

$$\mathbf{x} = (b + a \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\sin \theta)\mathbf{e}_2 + (a \cos \phi)\mathbf{e}_3$$

a cada uno de los tres conjuntos abiertos siguientes, es una base para el toro: (a) $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \phi < 2\pi$, (b) $-\pi < \theta < \pi$, $-\pi < \phi < \pi$, (c) $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi < \phi < \frac{3}{2}\pi$.

8.32. Hallar la representación, en forma reglada, de la superficie reglada que tiene por directriz a la curva $\mathbf{y} = u\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3$, $u > 0$, y cuyas generatrices tienen la dirección de $\mathbf{g} = (\cos u)\mathbf{e}_1 + (\sin u)\mathbf{e}_2$. Demostrar que la representación es regular y de clase C^∞ .

8.33. El cono es una superficie reglada cuyas generatrices pasan por un punto fijo \mathbf{p} , llamado el vértice. Demostrar que si $\mathbf{g}(u)$ es un vector no nulo, que tiene la dirección de las generatrices, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{p} + u\mathbf{g}(u)$ es una representación paramétrica regular del cono de clase C^m , si $\mathbf{g} \neq 0$, \mathbf{g} es de la clase C^m , y $\mathbf{g} \times \mathbf{g}' \neq 0$ para todo u .

8.34. Demostrar que a todo lo largo de una generatriz del cono, el plano tangente es constante.

8.35. Se da el nombre de helicoides a una conoide recta (véase el problema 8.6 de la página 173) en la que las generatrices giran a velocidad constante alrededor del eje. Demostrar que un helicoides recto que tenga como eje el eje x_3 tiene una representación de la forma

$$\mathbf{x} = (v \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (v \sin \theta)\mathbf{e}_2 + (a + b\theta)\mathbf{e}_3, \quad b \neq 0$$

8.36. Demostrar que, cuando un punto P se mueve a todo lo largo de una generatriz de un helicoides recto (véase el problema 8.35), la normal unitaria gira alrededor de la generatriz de tal modo que el ángulo que forma con el eje varía de 0 a $\pi/2$ en ∞ . Demostrar que la tangente de este ángulo es proporcional a la distancia al eje.

8.37. Demostrar que el plano tangente a todo lo largo de una generatriz de la superficie tangente de una curva, coincide con el plano osculador de la curva en el punto de ésta por donde pasa la generatriz.

8.38. La cinta de Moebius se puede representar como la superficie reglada $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\theta) + v\mathbf{g}(\theta)$, $-\frac{1}{2} < v < \frac{1}{2}$, en donde

$$\mathbf{y}(\theta) = (\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)\mathbf{e}_2$$

Verificar que la normal unitaria cambia de sentido al moverse, una vez, en torno a la circunferencia $\mathbf{y} = (\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)\mathbf{e}_2$ conservando su posición. Véase la figura 8-26.

8.39. Demostrar que, si en la cinta de Moebius del problema 8.38 suprimimos el círculo $\mathbf{x} = (\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)\mathbf{e}_2$, la superficie que resulta es conexa y orientable.

8.40. Demostrar que, si $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$ es una curva regular de clase C^m en una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de clase C^m , su imagen $u = u(t)$, $v = v(t)$ es una curva regular de clase C^m en el plano de los parámetros.

8.41. Demostrar que el cono $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$, $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$, es una superficie elemental de clase C^∞ .

8.42. Demostrar que si \mathbf{T} es un vector, no nulo, paralelo al plano tangente en un punto P de una superficie simple, entonces existe por P una curva $\mathbf{x} = \mathbf{y}(t)$ de la superficie tal que $\mathbf{T} = d\mathbf{y}/dt$ en P .

8.43. Decidir, entre las superficies siguientes, cuáles son compactas:

(a) $x_1^2 - x_2^4 + x_3^6 = 1$, (b) $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_3^4 = 1$.

Resp. (a) No es compacta, (b) Es compacta

8.44. Sea C un arco regular de clase C^1 en el plano uv que tiene un extremo en el punto (u_0, v_0) , y sea $S(u_0, v_0)$ un entorno arbitrario de (u_0, v_0) . Demostrar que, por ser un arco regular de clase C^1 en $S(u_0, v_0)$, es posible prolongar a C hasta cualquier punto (u^*, v^*) en $S(u_0, v_0)$.

8.45. Demostrar que si S es una superficie simple, conexa y orientable, entonces existe una y sólo una partición de la colección \mathcal{F} , de todas las cartas pertenecientes a S , en conjuntos no vacíos y disjuntos, \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 , tales que para cada \mathcal{F}_i , $i = 1, 2$: (i) \mathcal{F}_i es una base. (ii) Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ pertenecen a \mathcal{F}_i , entonces $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) > 0$ en la intersección. (iii) \mathcal{F}_i es maximal, es decir, si a \mathcal{F}_i se agrega cualquier carta de S , entonces deja de cumplirse la propiedad (ii).

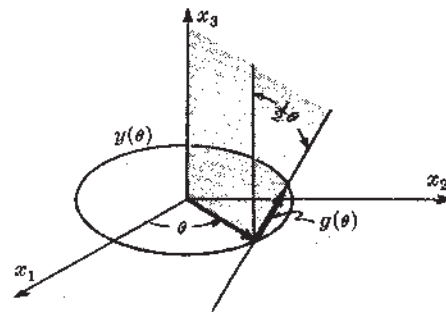


Fig. 8-26

Capítulo 9

Primera y segunda formas fundamentales

PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

Recordemos que una curva de E^3 queda determinada de modo único por dos valores locales invariantes que son la curvatura y la torsión, consideradas como funciones de la longitud de arco. De modo análogo, una superficie en E^3 queda inequívocamente determinada por ciertos valores locales invariantes que reciben los nombres de primera y segunda formas fundamentales.

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ sea una carta local de una superficie de clase ≥ 1 . Recordemos que la diferencial de una aplicación $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ en (u, v) es una aplicación lineal inyectiva $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ de los vectores (du, dv) , pertenecientes al plano uv , sobre los vectores $\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ paralelos al plano tangente en $\mathbf{x}(u, v)$, como se muestra en la figura 9-1. Obsérvese que aquí utilizamos los símbolos du, dv para representar las diferenciales de las funciones coordenadas en el plano uv y, además, para nombrar las componentes de un vector característico del plano uv . Conservando este espíritu, representaremos la imagen $\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ sencillamente con $d\mathbf{x}$. Recordemos, por otra parte, que $d\mathbf{x}$ tiene la propiedad de que

$$\mathbf{x}(u + du, v + dv) = \mathbf{x}(u, v) + d\mathbf{x} + o((du^2 + dv^2)^{1/2})$$

De esta suerte, el vector $d\mathbf{x}$ es una aproximación de primer orden del vector $\mathbf{x}(u + du, v + dv) - \mathbf{x}(u, v)$ que va del punto $\mathbf{x}(u, v)$ de la carta al punto vecino $\mathbf{x}(u + du, v + dv)$.

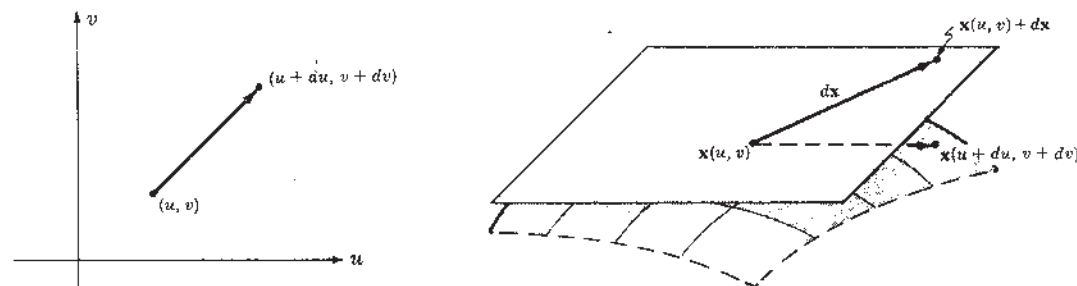


Fig. 9-1

Consideremos ahora la siguiente cantidad

$$\begin{aligned} I &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \\ &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) du^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) du dv + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) dv^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \end{aligned}$$

en donde hacemos $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$, $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ (9.1)

La función $I = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ se denomina *primera forma fundamental* de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Se trata de una función homogénea de segundo grado en du y dv , de coeficientes E, F y G , denominados *primeros coeficientes fundamentales*, que son funciones de u y v y varían de un punto a otro de la carta local. Así, pues, la primera forma fundamental, I es la forma cuadrática definida sobre los vectores (du, dv) del plano uv por la expresión

$$I(du, dv) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

Recordemos que $d\mathbf{x}$ en (u, v) es la parte principal del vector que va desde el punto $\mathbf{x}(u, v)$ de la carta hasta el punto $\mathbf{x}(u + du, v + dv)$. Esto nos sugiere que, en algún sentido, I depende únicamente del tipo de superficie y no de su representación particular. En verdad, ello es cierto en el sentido siguiente: Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ sea otra carta local que contenga un entorno de $\mathbf{x}(u, v)$. Entonces, la transformación de parámetros dada por $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ tiene una diferencial en (u, v) que aplica el vector (du, dv) en el vector $(d\theta, d\phi)$ dado por $d\theta = \theta_u du + \theta_v dv$, $d\phi = \phi_u du + \phi_v dv$. La afirmación de que I es independiente de la representación, se interpreta en el sentido de que I e I^* concuerdan en esta correspondencia, es decir, $I(du, dv) = I^*(d\theta, d\phi)$. Este hecho se puede comprobar analíticamente con sólo utilizar la regla de la cadena, a saber,

$$\begin{aligned} I^*(d\theta, d\phi) &= |d\mathbf{x}^*|^2 = |(\mathbf{x}_\theta^* d\theta + \mathbf{x}_\phi^* d\phi)|^2 \\ &= |\mathbf{x}_\theta^*(\theta_u du + \theta_v dv) + \mathbf{x}_\phi^*(\phi_u du + \phi_v dv)|^2 \\ &= |(\mathbf{x}_\theta^* \theta_u + \mathbf{x}_\phi^* \phi_u) du + (\mathbf{x}_\theta^* \theta_v + \mathbf{x}_\phi^* \phi_v) dv|^2 \\ &= |\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv|^2 = |d\mathbf{x}|^2 = I(du, dv) \end{aligned}$$

Los primeros coeficientes fundamentales no son invariantes en una transformación de parámetros, pero, en cambio, se transforman del siguiente modo

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_\theta^* \theta_u + \mathbf{x}_\phi^* \phi_u) \cdot (\mathbf{x}_\theta^* \theta_u + \mathbf{x}_\phi^* \phi_u) \\ &= \mathbf{x}_\theta^* \cdot \mathbf{x}_\theta^* \theta_u^2 + 2\mathbf{x}_\theta^* \cdot \mathbf{x}_\phi^* \theta_u \phi_u + \mathbf{x}_\phi^* \cdot \mathbf{x}_\phi^* \phi_u^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_\theta^* \theta_u + \mathbf{x}_\phi^* \phi_u) \cdot (\mathbf{x}_\theta^* \theta_v + \mathbf{x}_\phi^* \phi_v) \\ &= \mathbf{x}_\theta^* \cdot \mathbf{x}_\theta^* \theta_u \theta_v + \mathbf{x}_\theta^* \cdot \mathbf{x}_\phi^* (\theta_u \phi_v + \phi_u \theta_v) + \mathbf{x}_\phi^* \cdot \mathbf{x}_\phi^* \phi_u \phi_v \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_\theta^* \theta_v + \mathbf{x}_\phi^* \phi_v) \cdot (\mathbf{x}_\theta^* \theta_v + \mathbf{x}_\phi^* \phi_v)$$

Por último, observemos que la primera forma fundamental es *definida positiva*. Es decir, $I \geq 0$, e $I = 0$ si y sólo si $du = 0$ y $dv = 0$. En efecto, es evidente que $I = |d\mathbf{x}|^2 \geq 0$, y, como \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son independientes, $I = |d\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv|^2 = 0$, si y sólo si $du = 0$ y $dv = 0$.

Puesto que I es definida positiva sus coeficientes deben cumplir la condición de que sea $E > 0$, $G > 0$ y $EG - F^2 > 0$. Esto también se puede verificar directamente. Pues, nuevamente tenemos que, como \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son independientes, $\mathbf{x}_u \neq 0$, $\mathbf{x}_v \neq 0$, y, por tanto, $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = |\mathbf{x}_u|^2 > 0$ y $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = |\mathbf{x}_v|^2 > 0$. Además, utilizando la identidad vectorial $[F_5]$, tenemos que

$$EG - F^2 = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u) = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|^2 \quad (9.4)$$

Pero, en cada punto, $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$, y por ello, $EG - F^2 > 0$.

Ejemplo 9.1.

Consideremos la superficie dada por

$$\mathbf{x} = (u + v)\mathbf{e}_1 + (u - v)\mathbf{e}_2 + uv\mathbf{e}_3$$

En este caso,

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + u\mathbf{e}_3, \quad E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 2 + v^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = uv, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 2 + u^2$$

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = (2 + v^2) du^2 + 2uv du dv + (2 + u^2) dv^2$$

Obsérvese que en todo (u, v) tenemos: $E > 0$, $G > 0$, y $EG - F^2 = 4 + 2u^2 + 2v^2 > 0$. Si introducimos el cambio de parámetros $\theta = u + v$, $\phi = u - v$, entonces, la superficie también estará representada por

$$\mathbf{x} = \theta\mathbf{e}_1 + \phi\mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}(\theta^2 - \phi^2)\mathbf{e}_3$$

Aquí, $\mathbf{x}_\theta = \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\theta\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}_\phi = \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\phi\mathbf{e}_3$, $E^* = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = 1 + \frac{1}{4}\theta^2$, $F^* = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = -\frac{1}{4}\theta\phi$, $G^* = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = 1 + \frac{1}{4}\phi^2$.

Obsérvese que en el punto correspondiente a $u = 1, v = 1$ se tiene $E = 3, F = 1, G = 3$. Pero, en el mismo punto es $\theta = 2, \phi = 0, y E^* = 2, F^* = 0, G^* = 1$. De modo que los primeros coeficientes fundamentales no son valores invariantes.

LONGITUD DE UN ARCO Y AREA DE UNA SUPERFICIE

Los primeros coeficientes fundamentales desempeñan un papel fundamental en el cálculo de longitudes de arcos, ángulos y áreas de superficies. En efecto, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$, es un arco regular de una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. Recordemos que su longitud viene dada por la integral

$$s = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt = \int_a^b \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^{1/2} dt = \int_a^b \left[\left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \right]^{1/2} dt$$

Y, desarrollando,

$$s = \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \quad (9.5)$$

De modo que la longitud de un arco que está en la superficie es la integral de la raíz cuadrada de la primera forma fundamental.

Supongamos, además, que $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ y $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_u \delta u + \mathbf{x}_v \delta v$ sean dos vectores paralelos al plano tangente en un punto \mathbf{x} . Si α es el ángulo que forman $d\mathbf{x}$ y $\delta\mathbf{x}$, entonces

$$\cos \alpha = \frac{d\mathbf{x} \cdot \delta\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}| |\delta\mathbf{x}|} = \frac{(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{x}_u \delta u + \mathbf{x}_v \delta v)}{|\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv| |\mathbf{x}_u \delta u + \mathbf{x}_v \delta v|}$$

$$= \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{[E du^2 + 2F du dv + G dv^2]^{1/2} [E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2]^{1/2}} \quad (9.6)$$

En particular, si β es el ángulo que forman en \mathbf{x} las curvas de parámetros u y v , es decir, el que forman \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v , entonces

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u| |\mathbf{x}_v|} = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{\sqrt{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u} \sqrt{\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (9.7)$$

Lo anterior es un resultado del

Teorema 9.1. (a) Los vectores tangentes $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$ y $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_u \delta u + \mathbf{x}_v \delta v$ son perpendiculares entre sí, si y sólo si

$$E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v = 0$$

(b) Las curvas de parámetros u y las de parámetro v son perpendiculares en un punto si y sólo si $F = 0$.

Ejemplo 9.2.

Consideremos la imagen de la curva $\theta = \log \cot(\pi/4 - t/2)$, $\phi = \pi/2 - t$, $0 \leq t \leq \pi/2$, sobre la esfera de radio igual a la unidad, dada por

$$\mathbf{x} = (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 + (\cos \phi) \mathbf{e}_3$$

En la figura 9-2 se muestra que la curva parte del ecuador y se enrolla, como una espiral, alrededor del polo norte. Para determinar su longitud hacemos el siguiente cálculo

$$\mathbf{x}_\theta = (-\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_\phi = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_2 - (\sin \phi) \mathbf{e}_3$$

$$E = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = \sin^2 \phi, \quad F = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0, \quad G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\operatorname{cosec}^2(\pi/4 - t/2)}{2 \cot(\pi/4 - t/2)} = \frac{1}{2 \sin(\pi/4 - t/2) \cos(\pi/4 - t/2)} = \frac{1}{\sin(\pi/2 - t)} \quad y \quad \frac{d\phi}{dt} = -1$$

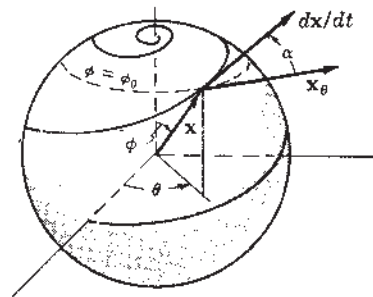


Fig. 9-2

De este modo, a todo lo largo de la curva en donde es $\phi = \pi/2 - t$, se tiene que

$$I = E \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} + G \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2(\pi/2 - t)} + 1 = 2$$

$$y \quad s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{I} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} dt = \pi/\sqrt{2}$$

Obsérvese que la curva forma un ángulo α constante con los paralelos $\phi = \text{constante}$. En efecto, utilizando $\phi = \pi/2 - t$, se tiene

$$\cos \alpha = \cos \angle \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{x}_\phi \right) = \frac{(\mathbf{x}_\theta \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{x}_\phi \frac{d\phi}{dt}) \cdot \mathbf{x}_\phi}{|\mathbf{x}_\theta \frac{d\theta}{dt} + \mathbf{x}_\phi \frac{d\phi}{dt}| |\mathbf{x}_\phi|} = \frac{E \frac{d\theta}{dt} + F \frac{d\phi}{dt}}{\sqrt{I} \sqrt{E}}$$

$$= \left(\frac{\sin^2 \phi}{\sin(\pi/2 - t)} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2} \sin \phi} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

Supongamos ahora que ΔR es una pequeña región de una carta, limitada por las curvas vecinas, u y $u + du$ de parámetro v , y las curvas v y $v + dv$ de parámetro u , como se indica en la figura 9-3. Como primera aproximación del área de ΔR tomamos el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores $\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_u du$ y $\Delta \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_v dv$. Suponiendo que $du > 0$ y $dv > 0$, tal área es la cantidad

$$\Delta s = |\Delta \mathbf{x}_1 \times \Delta \mathbf{x}_2| = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

De esta suerte, nos vemos precisados a definir el área de la región R en $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, como la siguiente integral doble, cuando ella exista,

$$A = \iint_W \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (9.8)$$

en donde W es el conjunto de los puntos que pertenecen al plano de los parámetros y que se aplican sobre R .

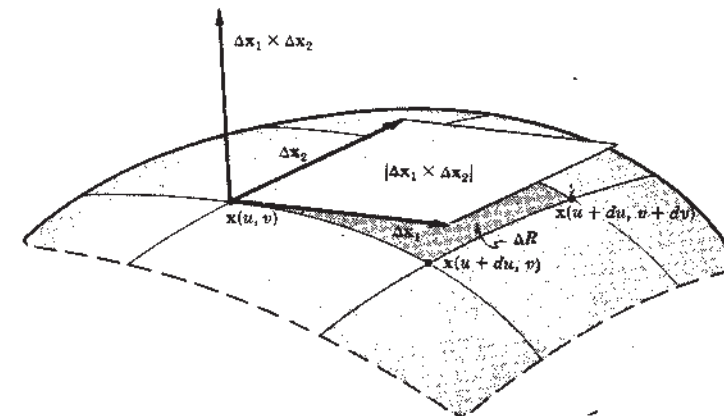


Fig. 9-3

Obsérvese que, sobre una superficie orientada, la anterior definición de área es independiente del tipo de representación de R . En efecto, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ sea otra carta que también contenga a R y tal que $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) > 0$ para todo (u, v) perteneciente a W . Las ecuaciones (9.2) y (9.3) permiten, mediante un fácil cálculo, obtener la expresión

$$EG - F^2 = (E^* G^* - F^{*2}) [\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v)]^2 \quad (9.9)$$

y, en esta forma, de acuerdo con el teorema de transformación de integrales múltiples, se deduce que

$$A = \iint_W \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{W^*} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} \frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)} du dv \\ = \iint_{W^*} \sqrt{E^*G^* - F^{*2}} d\theta d\phi = A^*$$

en donde W^* es la imagen de W en el plano $\theta\phi$; y este es el resultado que se quería obtener.

Ejemplo 9.3.

Consideremos el toro siguiente (véase el ejemplo 8.5)

$$\mathbf{x} = (b + a \sin \phi)(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\sin \theta) \mathbf{e}_2 + (a \cos \phi) \mathbf{e}_3$$

En este caso, $E = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = (b + a \sin \phi)^2$, $F = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0$, $G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = a^2$, y el área de su superficie será

$$S = \iint_{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a(b + a \sin \phi) d\phi \right] d\theta = 4\pi^2 ab$$

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Supongamos, ahora, que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta en una superficie de clase ≥ 2 . Entonces, en cada punto de la carta existe una normal unitaria, $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|}$, que es una función de u y v , de clase C^1 y que tiene la diferencial $d\mathbf{N} = \mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv$. Obsérvese que, en la figura 9-4, $d\mathbf{N}$ es ortogonal a \mathbf{N} , pues es paralela al plano tangente de la imagen esférica de \mathbf{N} . Esto también se deduce del hecho de que $0 = d(1) = d(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) = 2d\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$. De modo que $d\mathbf{N}$ es un vector paralelo al plano tangente en \mathbf{x} , como se muestra en la figura 9-4.

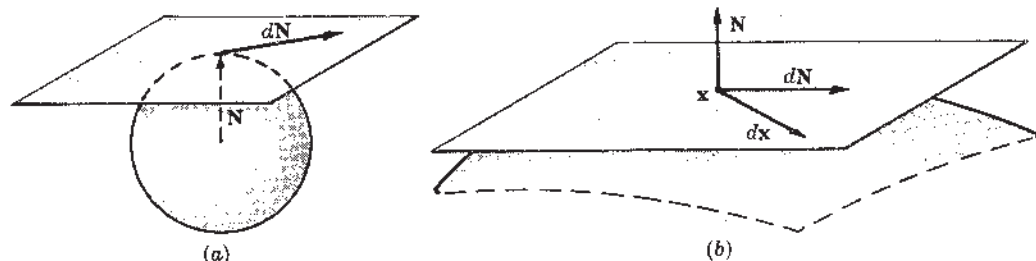


Fig. 9-4

Consideremos, ahora, la siguiente cantidad

$$\text{II} = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N} = -(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv)(\mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv) \\ = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u du^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u) du dv - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v dv^2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

en donde, $L = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u$, $M = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u)$, $N = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$ (9.10)

La función $\text{II} = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$ recibe el nombre de *segunda forma fundamental* de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$. En este caso, también II es una función homogénea de segundo grado en du y dv , de coeficientes L , M y N que son funciones continuas de u y v , y se llaman *segundos coeficientes fundamentales*.

Se demuestra fácilmente que II es invariante en el mismo sentido que lo es I en una transformación de parámetros que conserve la dirección y el sentido de \mathbf{N} ; de lo contrario, II cambiará de signo. Además, sus coeficientes se transforman de la misma manera que los primeros coeficientes fundamentales. En otros términos, si es $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ cualquier otra carta de la superficie, entonces en un punto de la intersección en el que $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) > 0$, se tiene

$$L = L^* \theta_u^2 + 2M^* \theta_u \phi_u + N^* \phi_u^2 \\ M = L^* \theta_u \theta_v + M^* (\phi_u \theta_v + \theta_u \phi_v) + N^* \phi_u \phi_v \\ N = L^* \theta_v^2 + 2M^* \theta_v \phi_v + N^* \phi_v^2$$

(9.11)

La demostración de las anteriores propiedades de II se dejan al lector por vía de ejercicio.

Como quiera que \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son perpendiculares a \mathbf{N} para cualquier (u, v) , se tiene

$$0 = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N})_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u, \quad 0 = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N})_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v,$$

$$0 = (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N})_u = \mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u, \quad \text{y} \quad 0 = (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N})_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$$

Por tanto,

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u, \quad \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v$$

Esto proporciona otras expresiones de L , M y N que pueden alternar con las ya conocidas. A saber, de acuerdo con (9.10), se tiene

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N}, \quad M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N}, \quad N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u$$

(9.12)

Por otra parte, tenemos

$$\text{II} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} du^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} du dv + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} dv^2 = d^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N}$$

(9.13)

en donde $d^2 \mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu} du^2 + 2\mathbf{x}_{uv} du dv + \mathbf{x}_{vv} dv^2$ es la derivada de segundo orden de \mathbf{x} en (u, v) y en la dirección y sentido de du, dv .

Ejemplo 9.4.

Consideremos la superficie representada por la ecuación

$$\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 - v^2)\mathbf{e}_3$$

En este caso, $\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + 2u\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 - 2v\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}_{uu} = 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_{vv} = -2\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2} (-2u\mathbf{e}_1 + 2v\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

De esta suerte, los segundos coeficientes fundamentales son

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}, \quad M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$$

y la segunda forma fundamental es

$$\text{II} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2} (du^2 - dv^2)$$

Supongamos que P es un punto de una superficie de clase ≥ 2 , Q es un punto en la vecindad de P y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta que contiene a P y Q . Llamemos $d = \mathbf{PQ} \cdot \mathbf{N}$ a la proyección de \mathbf{PQ} sobre la normal unitaria \mathbf{N} en P , como se muestra en la figura 9-5. Obsérvese que d es positiva o negativa, según que Q esté de un lado o del otro del plano tangente en P ; por otra parte, $|d|$ es la distancia perpendicular de Q al plano tangente en P . Supongamos, ahora, que P y Q son los puntos $\mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x}(u + du, v + dv)$ respectivamente. El teorema de Taylor nos da

$$\mathbf{x}(u + du, v + dv) = \mathbf{x}(u, v) + d\mathbf{x} + \frac{1}{2}d^2 \mathbf{x} + o(du^2 + dv^2)$$

De esta suerte,

$$d = \mathbf{PQ} \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{x}(u + du, v + dv) - \mathbf{x}(u, v)) \cdot \mathbf{N} \\ = [d\mathbf{x} + \frac{1}{2}d^2 \mathbf{x} + o(du^2 + dv^2)] \cdot \mathbf{N} \\ = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + \frac{1}{2}d^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} + o(du^2 + dv^2)$$

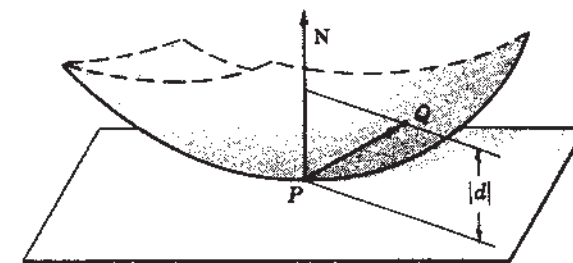


Fig. 9-5

Pero, $dx \cdot N = 0$, pues dx es paralela al plano tangente en P . Por consiguiente, según (9.13), se tiene

$$d = \frac{1}{2} d^2 x \cdot N + o(du^2 + dv^2) = \frac{1}{2} II + o(du^2 + dv^2)$$

De modo que II es la parte principal del duplo de la proyección de PQ sobre N y $|II|$ es la parte principal del duplo de la distancia perpendicular de Q al plano tangente en P .

La función

$$\delta = \frac{1}{2} II = \frac{1}{2} (L du^2 + 2M du dv + N dv^2)$$

se denomina *paraboloide osculador* en P . La naturaleza de tal paraboloide determina cualitativamente la naturaleza de la superficie en las vecindades de P . Distinguiremos cuatro casos que dependen del discriminante $LN - M^2$.

- (i) **Caso elíptico:** Se dice que un punto es *elíptico* si $LN - M^2 > 0$. En este caso, δ será un paraboloide elíptico, como se aprecia en la figura 9-6(a), por ser función de du y dv . Obsérvese que δ conserva el mismo signo para cualquier (du, dv) . En las vecindades de un punto elíptico la superficie está en un solo lado del plano tangente en el punto y tiene la forma que se muestra en la figura.

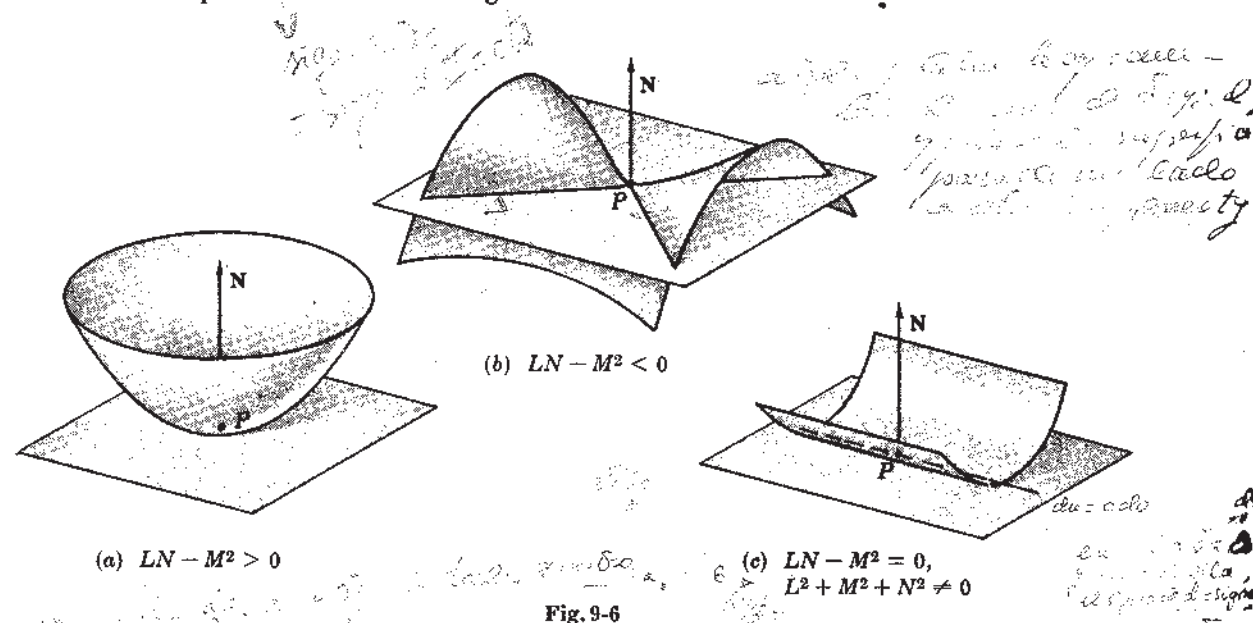


Fig. 9-6

- (ii) **Caso hiperbólico:** Se dice que un punto es *hiperbólico* si $LN - M^2 < 0$. En este caso, δ será un paraboloide hiperbólico, como se ve en la figura 9-6(b), por ser función de (du, dv) . En este caso, existen en el plano tangente en P , dos rectas distintas que dividen al plano tangente en cuatro regiones en las cuales δ es alternativamente positivo y negativo. Sobre las dos rectas es $\delta = 0$. En las proximidades de un punto hiperbólico, la superficie se halla a ambos lados del plano tangente como se ve en la figura.

- (iii) **Caso parabólico:** Se dice que un punto es *parabólico* si $LN - M^2 = 0$ y $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$, es decir, si $LN - M^2 = 0$ y los coeficientes L, M y N no son todos iguales a cero. En este caso, δ será un cilindro parabólico, como se observa en la figura 9-6(c), por ser función de (du, dv) . En este caso, sólo hay, en el plano tangente en P , una recta a lo largo de la cual es $\delta = 0$, en cualquier otro caso, δ conserva el mismo signo. Es de observar que en las vecindades de un punto parabólico la superficie misma puede hallarse a ambos lados del plano tangente. Véase el problema 9.8.

- (iv) **Caso plano:** Se dice que un punto es *plano* si $L = M = N = 0$. En este caso es $\delta = 0$ para cualquier (du, dv) . Y el orden del *contacto* de la superficie con el plano tangente es mayor que en los casos precedentes.

De acuerdo con el anterior análisis geométrico, es de esperar que las propiedades de un punto de una superficie, bien sea elíptico, hiperbólico, parabólico o plano, no dependan del tipo de representación de la superficie. Esto ocurre, y puede verificarse analíticamente. En efecto, si $x = x^*(\theta, \phi)$ es cualquier otra carta de la superficie, con base en las ecuaciones (9.11) se puede demostrar que en cada punto de la intersección es

$$L^* N^* - M^{*2} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} \right)^2 (LN - M^2)$$

Como $\partial(u, v)/\partial(\theta, \phi) \neq 0$, se colige que $L^* N^* - M^{*2}$ es positivo, negativo o nulo cuando lo sea $LN - M^2$. De las ecuaciones (9.11) y de sus correspondientes inversas, se deduce también que $L = M = N = 0$ si y sólo si $L^* = M^* = N^* = 0$.

Ejemplo 9.5.

Nos referimos al siguiente toro

$$x = (b + a \sin \phi)(\cos \theta) e_1 + (b + a \sin \phi)(\sin \theta) e_2 + (a \cos \phi) e_3 \quad b > a$$

En este caso,

$$x_{\theta\theta} = -(b + a \sin \phi)(\cos \theta) e_1 - (b + a \sin \phi)(\sin \theta) e_2$$

$$x_{\theta\phi} = -(a \cos \phi \sin \theta) e_1 + (a \cos \phi \cos \theta) e_2$$

$$x_{\phi\phi} = -(a \sin \phi \cos \theta) e_1 - (a \sin \phi \sin \theta) e_2 - (a \cos \phi) e_3$$

$$N = (-\cos \theta \sin \phi) e_1 - (\sin \theta \sin \phi) e_2 - (\cos \phi) e_3$$

$$L = x_{\theta\theta} \cdot N = (b + a \sin \phi) \sin \phi \quad M = x_{\theta\phi} \cdot N = 0 \quad N = x_{\phi\phi} \cdot N = a$$

y

$$LN - M^2 = a(b + a \sin \phi) \sin \phi$$

Obsérvese que los segundos coeficientes fundamentales sólo dependen de ϕ . Son constantes a lo largo de un paralelo $\phi = \phi_0$. Como quiera que $0 < a < b$, $a(b + a \sin \phi) > 0$. Por tanto, el signo de $LN - M^2$ concuerda con el signo de $\sin \phi$. De esta suerte, $LN - M^2 > 0$, para $0 < \phi < \pi$; $LN - M^2 = 0$, para $\phi = 0$, o, $\phi = \pi$, $LN - M^2 < 0$, para $\pi < \phi < 2\pi$. De modo que, tal cual se muestra en la figura 9-7, los puntos que están hacia la parte de afuera del toro ($0 < \phi < \pi$) son elípticos. En ese caso, la superficie se halla sobre una de las caras del plano tangente en las vecindades de cada punto. Los puntos que están hacia la parte de adentro del toro ($\pi < \phi < 2\pi$) son hiperbólicos. En ese caso, en las proximidades de cada punto la superficie se halla en ambas caras del plano tangente. Los puntos que están en los paralelos superior e inferior del toro, es decir, aquellos para los cuales $\phi = 0$ y $\phi = \pi$, son parabólicos.

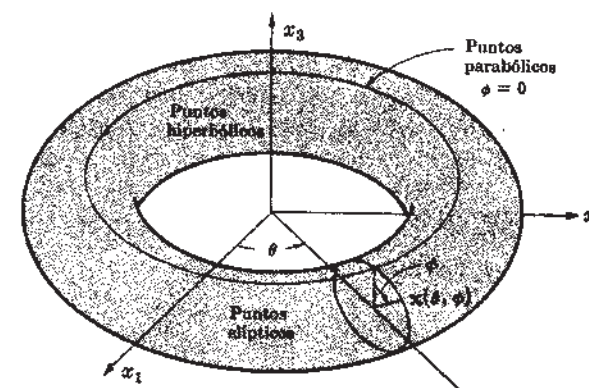


Fig. 9-7

La naturaleza de la superficie en un punto plano se describe por medio de los términos de mayor orden que sigan en el desarrollo de $x(u, v)$. Es decir, supongamos que $x = x(u, v)$ es de clase C^3 y $P = x(u, v)$ es un punto plano; entonces,

$$x(u + du, v + dv) = x(u, v) + dx + \frac{1}{2} d^2 x + \frac{1}{6} d^3 x + o[(du^2 + dv^2)^{3/2}]$$

y

$$\begin{aligned} d &= [x(u + du, v + dv) - x(u, v)] \cdot N \\ &= dx \cdot N + \frac{1}{2} d^2 x \cdot N + \frac{1}{6} d^3 x \cdot N + o[(du^2 + dv^2)^{3/2}] \\ &= \frac{1}{2} II + \frac{1}{6} d^3 x \cdot N + o[(du^2 + dv^2)^{3/2}] \end{aligned}$$

Como es $L = M = N = 0$ en P , tenemos $II = 0$. Por consiguiente, la superficie se aproxima por medio de

$$\delta = \frac{1}{6} d^3 \mathbf{x} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{6} [\mathbf{x}_{uuu} \cdot \mathbf{N} du^3 + 3\mathbf{x}_{uuv} \cdot \mathbf{N} du^2 dv + 3\mathbf{x}_{uvv} \cdot \mathbf{N} du dv^2 + \mathbf{x}_{vvv} \cdot \mathbf{N} dv^3] \\ = \frac{1}{6} [A du^3 + B du^2 dv + C du dv^2 + D dv^3]$$

Si la cúbica $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ tiene tres raíces distintas, entonces existirán por P tres rectas que pertenecen al plano tangente en P , y que dividen este plano en seis regiones en las cuales δ es alternativamente positiva y negativa. En ese caso, es δ una función de (du, dv) que describe una *silla de montar* como se muestra en la figura 9-8. Según la naturaleza de las raíces de $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ se presentarán algunas variaciones.

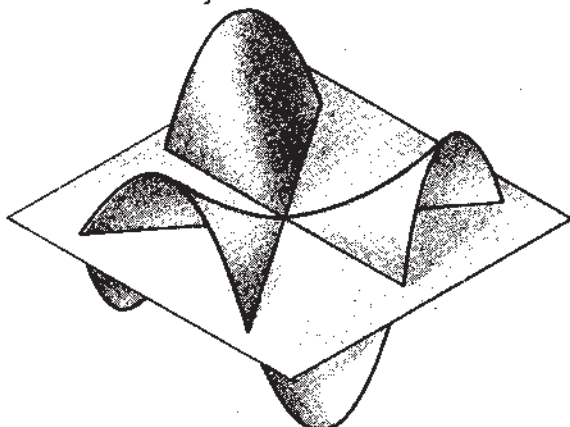


Fig. 9-8

Ejemplo 9.6.

Consideremos la superficie

$$\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^3 + v^3 + u^4)\mathbf{e}_3$$

En este caso,

$$\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + (3u^2 + 4u^3)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 + 3v^2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{uu} = (6u + 12u^2)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{uv} = 0, \quad \mathbf{x}_{vv} = 6v\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{N} = [(3u^2 + 4u^3)^2 + 9v^4 + 1]^{-1/2} (-(3u^2 + 4u^3)\mathbf{e}_1 - 3v^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{x}_{uuu} = (6 + 24u)\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{uuv} = 0, \quad \mathbf{x}_{uvv} = 0, \quad \mathbf{x}_{vvv} = 6\mathbf{e}_3$$

En $u = 0, v = 0$, tenemos $\mathbf{x}_{uu} = \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vv} = 0$, de modo que $L = M = N = 0$ y el punto es plano. La superficie en este punto viene descrita por

$$\delta = \frac{1}{6} (\mathbf{x}_{uuu} \cdot \mathbf{N} du^3 + 3\mathbf{x}_{uuv} \cdot \mathbf{N} du^2 dv + 3\mathbf{x}_{uvv} \cdot \mathbf{N} du dv^2 + \mathbf{x}_{vvv} \cdot \mathbf{N} dv^3)$$

En $u = 0, v = 0$, la función es:

$$\delta = \frac{1}{6} [6\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 du^3 + 6\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 dv^3] \\ = du^3 + dv^3 \\ = (du + dv)(du^2 - du dv + dv^2)$$

En este caso, existe una sola recta, $du + dv = 0$, perteneciente al plano tangente, a lo largo de la cual es $\delta = 0$. El segundo factor, $(du^2 - du dv + dv^2)$, es definido positivo, para todo (du, dv) real. En las proximidades de este punto, la superficie tiene la forma que se muestra en la figura 9-9.

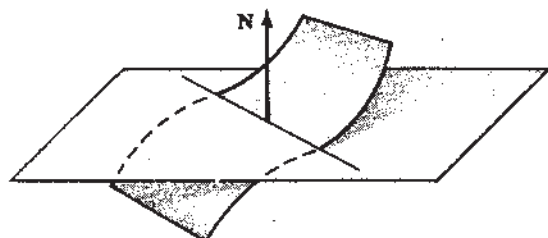


Fig. 9-9

CURVATURA NORMAL

Sean P un punto de una superficie de clase ≥ 2 , $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta que contiene a P y, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ una curva regular C de clase C^2 que pasa por P . Se llama *vector curvatura normal* de C en P y se designa por \mathbf{k}_n , al vector que es proyección del vector curvatura \mathbf{k} de C en P sobre la normal \mathbf{N} en P ; es decir,

$$\mathbf{k}_n = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} \quad (9.14)$$

Obsérvese que \mathbf{k}_n es independiente del sentido de \mathbf{N} . También es independiente del sentido de C , pues \mathbf{k} es independiente del sentido de C .

La componente de \mathbf{k}_n en la dirección de \mathbf{N} se denomina *curvatura normal* de C en P y se simboliza con κ_n . O sea,

$$\kappa_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \quad (9.15)$$

En este caso, el signo κ_n depende del sentido de \mathbf{N} , pero es independiente del sentido de C .

Recordemos que la tangente unitaria a C en P es el vector $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$, y el vector curvatura es $\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$. De esta suerte, utilizando el hecho de que \mathbf{t} es perpendicular a \mathbf{N} a todo lo largo de la curva, de tal modo que $0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{N}) = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt}$, tendremos

$$\kappa_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \cdot \mathbf{N} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = -\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| \\ = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|^2 = -\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} / \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ = -\left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\mathbf{N}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{N}_v \frac{dv}{dt} \right) / \left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right)$$

Por tanto,
$$\kappa_n = \frac{L(du/dt)^2 + 2M(du/dt)(dv/dt) + N(dv/dt)^2}{E(du/dt)^2 + 2F(du/dt)(dv/dt) + G(dv/dt)^2} \quad (9.16)$$

Observemos que κ_n , por ser función de du/dt y de dv/dt , sólo depende de la razón $(du/dt)/(dv/dt)$, es decir, de la *dirección de la tangente a C en P* . En otras palabras, κ_n es una función de los primeros y segundos coeficientes fundamentales los cuales sólo dependen de P . Tenemos así el

Teorema 9.2. Todas las curvas que pasan por un punto P de una carta y que sean tangentes a una misma recta que pasa por P tienen la misma curvatura normal en P .

Supongamos, ahora, que C es una curva que tiene normal principal \mathbf{n} en P , continua, y que el sentido de \mathbf{n} a lo largo de C se escoge de modo que $0 \leq \angle(\mathbf{n}, \mathbf{N}) \leq \pi/2$ en P . De acuerdo con la ecuación (9.15),

$$\kappa_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{N} = \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}) = \kappa \cos \alpha \quad (9.17)$$

en donde $\alpha = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{N})$. Como κ_n sólo depende de la dirección de la tangente a C y $\cos \alpha$ viene determinado por la dirección de la normal principal a C , se colige que si $\cos \alpha \neq 0$, la curvatura κ de C en P está determinada inequívocamente por el plano osculador de C , como se muestra en la figura 9-10.

Observemos que $\cos \alpha = 0$ si y sólo si \mathbf{n} es paralela al plano tangente en P o, lo que es igual, si y sólo si coinciden el plano osculador y el plano tangente. De este modo, tenemos el

Teorema 9.3. Todas las curvas de una superficie que pasan por un punto P y tienen en ese punto el mismo plano osculador, tendrán la misma curvatura κ en P , supuesto que el plano osculador no sea tangente a la superficie.

Del anterior teorema se deduce que, con excepción de las curvas cuyo plano osculador sea tangente a la superficie, todos los posibles valores de la curvatura de una curva que pasa por P , se pueden obtener considerando las curvas que se obtienen al cortar con planos que

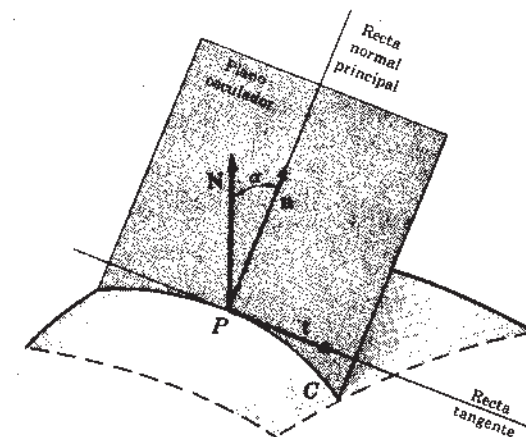


Fig. 9-10

pasen por P . En particular, supongamos que C es una curva que pasa por P , recortada por un plano que contiene a N ; es decir, supongamos que C es una sección normal de la carta. Entonces, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{N} = 1$ y, de acuerdo con (9.17), tenemos que $\kappa_n = \kappa$. En consecuencia,

Teorema 9.4. La curvatura de una sección normal de una carta en un punto P es igual a la curvatura normal de la sección en P .

Puesto que la curvatura normal de C en P sólo depende de P y de la dirección de la tangente a C en ese punto, entonces podemos hablar de la curvatura normal en P en la dirección $du:dv$, siendo $du^2 + dv^2 \neq 0$, y, de acuerdo con (9.16), escribir,

$$\kappa_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{II}{I} \quad (9.18)$$

Aquí, los $du:dv$ reciben el nombre de números directores de la recta en el plano tangente paralelo al vector $\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv$. Los números directores $du:dv$ y $du':dv'$ determinan la misma recta si y sólo si son proporcionales, es decir, si y sólo si existe un $\lambda \neq 0$ tal que $du = \lambda du'$ y $dv = \lambda dv'$.

La ecuación (9.18) nos permite afirmar, por una parte, que κ_n es invariante (en el mismo sentido que lo son I y II) en toda transformación paramétrica que conserve el sentido de N , y, por otra parte, que κ_n cambia de signo en toda transformación paramétrica que invierta el sentido de N . Además, como I es definida positiva, se colige que κ_n es positiva, negativa o nula siempre que lo sea II. Si P es un punto elíptico, entonces $\kappa_n \neq 0$ y conserva el mismo signo para todo $du:dv$. Si P es hiperbólico, κ_n es positiva, negativa o nula según lo sea $du:dv$. Si P es parabólico, κ_n conserva su signo y es nula para la dirección en la que sea $II = 0$. En un punto plano, $\kappa_n = 0$ en todas las direcciones.

Ejemplo 9.7.

Consideremos la esfera de radio a dada por

$$\mathbf{x} = (a \cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (a \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 + (a \cos \phi) \mathbf{e}_3 \quad 0 < \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi$$

En este caso,

$$\mathbf{x}_\theta = -(a \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 + (a \cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_\phi = (a \cos \theta \cos \phi) \mathbf{e}_1 + (a \sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_2 - (a \sin \phi) \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}_{\theta\theta} = -(a \cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 - (a \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_{\theta\phi} = -(a \sin \theta \cos \phi) \mathbf{e}_1 + (a \cos \theta \cos \phi) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_{\phi\phi} = -(a \cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 - (a \sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 - (a \cos \phi) \mathbf{e}_3$$

$$N = -(\cos \theta \sin \phi) \mathbf{e}_1 - (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{e}_2 - (\cos \phi) \mathbf{e}_3$$

$$E = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = a^2 \sin^2 \phi, \quad F = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi = 0, \quad G = \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi = a^2$$

$$L = \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot N = a \sin^2 \phi, \quad M = \mathbf{x}_{\theta\phi} \cdot N = 0, \quad N = \mathbf{x}_{\phi\phi} \cdot N = a$$

$$\kappa_n = \frac{L d\theta^2 + 2M d\theta d\phi + N d\phi^2}{E d\theta^2 + 2F d\theta d\phi + G d\phi^2} = \frac{a \sin^2 \phi d\theta^2 + a d\phi^2}{a^2 \sin^2 \phi d\theta^2 + a^2 d\phi^2} = 1/a$$

Se ve que en este caso es $\kappa_n = \text{constante} = 1/a$ en todos los puntos y en todas las direcciones. Esto es compatible con el hecho bien conocido de que toda sección normal de la esfera en cualquier punto es una circunferencia máxima de radio a y curvatura $1/a$.

Ejemplo 9.8.

Consideremos la siguiente superficie $\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 - v^2)\mathbf{e}_3$

$$\text{Aquí es, } \mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1 + 2u\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 - 2v\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{uu} = 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{uv} = 0, \quad \mathbf{x}_{vv} = -2\mathbf{e}_3$$

$$N = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}(-2u\mathbf{e}_1 + 2v\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \quad E = 1 + 4u^2, \quad F = -4uv, \quad G = 1 + 4v^2$$

$$L = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}, \quad M = 0, \quad N = -2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}, \quad LN - M^2 = -4(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1}$$

Obsérvese que todos los puntos son hiperbólicos. En particular, en el origen tenemos: $E = 1, F = 0, G = 1, L = 2, M = 0, N = -2$, de modo que $\kappa_n = \frac{2(du^2 - dv^2)}{du^2 + dv^2}$. Si suponemos que $du^2 + dv^2 = 1$ y hacemos $du = \cos \theta, dv = \sin \theta$, tenemos que $\kappa_n = 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2 \cos 2\theta$. De modo que, como se ve en la figura 9-11, κ_n varía de valores positivos a negativos dentro de los cuatro intervalos siguientes: $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, 3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4, 5\pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4$. La curvatura κ de una sección normal por el origen variará, como lo hace κ_n , entre -2 y 2 .

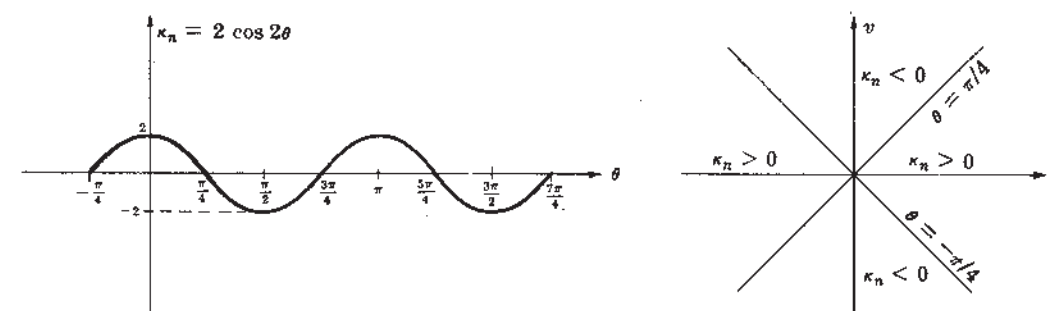


Fig. 9-11

CURVATURAS Y DIRECCIONES PRINCIPALES

Necesitamos estudiar en detalle la curvatura normal en un punto P de una superficie. En virtud de las propiedades invariantes de κ_n , podemos suponer que una vecindad de P se representa por una carta de Monge de la forma $\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + f(u, v)\mathbf{e}_3$ tal que $\mathbf{x}_u = \mathbf{e}_1$ y $\mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2$ en P . Esto se logra colocando la superficie de modo que P quede en el origen y el plano tangente coincida con el x_1x_2 , como se muestra en la figura 9-12.

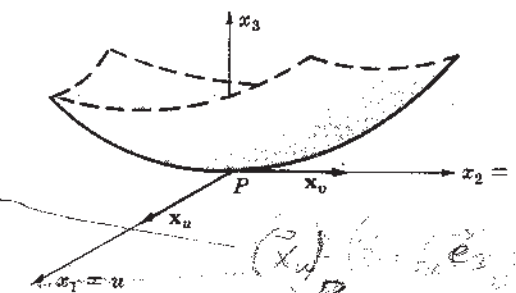


Fig. 9-12

De esto se deduce que $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1, F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1$, y

$$\kappa_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{du^2 + dv^2}$$

Como κ_n sólo depende de la razón du/dv , podemos suponer que $du^2 + dv^2 = 1$ y hacer $du = \cos \theta$ y $dv = \sin \theta$. De esta suerte,

$$\kappa_n = L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta$$

Por último, supongamos que $|\kappa_n| = 1/r^2$ y hagamos $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$, para obtener

$$\pm 1 = Lx_1^2 + 2Mx_1x_2 + Nx_2^2 \quad (9.19)$$

La ecuación anterior determina una sección cónica en el plano x_1x_2 , llamada indicatriz de Dupin y es tal que la distancia r de un punto (x_1, x_2) al origen es el recíproco de la raíz cuadrada de $|\kappa_n|$ en la dirección definida por $\cos \theta : \sin \theta$.

Si P es un punto elíptico, ($LN - M^2 > 0$), la indicatriz será una elipse como se muestra en la figura 9-13(a). Si P es un punto hiperbólico, ($LN - M^2 < 0$), la indicatriz está formada por un par de hipérbolas conjugadas (Fig. 9-13(b)). A todo lo largo de una de las hipérbolas, κ_n es positiva y a lo largo de la otra κ_n es negativa. Las asíntotas comunes corresponden a las direcciones para las cuales es $\kappa_n = 0$. En el caso parabólico ($LN - M^2 = 0, L^2 + N^2 + M^2 \neq 0$), la expresión $Lx_1^2 + 2Mx_1x_2 + Nx_2^2$ se descompone en factores y la

indicatriz está formada por un par de rectas paralelas, como se ve en la figura 9-13(c) que están también en la dirección en que $\kappa_n = 0$. En el caso plano ($L = M = N = 0$) no existe indicatriz.

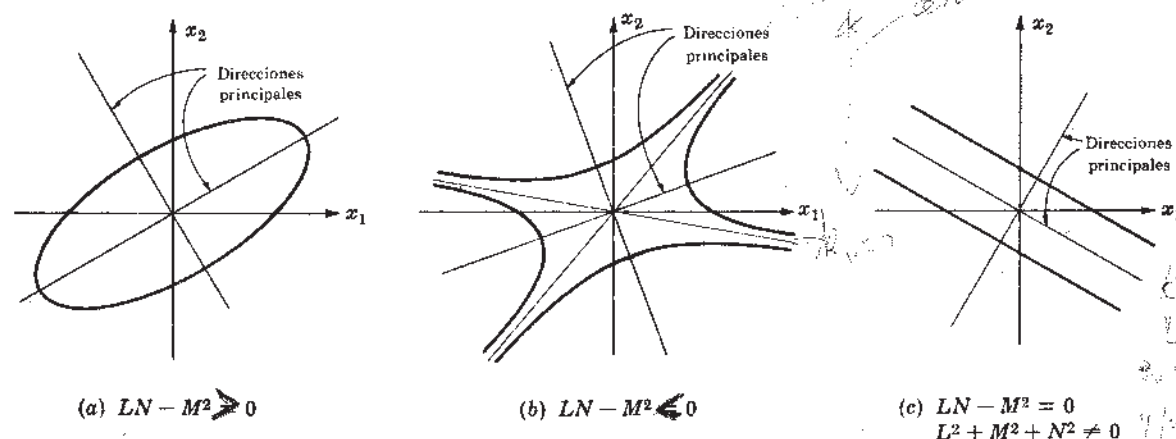


Fig. 9-13

Recordemos que $|\kappa_n| = 1/r^2$ para ver que, si la indicatriz existe y no es una circunferencia, entonces κ_n adopta distintos valores máximos y mínimos, por ejemplo, κ_1 y κ_2 , en dos direcciones perpendiculares que son los ejes de la indicatriz. En un punto elíptico, supuesta $\kappa_n > 0$, vemos que el máximo, κ_1 , se alcanza en la dirección del eje menor de la indicatriz, es decir, la mínima distancia al origen, y el mínimo, κ_2 , se alcanza en la dirección del eje mayor. En un punto hiperbólico, el máximo, κ_1 , es positivo y se alcanza en la dirección del eje de la hipérbola a lo largo del cual es $\kappa_n > 0$. El mínimo, κ_2 , es negativo y se alcanza en la dirección del eje de la hipérbola a lo largo del cual es $\kappa_n < 0$. En un punto parabólico, supuesto que $\kappa_n \geq 0$, el máximo, κ_1 , se logra en la dirección perpendicular a las rectas paralelas, y el mínimo, $\kappa_2 = 0$, en la dirección de las paralelas a la indicatriz. Las dos direcciones perpendiculares para las cuales los valores de κ_n llegan a ser máximos y mínimos, se denominan *direcciones principales*, y las correspondientes curvaturas normales, κ_1 y κ_2 , se llaman *curvaturas principales*.

Falta considerar el punto elíptico en el caso de que la indicatriz sea una circunferencia, y el punto plano cuando no exista la indicatriz. En todo punto elíptico es $\kappa_n = \text{constante} \neq 0$ y todas las direcciones se llaman direcciones principales. Análogamente, en el caso de un punto plano es $\kappa_n = \text{constante} = 0$ y, nuevamente, todas las direcciones son principales. Un punto de la superficie en el que $\kappa_n = \text{constante}$, se denomina *punto umbilical*. El caso elíptico recibe el nombre de *punto umbilical elíptico*. El punto plano se llama también *punto umbilical parabólico*.

Ejemplo 9.9.

- (a) De acuerdo con el ejemplo 9.7, en cualquier punto de la esfera de radio a , la curvatura normal es $\kappa_n = \text{constante} = 1/a$. Todos los puntos de la esfera son puntos umbilicales elípticos y todas las direcciones son principales.
- (b) La ecuación de un plano es $\mathbf{x} = \mathbf{a} + b\mathbf{u} + c\mathbf{v}$, $a, b, c = \text{constante}$. En este caso es $\mathbf{x}_{uu} = \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vv} = 0$. Por tanto, $L = M = N = 0$. Todos los puntos de un plano son umbilicales parabólicos o sea, planos. Todas las direcciones de un plano son principales.

- (c) De acuerdo con el ejemplo 9.8, la curvatura normal κ_n en el origen de

$$\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 - v^2)\mathbf{e}_3$$

es $\kappa_n = \frac{2(du^2 - dv^2)}{du^2 + dv^2}$. Para $du^2 + dv^2 = 1$, $du = \cos \theta$,

$dv = \sin \theta$, $r^2 = 1/|\kappa_n|$, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, obtenemos la indicatriz $\pm 1 = 2(x_1^2 - x_2^2)$. Estas son hipérbolas conjugadas, como se muestra en la figura 9-14. En este caso, el valor máximo de κ_n es 2 y se alcanza en la dirección del eje x_1 . El valor mínimo de κ_n es -2 y se alcanza en la dirección del eje x_2 . Las direcciones de los ejes x_1 y x_2 son las direcciones principales.

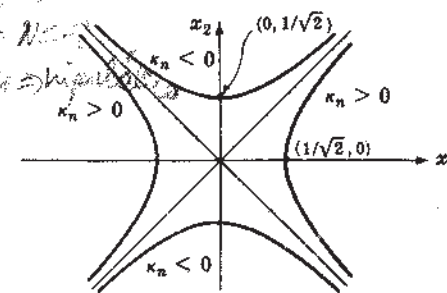


Fig. 9-14

Supongamos, ahora, que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es cualquier carta de la superficie que contiene a P . En el problema 9.16 se demostrará el

Teorema 9.5. Un número real κ es curvatura principal en P , en la dirección $du : dv$, si y sólo si κ , du y dv satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (L - \kappa E) du + (M - \kappa F) dv &= 0 \\ (M - \kappa F) du + (N - \kappa G) dv &= 0 \end{aligned} \quad (9.20)$$

en donde $du^2 + dv^2 \neq 0$.

El anterior es un sistema homogéneo de ecuaciones que tiene una solución no trivial du, dv si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} L - \kappa E & M - \kappa F \\ M - \kappa F & N - \kappa G \end{pmatrix} = 0$$

o, desarrollando

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (EN + GL - 2FM)\kappa + (LN - M^2) = 0$$

En el problema 9.14 demostraremos que el discriminante de la ecuación precedente es mayor que o igual a cero. De este modo, la ecuación tiene dos raíces reales distintas, κ_1 y κ_2 , que son las curvaturas principales en un punto umbilical, o una sola raíz real, κ , con orden de multiplicidad dos, que es la curvatura en un punto umbilical. Así, llegamos al

Teorema 9.6. Un número κ es curvatura principal si y sólo si κ es solución de la ecuación

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (EN + GL - 2FM)\kappa + (LN - M^2) = 0 \quad (9.21)$$

Por último, observemos que en un punto umbilical todas las direcciones son principales. Pero, este caso sólo ocurre si y sólo si todos los coeficientes de las ecuaciones (9.20) se anulan. De esta suerte, tenemos el

Teorema 9.7. Un punto es umbilical si y sólo si los coeficientes fundamentales son proporcionales, caso en el cual la curvatura normal es

$$\kappa = \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} \quad (9.22)$$

CURVATURA GAUSIANA Y CURVATURA MEDIA

Si la ecuación (9.21) se divide por $EG - F^2$, puede escribirse en la siguiente forma

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

en donde
$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \quad (9.23)$$

es el promedio de las raíces κ_1 y κ_2 y se denomina *curvatura media* en P , y

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (9.24)$$

es el producto de las raíces y recibe el nombre de *curvatura gaussiana* en P .

Debido a que la curvatura normal κ_n de una curva a lo sumo cambia de signo al cambiar la orientación de la superficie, los valores extremos de κ_n se conservan como tales y, a lo sumo, ambos cambian de signo cuando se opere un cambio de orientación (así, pues, el máximo se convierte en mínimo, etc.). De esto se deduce que la curvatura gaussiana $K = \kappa_1 \kappa_2$ es una propiedad invariante de la superficie, independiente del tipo de representación. Obsérvese que $EG - F^2 > 0$, y, de este modo, el signo de K concuerda con el de $LN - M^2$. Por lo cual, podemos enunciar el

Teorema 9.8. Un punto de una superficie es elíptico si y sólo si $K > 0$; hiperbólico, si y sólo si $K < 0$; parabólico o plano si y sólo si $K = 0$.

Ejemplo 9.10.

(a) El ejemplo 9.9(a) nos permite ver que en todos los puntos de una superficie esférica de radio a , la curvatura gaussiana es $K = \text{constante} = 1/a^2$. La curvatura media es $H = \pm 1/a$, de acuerdo con la orientación de la esfera.

(b) El ejemplo 9.9(b) nos permite ver que en todos los puntos de un plano la curvatura gaussiana es $K = 0$ y la curvatura media es $H = 0$.

(c) Consideremos el siguiente toro

$$\mathbf{x} = (b + a \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\sin \theta)\mathbf{e}_2 + (a \cos \phi)\mathbf{e}_3$$

De acuerdo con el ejemplo 9.5 de la página 189, tenemos: $E = (b + a \sin \phi)^2$, $F = 0$, $G = a^2$, $L = (b + a \sin \phi) \sin \phi$, $M = 0$, $N = a$. Según la ecuación (9.21), las curvaturas principales son las raíces de la siguiente ecuación

$$a^2(b + a \sin \phi)^2 \kappa^2 - [a(b + a \sin \phi)^2 + a^2(b + a \sin \phi) \sin \phi] \kappa + a(b + a \sin \phi) \sin \phi = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado, tenemos

$$\kappa = \frac{(b + 2a \sin \phi) \pm b}{2a(b + a \sin \phi)}$$

o sea, $\kappa_1 = \frac{2b + 2a \sin \phi}{2a(b + a \sin \phi)} = \frac{1}{a}$, que es la curvatura máxima, y $\kappa_2 = \frac{\sin \phi}{b + a \sin \phi}$ que es la curvatura mínima. Obsérvese que κ_1 es la misma en cualquier punto e igual a la curvatura de la circunferencia que engendra al toro. La curvatura mínima, κ_2 , varía de acuerdo con ϕ a lo largo de un meridiano. Esta alcanza su máximo, $1/(b + a)$ en el paralelo extremo exterior $\phi = \pi/2$; es nula en los paralelos $\phi = 0$ y $\phi = \pi$; y adopta su mínimo, $-1/(b - a)$, en el paralelo extremo interno, $\phi = -\pi/2$. La curvatura gaussiana es $K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{\sin \phi}{a(b + a \sin \phi)}$.

LINEAS DE CURVATURA

Supongamos nuevamente que P es un punto que pertenece a una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de una superficie de clase ≥ 2 . En el problema 9.24 de la página 209 demostraremos el

Teorema 9.9. Una dirección dada por $du : dv$ es dirección principal en P si y sólo si du y dv satisfacen la ecuación

$$(EM - LF) du^2 + (EN - LG) du dv + (FN - MG) dv^2 = 0 \quad (9.25)$$

En un punto que no sea umbilical, lo anterior se puede demostrar factorizando la expresión precedente en dos factores que serán ecuaciones lineales de la forma $Adu + Bdv = 0$ para el caso en que las dos direcciones principales sean perpendiculares.

Obsérvese que, como la curvatura normal κ_n de una curva es invariante, salvo el signo, se colige que las direcciones en las cuales κ_n adopta sus valores extremos, es decir, las direcciones principales, son también invariantes. En particular, si $\mathbf{x}^*(\theta, \phi)$ es cualquier otra carta que contenga a P , entonces $d\theta : d\phi$ define una dirección principal si y sólo si $d\theta = \theta_u du + \theta_v dv$ y $d\phi = \phi_u du + \phi_v dv$, en donde $du : dv$ es una dirección principal en P respecto de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$.

Ahora bien, toda curva de una superficie cuya tangente en cada punto se halla a lo largo de una dirección principal se denomina *línea de curvatura*. De esto se deduce que una curva es una línea de curvatura si y sólo si en cada punto la dirección de su tangente satisface la ecuación (9.25) para alguna carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ que contenga el punto. De aquí se colige que la (9.25) se puede considerar como una ecuación diferencial para dos familias de líneas de curvatura. De acuerdo con el teorema de existencia y unicidad relativo a ecuaciones diferenciales, existen las soluciones de (9.25) si los coeficientes son de clase C^1 . En esta forma tenemos el

Teorema 9.10. En la vecindad de un punto que no sea umbilical, perteneciente a una superficie de clase ≥ 3 , existen dos familias ortogonales de líneas de curvatura.

Ejemplo 9.11.

Consideremos la siguiente superficie

$$\mathbf{x} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + (u^2 + v^2)\mathbf{e}_3$$

Es posible calcular: $E = 1 + 4u^2$, $F = 4uv$, $G = 1 + 4v^2$, $L = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$, $M = 0$, $N = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$. Si el resultado obtenido al aplicar la (9.25) se divide por $-8(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$, tendremos

$$(u du + v dv)(v du - u dv) = 0, \text{ o sea}$$

$$u du + v dv = 0, \quad v du - u dv = 0$$

La solución de la primera ecuación es la familia de circunferencias $u^2 + v^2 = r^2$ y la solución de la segunda es la familia de rectas, $u = bv$, que pasan por el origen. Las imágenes de estas dos familias de curvas, sobre la superficie, son las líneas de curvatura, como se muestra en la figura 9-15. Obsérvese que en el origen, $u = 0$, $v = 0$, tenemos: $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 2$, $M = 0$, $N = 2$. Los primeros y segundos coeficientes fundamentales son proporcionales y tenemos un punto umbilical en el que todas las direcciones son principales.

Como consecuencia del teorema 9.10, si una superficie es suficientemente suave, es posible introducir, en las proximidades de un punto P que no sea umbilical, una carta local de clase C^2 tal que las curvas de parámetro u y las de parámetro v sean a la vez las líneas de curvatura. Sin embargo, en muchos problemas es suficiente tener una carta local de clase C^2 que contenga a P y tal que las curvas de parámetro u y las de parámetro v estén sencillamente en la dirección principal. En el problema 9.21 demostraremos el

Teorema 9.11. A todo punto P de una superficie de clase ≥ 2 corresponde una carta local que contenga a P y tal que las direcciones de las curvas de parámetro u y v en P sean direcciones principales.

Supongamos, ahora, que en un punto P no umbilical de una carta, las direcciones de las curvas de parámetro u y las de parámetro v son direcciones principales. Puesto que $\mathbf{x}_u =$

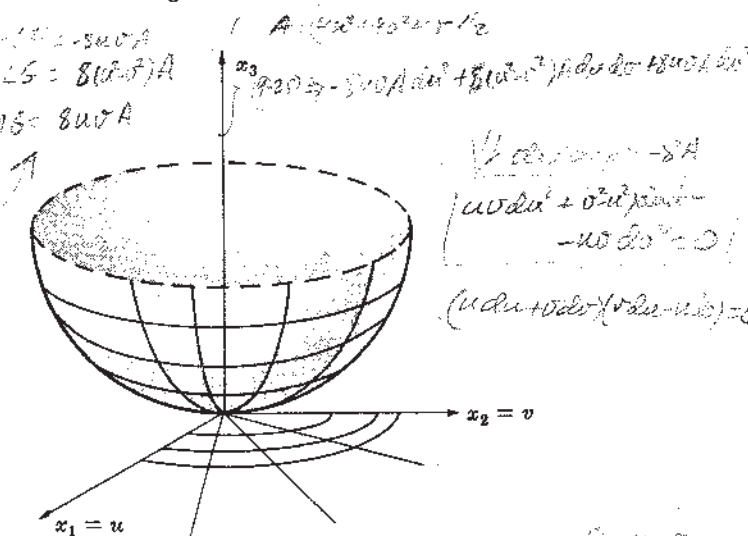


Fig. 9-15

$1x_u + 0x_v$ es tangente a las curvas de parámetro u y $x_v = 0x_u + 1x_v$ es tangente a las curvas de parámetro v , se infiere que en P , $du = 1$, $dv = 0$ y $du = 0$, $dv = 1$ deben satisfacer la ecuación (9.25). Al sustituir, hallamos que

$$FN - MG = 0 \quad \text{y} \quad EM - LF = 0$$

Recordemos, además, que en un punto no umbilical las direcciones principales son ortogonales. Por tanto, según el teorema 9.1 de la página 184, es $F = 0$ en P y en esta forma, $MG = EM = 0$. Por último, como I es definida positiva, es $E > 0$ y, por ello $M = 0$. De modo que $F = M = 0$ en P . La recíproca es también verdadera. Por lo tanto, podemos enunciar el

Teorema 9.12. Las direcciones de las curvas de parámetro u y de parámetro v en un punto no umbilical de una carta son las mismas direcciones principales si y sólo si $F = M = 0$ en dicho punto.

Como consecuencia de este teorema tenemos el

Corolario: Las curvas de parámetro u y las de parámetro v de una carta que no posea puntos umbilicales son líneas de curvatura si y sólo si en todos los puntos de la carta $F = M = 0$.

Si en un punto de una carta las direcciones de las curvas de parámetro u y de parámetro v son principales, las curvaturas principales pueden expresarse en forma sencilla. Para ver que es así, supongamos en primer lugar que P no es un punto umbilical. En ese caso, según el teorema 9.12, es $F = M = 0$ en P y las ecuaciones (9.20) que proporcionan las curvaturas y direcciones principales en P se reducen a $(L - \kappa E) du = 0$ y $(N - \kappa G) dv = 0$. Como $du = 1$, $dv = 0$ son los números directores de la curva de parámetro u que pasa por P , se deduce que la curvatura principal en esta dirección es $\kappa_1 = L/E$. La curvatura principal en la dirección de la curva de parámetro v es $\kappa_2 = N/G$ y se obtiene utilizando $du = 0$ y $dv = 1$. En segundo lugar, si P es un punto umbilical, en cualquier caso, según el teorema 9.7, $\kappa = L/E = M/F = N/G$. En esta forma, hemos demostrado el

Teorema 9.13. Si las direcciones de las curvas de parámetro u y de parámetro v en un punto P de una carta son principales, entonces las curvaturas principales en P vienen expresadas por

$$\kappa_1 = L/E \quad \text{y} \quad \kappa_2 = N/G$$

Corolario: Si las curvas de parámetro u y de parámetro v de una carta son líneas de curvatura, entonces todos los puntos de las curvaturas principales se expresan por

$$\kappa_1 = L/E \quad \text{y} \quad \kappa_2 = N/G$$

Ejemplo 9.12.

Consideremos la siguiente superficie

$$\mathbf{x} = ue_1 + ve_2 + (u^2 + v^2)e_3$$

Según el ejemplo 9.11, sus líneas de curvatura son las imágenes de las circunferencias $u^2 + v^2 = r^2$ y las rectas $u = bv$. Las líneas de curvatura pueden introducirse como líneas de parámetro por medio de la siguiente transformación de parámetros: $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$. Así, se llega a la siguiente representación

$$\mathbf{x} = (r \cos \theta)e_1 + (r \sin \theta)e_2 + r^2e_3, \quad r > 0$$

Es posible hacer el cálculo que conduzca a mostrar que en este caso, los primeros y segundos coeficientes fundamentales tienen la forma más sencilla: $E = r^2$, $F = 0$, $G = 1 + 4r^2$, $L = -2r^2(1 + 4r^2)^{-1/2}$, $M = 0$, $N = -2(1 + 4r^2)^{-1/2}$, y las curvaturas principales son: $\kappa_1 = L/E = -2(1 + 4r^2)^{-1/2}$ y $\kappa_2 = N/G = -2(1 + 4r^2)^{-3/2}$.

FORMULA DE RODRIGUEZ

Supongamos que $du : dv$ sea una dirección principal en un punto P de una carta y κ la curvatura principal correspondiente. Entonces, según las ecuaciones (9.10), (9.12) y (9.20), tendremos

$$(-N_u \cdot x_u - \kappa x_u \cdot x_u) du + (-N_v \cdot x_u - \kappa x_v \cdot x_u) dv = 0$$

$$(-N_u \cdot x_v - \kappa x_u \cdot x_v) du + (-N_v \cdot x_v - \kappa x_v \cdot x_v) dv = 0$$

o sea,

$$[(N_u du + N_v dv) + \kappa(x_u du + x_v dv)] \cdot x_u = 0$$

$$[(N_u du + N_v dv) + \kappa(x_u du + x_v dv)] \cdot x_v = 0$$

o sea,

$$(dN + \kappa dx) \cdot x_u = 0, \quad (dN + \kappa dx) \cdot x_v = 0$$

Pero, $dN + \kappa dx$ es paralelo al plano tangente en P pues dN y dx lo son; y los vectores x_u y x_v son independientes. Por tanto, $dN + \kappa dx = 0$, o sea $dN = -\kappa dx$. De modo que si la dirección de un vector dN es la misma de la dirección principal, ese vector es paralelo a dx y viene dado por $dN = -\kappa dx$, siendo κ la curvatura principal en esa dirección. El recíproco de esto se demostrará en el problema 9.23 de la página 209. Tenemos así el

Teorema 9.14. La dirección $du : dv$ es una dirección principal de un punto de una carta si y sólo si para algún escalar κ , $dN = N_u du + N_v dv$ y $dx = x_u du + x_v dv$ cumplen la igualdad

$$dN = -\kappa dx \quad (9.26)$$

Cuando esto ocurra, κ será la curvatura principal en la dirección $du : dv$.

La fórmula anterior, que caracteriza completamente las direcciones principales, se denomina *fórmula de Rodríguez*, y debería aprenderse de memoria.

LINEAS ASINTOTICAS. FAMILIAS CONJUGADAS DE CURVAS

Cualquier dirección en un punto de una carta, recibe el nombre de *dirección asintótica*, si

$$II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0 \quad (9.27)$$

Como $\kappa_n = II/I$ y I es definida positiva, las direcciones asintóticas son también las direcciones en las cuales $\kappa_n = 0$. En un punto elíptico no existen direcciones asintóticas; en un punto hiperbólico existen dos direcciones asintóticas diferentes; en un punto parabólico existe una dirección asintótica, y, en un punto plano, todas las direcciones son asintóticas.

Toda curva de una superficie que sea tangente a una dirección asintótica en cualquier punto, se denomina *línea asintótica*. En esta forma, una curva de una superficie es una línea asintótica si y sólo si la dirección de la tangente a la curva en cada punto satisface a (9.27) para alguna carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ que contenga el punto. En un punto hiperbólico, esta ecuación tiene dos factores, reales y diferentes, de la forma $Adu + Bdv = 0$ que pueden considerarse como las ecuaciones diferenciales de primer orden de las líneas asintóticas. Al igual que en el caso de las líneas de curvatura, tenemos el

Teorema 9.15. En un entorno de un punto hiperbólico de una superficie de clase ≥ 3 existen dos diferentes familias de líneas asintóticas.

Si las curvas de parámetro u y de parámetro v de un sector son, además líneas asintóticas, entonces, en cada punto la ecuación (9.27) deberá satisfacerse cuando $du = 1$, $dv = 0$ y $du = 0$, $dv = 1$. Por tanto, $L = N = 0$. El recíproco es también verdadero. De ello sacamos el

Teorema 9.16. Las curvas de parámetro u y las de parámetro v de una carta, son líneas asintóticas si y sólo si en cualquier punto suyo, es $L = N = 0$.

Ejemplo 9.13.

Consideremos la siguiente superficie

$$\mathbf{x} = (r \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (r \sin \theta) \mathbf{e}_2 + (\log r) \mathbf{e}_3, \quad r > 0$$

Haciendo los cálculos a que haya lugar se ve que

$$L = -r/(1+r^2)^{1/2}, \quad M = 0, \quad N = 1/r(1+r^2)^{1/2}$$

Al multiplicar la (9.27) por $(1+r^2)^{1/2}$ se obtiene la ecuación diferencial $-rd\theta^2 + dr^2/r = 0$ o $d\theta + dr/r = 0$, $d\theta - dr/r = 0$. Esta tiene la solución $\theta + u = \log r$ y $\theta + v = -\log r$, en donde u y v son las constantes de integración. Las imágenes de estas curvas sobre la superficie, son dos familias de líneas asintóticas. Si se resuelven las ecuaciones para θ y r en función de u y v se tiene: $\theta = -(u+v)/2$, $r = e^{(u-v)/2}$. Entonces

$$\mathbf{x} = e^{(u-v)/2} (\cos \frac{1}{2}(u+v)) \mathbf{e}_1 + e^{(u-v)/2} (\sin \frac{1}{2}(u+v)) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(u-v) \mathbf{e}_3$$

que es una parametrización de la superficie por medio de líneas asintóticas.

Recordemos, ahora, que, en cualquier punto de una curva de una carta, la curvatura normal es

$$\kappa_n = \mathbf{II}/\mathbf{I} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N}$$

siendo \mathbf{k} el vector curvatura de la curva. Concluimos, pues, que una curva es una línea asintótica si y sólo si en cualquier punto suyo es $\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = 0$; es decir, si y sólo si es $\mathbf{k} = 0$, o si \mathbf{k} es perpendicular a \mathbf{N} . En esta forma, tenemos el

Teorema 9.17. Una curva de una superficie es una línea asintótica si y sólo si todo punto de la curva es de inflexión ($\mathbf{k} = 0$), o si el plano osculador en el punto es tangente a la superficie.

Puesto que a todo lo largo de una recta es $\mathbf{k} = 0$, tenemos el

Corolario: Toda recta de una superficie es una línea asintótica.

Para los casos de líneas asintóticas, diferentes de las rectas, en el problema 9.30 de la página 211, demostraremos el

Teorema 9.18. (Beltrami-Enneper). En cualquier punto de una línea asintótica, que no sea una recta, la torsión cumple la condición

$$\tau^2 = -K$$

en donde K es la curvatura gaussiana en el punto considerado.

Se dice que una dirección $\delta u : \delta v$ en un punto de una carta es conjugada de la dirección $du : dv$ si

$$dx \cdot \delta N = 0 \quad (9.28)$$

en donde $dx = x_u du + x_v dv$ y $\delta N = N_u \delta u + N_v \delta v$. Al desarrollar, utilizando la (9.10), encontramos que la expresión anterior es equivalente a la siguiente

$$L du \delta u + M(du \delta v + dv \delta u) + N dv \delta v = 0 \quad (9.29)$$

Observación. Debido a la simetría, se deduce que $du : dv$ es también conjugada de $\delta u : \delta v$, de modo que podemos hablar de las direcciones conjugadas $du : dv$ y $\delta u : \delta v$. Obsérvese, además, que una dirección asintótica es conjugada de sí misma.

Si se da una dirección arbitraria, $du : dv$, entonces la expresión (9.29) es la ecuación lineal

$$(L du + M dv) \delta u + (M du + N dv) \delta v = 0$$

en $\delta u : \delta v$. En el problema 9.29 se demostrará que esta ecuación tiene la solución, única, $\delta u : \delta v$, si $LN - M^2 \neq 0$. Tenemos, pues, el

Teorema 9.19. En un punto elíptico o hiperbólico de una superficie, cada dirección tiene una única dirección conjugada.

Se dice que dos familias de curvas de una superficie son familias conjugadas de curvas, si en cada punto las direcciones de sus tangentes son conjugadas. Dada, en el plano de parámetros, una familia de curvas $f(u, v) = C_1$ de un solo parámetro, la ecuación (9.29) se puede considerar como una ecuación diferencial de primer orden de una familia conjugada $g(u, v) = C_2$.

Si las curvas de parámetro u y las de parámetro v de una carta son a la vez familias de curvas conjugadas, entonces, en cada punto, los valores $du = 1$, $dv = 0$ y $\delta u = 0$, $\delta v = 1$, deben satisfacer la ecuación (9.29). Sustituidos tales valores en (9.29) se tiene que $M = 0$. La recíproca es también verdadera. Es decir, llegamos al

Teorema 9.20. Las curvas de parámetro u y las de parámetro v de una carta son familias conjugadas de curvas si y sólo si en cada punto es $M = 0$.

Obsérvese que, como consecuencia de este teorema y del corolario del teorema 9.12, se tiene el

Corolario: Las curvas de parámetro u y las de parámetro v , pertenecientes a una carta que carezca de puntos umbilicales, son familias conjugadas y ortogonales de curvas si y sólo si son líneas de curvatura.

Ejemplo 9.14.

Consideremos la siguiente superficie (véase el ejemplo 9.11)

$$\mathbf{x} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 + (u^2 + v^2) \mathbf{e}_3$$

En este caso, $L = N = 2(u^2 + v^2 + 1)^{-1/2}$, $M = 0$. Obsérvese que la superficie ya ~~quede~~ representada por familias conjugadas de curvas de parámetros, pues siempre es $M = 0$. Consideremos, ahora, la familia de curvas pertenecientes al plano de los parámetros y que viene dada por $f(u, v) = u^2 + v^2 = C_1^2$. Como es $df = f_u du + f_v dv = 2u du + 2v dv = 0$, entonces tenemos que $du : dv = f_v : -f_u = -v : u$. Utilizando la (9.29) y dividiendo por $2(1 + u^2 + v^2)^{-1/2}$ se llega a la ecuación $-v \delta u + u \delta v = 0$, cuyas soluciones son los miembros de la familia de rectas $u = C_2 v$. Las dos familias de curvas $u^2 + v^2 = C_1^2$ y $u = C_2 v$ definen en la superficie dos familias conjugadas de curvas que son, en realidad, las líneas de curvatura.

Problemas resueltos

PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL. LONGITUD DE ARCO.

AREA DE SUPERFICIE

9.1. Demostrar que la primera forma fundamental sobre la superficie de revolución siguiente

$$\mathbf{x} = f(t)(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + f(t)(\sin \theta) \mathbf{e}_2 + g(t) \mathbf{e}_3,$$

es

$$\mathbf{I} = f^2 d\theta^2 + (f'^2 + g'^2) dt^2$$

$$\mathbf{x}_\theta = -(f \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (f \cos \theta) \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_t = (f' \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (f' \sin \theta) \mathbf{e}_2 + g' \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = f^2, \quad \mathbf{F} = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_t = 0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{x}_t = f'^2 + g'^2$$

de lo cual se deduce el resultado que se buscaba.

9.2. Hallar la longitud del arco $u = e^{\theta(\cot \beta)/\sqrt{2}}$, $\theta = \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $\beta =$ constante sobre el cono descrito por

$$\mathbf{x} = (u \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (u \sin \theta) \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = u^2, \quad \mathbf{F} = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_u = 0, \quad \mathbf{G} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 2, \quad du/d\theta = u(\cot \beta)/\sqrt{2}, \quad d\theta/d\theta = 1.$$

$$S = \int_0^\pi \left[E \left(\frac{d\theta}{d\theta} \right)^2 + 2F \frac{d\theta}{d\theta} \frac{du}{d\theta} + G \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta$$

$$= \int_0^\pi [u^2 + (\cot^2 \beta) u^2]^{1/2} d\theta = \sqrt{1 + \cot^2 \beta} \int_0^\pi u d\theta$$

$$= \sqrt{1 + \cot^2 \beta} \int_0^\pi e^{\theta(\cot \beta)/\sqrt{2}} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{\cos \beta} (e^{\pi(\cot \beta)/\sqrt{2}} - 1)$$

que es el resultado que se requería.

9.3. Demostrar que la curva del problema 9.2 corta las rectas generatrices, $\theta = \text{constante}$, del cono bajo un ángulo constante β .

$$\cos \angle \left(\frac{dx}{d\theta}, x_u \right) = \frac{(dx/d\theta) \cdot x_u}{|dx/d\theta| |x_u|} = \frac{(x_\theta(d\theta/d\theta) + x_u(du/d\theta)) \cdot x_u}{|x_\theta(d\theta/d\theta) + x_u(du/d\theta)| |x_u|} = \frac{F + G(du/d\theta)}{\sqrt{E + F(du/d\theta) + G(du/d\theta)^2} \sqrt{G}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(du/d\theta)}{\sqrt{u^2 + 2(du/d\theta)^2}} = \frac{u \cot \beta}{\sqrt{u^2 + u^2 \cot^2 \beta}} = \frac{\cot \beta}{\sqrt{1 + \cot^2 \beta}} = \cos \beta$$

que era lo que se quería demostrar.

9.4. Si la primera forma fundamental de una carta es de la forma $I = du^2 + f(u, v) dv^2$, demostrar que las curvas de parámetro v determinan segmentos iguales sobre las curvas de parámetro u . Obsérvese que, por ser $F = 0$, las curvas de parámetros son, además, ortogonales. En este caso, se dice que las curvas de parámetro v son *paralelas*, como se ve en la figura 9-16.

La distancia sobre una curva de parámetro u ($u = u_1$, $v = v_0$), tomada entre $u = u_1$ y $u = u_2$, $u_1 < u_2$, es

$$d = \int_{u_1}^{u_2} [(du/du)^2 + f(u, v_0)(dv/du)^2]^{1/2} du$$

Como $du/du = 1$ y $dv/du = 0$, tenemos

$$d = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

lo cual demuestra que d es la misma para todo $v = v_0$.

9.5. Demostrar que si una superficie está representada por $f(x_1, x_2, x_3) = C$, tenemos que $f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0$, en donde $dx = (dx_1, dx_2, dx_3)$ es cualquier vector tangente a la superficie en $P(x_1, x_2, x_3)$.

Supongamos que $x = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3$ es una curva regular de la superficie y que pasa por $P(x_1, x_2, x_3)$. Entonces, para todo t , $f(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = C$. Por tanto, $df/dt = f_{x_1}(dx_1/dt) + f_{x_2}(dx_2/dt) + f_{x_3}(dx_3/dt) = 0$. O sea, si $dx = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3$ es cualquier vector perteneciente al plano tangente en P , entonces $f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0$.

9.6. Demostrar que la transformación de parámetros $u = \sinh t$, $\phi = \theta$, $-\infty < t < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$, entre los puntos pertenecientes al plano de los parámetros de la superficie de revolución M_1 , dada por

$$x = (\cosh t \cos \theta)e_1 + (\cosh t \sin \theta)e_2 + te_3, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

y los puntos del plano de los parámetros de la conoide recta M_2 , dada por

$$y = (u \cos \phi)e_1 + (u \sin \phi)e_2 + \phi e_3, \quad 0 < \phi < 2\pi$$

determina una correspondencia inyectiva entre los puntos de las superficies, tal que las primeras formas fundamentales concuerdan sobre vectores correspondientes.

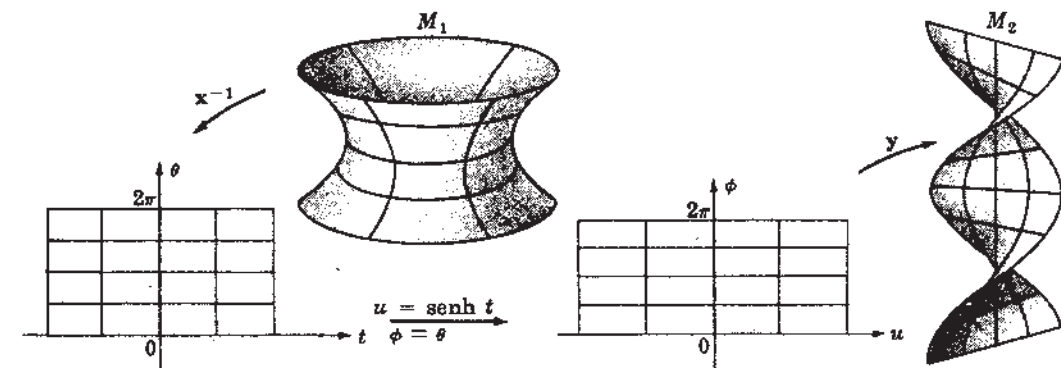


Fig. 9-17

Como x y y son aplicaciones inyectivas de sus respectivos dominios sobre las superficies M_1 y M_2 y $u = \sinh t$, $\phi = \theta$, define una correspondencia inyectiva entre los dominios, se deduce que la aplicación compuesta x^{-1} , seguida por la $u = \sinh t$, $\phi = \theta$, y luego seguida por la y , es una aplicación inyectiva de la superficie M_1 sobre la M_2 .

Ahora, bien, en el punto $x(t, \theta)$ de M_1 tenemos: $E = x_\theta \cdot x_\theta = \cosh^2 t$, $F = x_\theta \cdot x_t = 0$, $G = x_t \cdot x_t = \cosh^2 t$ e $I = \cosh^2 t(d\theta^2 + dt^2)$. En el punto $y(u, \phi)$ de M_2 , $E^* = y_\phi \cdot y_\phi = u^2 + 1$, $F^* = y_\phi \cdot y_u = 0$, $G^* = y_u \cdot y_u = 1$ e $I^* = (u^2 + 1)d\phi^2 + du^2$; pero, $u = \sinh t$, $\phi = \theta$, $d\phi = d\theta$, $du = \cosh t dt$. Por tanto

$$I^* = (\sinh^2 t + 1)d\theta^2 + \cosh^2 t dt^2 = \cosh^2 t(d\theta^2 + dt^2) = I$$

que es el resultado que se buscaba.

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

9.7. Demostrar que la siguiente superficie

$$x = ue_1 + ve_2 + (u^2 + v^2)e_3$$

es elíptica si $v > 0$, hiperbólica si $v < 0$, y parabólica si $v = 0$.

$$x_u = e_1 + 2ue_3, \quad x_v = e_2 + 2ve_3$$

$$N = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = (4u^2 + 9v^4 + 1)^{-1/2} (-2ue_1 - 3ve_2 + e_3)$$

$$x_{uu} = 2e_3, \quad x_{uv} = 0, \quad x_{vv} = 6ve_3$$

$$L = x_{uu} \cdot N = 2(4u^2 + 9v^4 + 1)^{-1/2}, \quad M = x_{uv} \cdot N = 0$$

$$N = x_{vv} \cdot N = 6v(4u^2 + 9v^4 + 1)^{-1/2}, \quad LN - M^2 = \frac{12v}{(4u^2 + 9v^4 + 1)}$$

Como quiera que $(4u^2 + 9v^4 + 1) > 0$ para todo (u, v) , tenemos que $LN - M^2 > 0$ si $v > 0$, $LN - M^2 < 0$ si $v < 0$, y $LN - M^2 = 0$ si $v = 0$. De esta suerte, la superficie es elíptica para valores de $v > 0$, hiperbólica para $v < 0$, y parabólica si $v = 0$, porque es $L \neq 0$ para cualquier (u, v) .

9.8. Demostrar que la superficie del problema 9.7 se halla en ambos lados del plano tangente en cualquier entorno del punto parabólico $P(0, 0)$.

En $u = 0$, $v = 0$ tenemos que $x_u = e_1$ y $x_v = e_2$; en consecuencia, el plano tangente en $P(0, 0)$ es el plano coordenado $x_3 = 0$. La curva $u = 0$, de parámetro v , es la cúbica $x = ve_2 + v^3e_3$ que tiene ramas a ambos lados del plano tangente a ella en cualquier entorno de $P(0, 0)$, como se muestra en la figura 9-18.

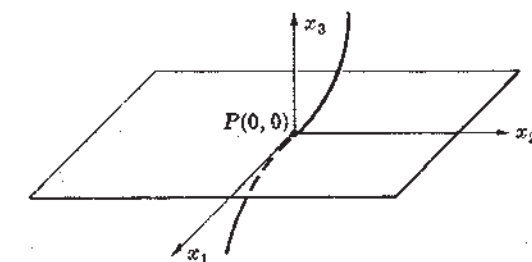


Fig. 9-18

9.9. Demostrar que todos los puntos de la superficie tangente a una curva son parabólicos.

La superficie tangente a la curva $y = y(s)$, es $x = y(s) + ut(s)$. En este caso,

$$x_s = \dot{y} + u\dot{t} = t + u\kappa n, \quad x_u = t$$

$$N = \frac{x_u \times x_s}{|x_u \times x_s|} = \frac{u\kappa b}{|u\kappa|}, \quad x_{ss} = \dot{t} + u\kappa\dot{n} + u\dot{\kappa}n = -u\kappa^2 t + (u\dot{\kappa} + \kappa)n + u\kappa\tau b$$

$$x_{su} = \dot{t} = \kappa n, \quad x_{uu} = 0, \quad L = x_{ss} \cdot N = |u\kappa|\tau, \quad M = x_{su} \cdot N = 0, \quad N = x_{uu} \cdot N = 0$$

Por lo tanto, en cualquier punto es $LN = M^2 = 0$, que es el resultado esperado.

9.10. Demostrar que cualquier punto de la siguiente superficie de revolución

$$x = f(t)(\cos \theta)e_1 + f(t)(\sin \theta)e_2 + te_3, \quad f(t) > 0$$

es parabólico si y sólo si la superficie es un cilindro circular $f = a$, o un cono $f = at + b$, siendo $a = \text{constante} \neq 0$, $b = \text{constante}$.

Se puede calcular que $L = \frac{-f}{[1+f'^2]^{1/2}}$, $M = 0$, $N = \frac{f''}{[1+f'^2]^{1/2}}$. Por tanto

$$LN - M^2 = \frac{-ff''}{1+f'^2}$$

Puesto que $f > 0$, $LN - M^2 = 0$ si y sólo si $f'' = 0$. Es decir, si y sólo si es $f = a \neq 0$, o es $f = at + b$, $a \neq 0$, con lo cual se completa la demostración.

9.11. Demostrar que, en un entorno de un punto elíptico, una superficie se halla toda ella en una de las caras del plano tangente.

Sean, $P = x(u, v)$ un punto elíptico y $Q = x(u + du, v + dv)$ un punto vecino de P . Recordemos que $d = PQ \cdot N = \frac{1}{2}II + o(du^2 + dv^2)$, en donde $\frac{1}{2}II = \frac{1}{2}(L du^2 + 2M du dv + N dv^2)$ es un paraboloides elíptico en (du, dv) que conserva el mismo signo para todo (du, dv) , y es igual a cero si y sólo si $du = 0$, $dv = 0$. Sin que se pierda generalidad, podemos suponer que $\frac{1}{2}II \geq 0$. Convergamos ahora que $du = r \cos \theta$, $dv = r \sin \theta$ y consideremos la siguiente magnitud

$$\frac{1}{2} \frac{II}{du^2 + dv^2} = \frac{1}{2} \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{du^2 + dv^2} = \frac{1}{2} (L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta)$$

Pero, esto es precisamente $\frac{1}{2}II$ avaluado en la circunferencia unitaria $du = \cos \theta$, $dv = \sin \theta$. Como $\frac{1}{2}II$ es continua y mayor que cero en la circunferencia, entonces $\frac{1}{2}II/(du^2 + dv^2)$ alcanza un valor mínimo $m > 0$. Escojamos, ahora, un ϵ tal que $\frac{o(du^2 + dv^2)}{du^2 + dv^2} < m$ para $du^2 + dv^2 < \epsilon^2$. Pero, entonces será

$$\frac{d}{du^2 + dv^2} = \frac{1}{2} \frac{II}{du^2 + dv^2} + \frac{o(du^2 + dv^2)}{du^2 + dv^2} > 0 \quad \text{para } 0 < du^2 + dv^2 < \epsilon^2$$

En consecuencia, $d > 0$, o sea que Q está situada en la misma cara del plano tangente para $du^2 + dv^2 < \epsilon^2$, con lo cual queda completa la demostración.

CURVATURA NORMAL, CURVATURA GAUSIANA Y CURVATURA MEDIA

9.12. Hallar el vector curvatura normal, k_n , y la curvatura normal, κ_n , de la curva $u = t^2$, $v = t$, de la superficie $x = ue_1 + ve_2 + (u^2 + v^2)e_3$ en el punto $t = 1$.

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = 4uv, \quad G = 1 + 4v^2, \quad N = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}(-2ue_1 - 2ve_2 + e_3), \quad L = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}, \quad M = 0, \quad N = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}, \quad du/dt = 2t, \quad dv/dt = 1.$$

En $t = 1$: $u = 1$, $v = 1$, $E = 5$, $F = 4$, $G = 5$, $N = -1/3[2e_1 + 2e_2 - e_3]$, $L = 2/3$, $M = 0$, $N = 2/3$, $du/dt = 2$, $dv/dt = 1$. Y en consecuencia

$$\kappa_n = \frac{L(du/dt)^2 + 2M(du/dt)(dv/dt) + N(dv/dt)^2}{E(du/dt)^2 + 2F(du/dt)(dv/dt) + G(dv/dt)^2} = \frac{10}{123}$$

y $k_n = \kappa_n N = -\frac{10}{369}[2e_1 + 2e_2 - e_3]$, que es el resultado que se requería.

9.13. Sea L una recta tangente a una superficie en un punto P , en una dirección en la que $\kappa_n \neq 0$ (o sea, una dirección que no sea asintótica). Demostrar que los círculos osculadores de todas las curvas que pasan por P y son tangentes a L están situados sobre una esfera.

Sea C una curva tangente a L en P . Como $\kappa_n = k \cdot N \neq 0$, se desprende que $k \neq 0$ y entonces se puede escribir: $\kappa_n = \kappa(n \cdot N) = \kappa \cos \alpha$, en donde, al escoger a N de modo que sea $\kappa_n > 0$ y n esté en la dirección de k , se tendrá que $\kappa_n > 0$, $\kappa > 0$, y $0 \leq \alpha = \angle(n, N) \leq \pi/2$. Supongamos, ahora, que $\rho = 1/\kappa$, $R = 1/\kappa_n$; entonces, $\rho = R \cos \alpha$, siendo $R = \text{constante}$ y el radio de curvatura del círculo osculador de C . De aquí se desprende que el círculo osculador es la intersección del plano osculador con la esfera de radio R , tangente al plano tangente en P , como lo muestra la figura 9-19. Y este es el resultado que se esperaba.

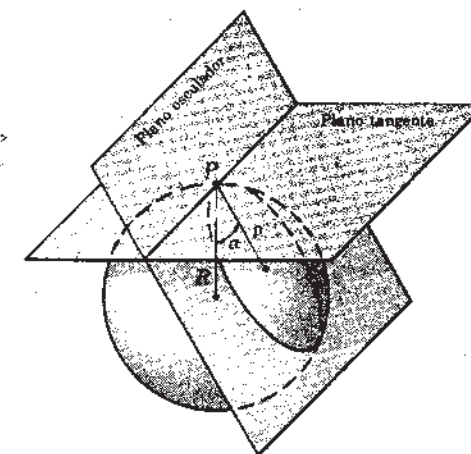


Fig. 9-19

9.14. Demostrar que el discriminante de la ecuación

$$(EG - F^2)\kappa^2 - (EN + GL - 2FM)\kappa + (LN - M^2) = 0$$

es mayor o igual que cero; e igual a cero si y sólo si $L/E = M/F = N/G$.

El discriminante es: $(EN + GL - 2FM)^2 - 4(EG - F^2)(LN - M^2)$, que, como puede demostrarse, es idénticamente igual a

$$4 \left(\frac{EG - F^2}{E^2} \right) (EM - FL)^2 + \left[EN - GL - \frac{2F}{E}(EM - FL) \right]^2$$

Por tanto, el discriminante es mayor que cero o igual a cero. Como es $EG - F^2 > 0$, la expresión anterior es igual a cero si y sólo si $EM - FL = 0$ y $EN - GL - \frac{2F}{E}(EM - FL) = 0$, o, también, si y sólo si $EM - FL = 0$ y $EN - GL = 0$, o, también, si y sólo si $L/E = M/F = N/G$.

9.15. Demostrar que en cada punto P de una superficie existe un paraboloides tal que la curvatura normal de la superficie en P y en cualquier dirección, es la misma del paraboloides.

Supongamos que la superficie se traslada y se gira de tal modo que P queda en el origen y el plano tangente es el x_1x_2 . En ese caso, se puede representar un entorno de P bajo la forma

$$x = ue_1 + ve_2 + f(u, v)e_3$$

en donde, $x(0, 0) = 0$, $x_u(0, 0) = e_1$, $x_v(0, 0) = e_2$. Según el teorema de Taylor,

$$x = ue_1 + ve_2 + \frac{1}{2}(au^2 + 2buv + cv^2)e_3 + o(u^2 + v^2)$$

donde $x_{uu}(0, 0) = ae_3$, $x_{uv}(0, 0) = be_3$, y $x_{vv}(0, 0) = ce_3$, $N(0, 0) = e_3$, y de aquí $\kappa_n = \frac{a du^2 + 2b du dv + c dv^2}{du^2 + dv^2}$. La superficie que se representa por la siguiente aproximación

$$x^* = ue_1 + ve_2 + \frac{1}{2}(au^2 + 2buv + cv^2)e_3$$

es un paraboloides, tangente al plano x_1x_2 en $u = 0$, $v = 0$ y tal que $\kappa_n^* = \kappa_n$, que es el resultado que se buscaba.

9.16. Demostrar el teorema 9.5, a saber: Demostrar que κ_0 es una curvatura principal, de dirección principal $du_0 : dv_0$, si y sólo si κ_0 , du_0 , dv_0 satisfacen las siguientes ecuaciones

$$(L - \kappa_0 E) du_0 + (M - \kappa_0 F) dv_0 = 0$$

$$(M - \kappa_0 F) du_0 + (N - \kappa_0 G) dv_0 = 0$$

Supongamos que κ_0 sea una curvatura principal, asociada a la dirección principal $du_0 : dv_0$. Recordemos que las curvaturas principales son los valores máximos o mínimos de la curvatura normal κ_n . De modo que, si

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

alcanza un máximo o un mínimo κ_0 en (du_0, dv_0) , entonces, de acuerdo con el cálculo, se tienen las derivadas parciales

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial du} \Big|_{(du_0, dv_0)} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \kappa_n}{\partial dv} \Big|_{(du_0, dv_0)} = 0$$

o, efectuando las derivaciones,

$$\frac{I II_{du} - II I_{du}}{I^2} \Big|_{(du_0, dv_0)} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{I II_{dv} - II I_{dv}}{I^2} \Big|_{(du_0, dv_0)} = 0$$

Multiplicando por I , se tiene

$$II_{du} - \frac{II}{I} I_{du} \Big|_{(du_0, dv_0)} = 0 \quad \text{y} \quad II_{dv} - \frac{II}{I} I_{dv} \Big|_{(du_0, dv_0)} = 0$$

Pero, $(II/I)|_{(du_0, dv_0)} = \kappa_n|_{(du_0, dv_0)} = \kappa_0$. Por tanto,

$$(II_{du} - \kappa_0 I_{du})|_{(du_0, dv_0)} = 0 \quad \text{y} \quad (II_{dv} - \kappa_0 I_{dv})|_{(du_0, dv_0)} = 0$$

Como $II_{du} = 2L du + 2M dv$, e $I_{du} = 2E du + 2F dv$, etc., entonces

$$(L du_0 + M dv_0) - \kappa_0 (E du_0 + F dv_0) = 0 \quad \text{y} \quad (M du_0 + N dv_0) - \kappa_0 (F du_0 + G dv_0) = 0$$

lo cual proporciona el resultado que se buscaba. Recíprocamente, supongamos ahora que $\kappa_0, du_0, dv_0, du_0^2 + dv_0^2 \neq 0$, satisfacen las ecuaciones (a) anteriores. Entonces, κ_0 juntamente con las curvaturas principales deben satisfacer el siguiente determinante

$$\det \begin{pmatrix} L - \kappa_0 E & M - \kappa_0 F \\ M - \kappa_0 F & N - \kappa_0 G \end{pmatrix} = 0$$

o, su desarrollo

$$(EG - F^2)\kappa_0^2 - (EN + GL - 2FM)\kappa_0 + (LN - M^2) = 0 \quad (b)$$

Supongamos, ahora, que P es un punto umbilical en el que la curvatura sea κ . Puesto que κ se toma en cualquier dirección, los coeficientes de (a) deberán ser todos iguales a cero, es decir, $\kappa = E/L = M/F = N/G$. Pero, en este caso, del problema 9.14 se desprende que la ecuación (b) tiene una sola raíz con grado de multiplicidad igual a dos, y por ello es $\kappa = \kappa_0$. En esta forma κ_0 es la curvatura principal y cualquier dirección, incluyendo la $du_0 : dv_0$, es una dirección principal. Si P es un punto umbilical, entonces κ_0 debe ser una de las dos raíces, diferentes, de (b), vale decir, una de las dos curvaturas principales en un punto que no es umbilical, cuya dirección principal sea $du_0 : dv_0$. Esto demuestra el teorema.

→ Ver ahora ya el problema 9.16

9.17. Demostrar que la curvatura κ en un punto P de la curva C de intersección de dos superficies, satisface la ecuación

$$\kappa^2 \sin^2 \alpha = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 \cos \alpha$$

siendo κ_1 y κ_2 las curvaturas normales de las superficies en la dirección de C en P , y α el ángulo que forman en P las normales a las superficies.

De acuerdo con la ecuación (9.15) de la página 190, se tiene que

$$\kappa_1 N_2 = \kappa(n \cdot N_1)N_2 \quad \text{y} \quad \kappa_2 N_1 = \kappa(n \cdot N_2)N_1$$

Sustrayendo la segunda de la primera y utilizando la identidad vectorial del teorema 1.8 de la página 11, tendremos

$$\kappa_1 N_2 - \kappa_2 N_1 = \kappa[(n \cdot N_1)N_2 - (n \cdot N_2)N_1] = \kappa(N_1 \times N_2) \times n$$

Utilizando la identidad [F], de la página 11, se deduce, además, que

$$(\kappa_1 N_2 - \kappa_2 N_1) \cdot (\kappa_1 N_2 - \kappa_2 N_1) = \kappa^2[(N_1 \times N_2) \times n] \cdot [(N_1 \times N_2) \times n]$$

$$(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 \cos \alpha) = \kappa^2 \sin^2 \alpha$$

$$= \kappa^2[(N_1 \times N_2) \cdot (N_1 \times N_2) - ((N_1 \times N_2) \cdot n)^2]$$

$$= \kappa^2(N_1 \times N_2) \cdot (N_1 \times N_2)$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $N_1 \times N_2$ es un vector paralelo a la tangente a la curva y, por tanto, $(N_1 \times N_2) \cdot n = 0$. Desarrollando se tiene

$$\kappa_1^2(N_2 \cdot N_2) - 2\kappa_1 \kappa_2(N_1 \cdot N_2) + \kappa_2^2(N_1 \cdot N_1) = \kappa^2|N_1 \times N_2|^2$$

o sea,

$$\kappa_1^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 \cos \alpha + \kappa_2^2 = \kappa^2 \sin^2 \alpha$$

9.18. Demostrar que en cada punto de una carta, se tiene que

$$N_u \times N_v = K(x_u \times x_v)$$

siendo K la curvatura gaussiana en el punto.

Como N es una función de longitud unidad, N_u y N_v son ortogonales a N y, en consecuencia, paralelos al plano tangente. De esto se deduce que podemos escribir $N_u = ax_u + bx_v$ y $N_v = cx_u + dx_v$, en donde hay que determinar a, b, c, d . Obsérvese que

$$N_u \times N_v = (ax_u + bx_v) \times (cx_u + dx_v) = (ad - bc)(x_u \times x_v)$$

En esta forma, sólo falta demostrar que

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = K$$

Por lo anterior y de acuerdo con la (9.10), tenemos que

$$x_u \cdot N_u = ax_u \cdot x_u + bx_u \cdot x_v = aE + bF = -L$$

Análogamente,

$$x_v \cdot N_u = aF + bG = -M$$

$$x_u \cdot N_v = cE + dF = -M$$

$$x_v \cdot N_v = cF + dG = -N$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como el siguiente producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix}$$

o sea,

$$ad - bc = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K$$

y con esto se completa la demostración.

LINEAS DE CURVATURA

9.19. Determinar las direcciones principales de $x = ue_1 + ve_2 + (u^2 + v^2)e_3$ en $u = 1$, $v = 1$ y verificar la fórmula de Rodríguez en cada dirección.

Según el ejemplo 9.11, se tiene: $E = 1 + 4u^2$, $F = 4uv$, $G = 1 + 4v^2$, $L = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$, $M = 0$, $N = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$. En $u = 1$, $v = 1$, tenemos: $E = 5$, $F = 4$, $G = 5$, $L = 2/3$, $M = 0$, $N = 2/3$. De acuerdo con la ecuación (9.25) de la página 196, las direcciones principales en $u = 1$, $v = 1$ son las soluciones de la siguiente ecuación

$$-\frac{8}{3}du^2 + \frac{8}{3}dv^2 = 0, \quad \text{o sea} \quad (du + dv)(du - dv) = 0$$

En consecuencia, $du_1 : dv_1 = 1 : -1$, y, $du_2 : dv_2 = 1 : 1$. Además, tenemos

$$x_u = e_1 + 2ue_3, \quad x_v = e_2 + 2ve_3$$

$$N = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}(-2ue_1 - 2ve_2 + e_3)$$

$$N_u = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-3/2} [-(8u^2 + 2)e_1 + 8uve_2 - 4ue_3]$$

$$N_v = (4u^2 + 4v^2 + 1)^{-3/2} [8uve_1 - (8v^2 + 2)e_2 - 4ve_3]$$

$$N_u = \frac{1}{27}(-10e_1 + 8e_2 - 4e_3), \quad N_v = \frac{1}{27}(8e_1 - 10e_2 - 4e_3)$$

$$dN_1 = N_u du_1 + N_v dv_1 = \frac{1}{27}(-18e_1 + 18e_2) = -\frac{18}{27}(e_1 - e_2), \quad dx_1 = x_u du_1 + x_v dv_1 = e_1 - e_2$$

$$\text{Así, pues, } dN_1 = -\frac{18}{27} dx_1. \text{ Además,}$$

$$dN_2 = N_u du_2 + N_v dv_2 = \frac{1}{27}[-2e_1 - 2e_2 - 8e_3] = -\frac{2}{27}[e_1 + e_2 + 4e_3]$$

$$dx_2 = x_u du_2 + x_v dv_2 = e_1 + e_2 + 4e_3$$

Por tanto, $dN_2 = -\frac{2}{27} dx_2$, y, en esta forma, se verifica la fórmula de Rodríguez.

9.20. Demostrar que las soluciones de la ecuación $A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0$ forman familias ortogonales de curvas, en una carta, si y sólo si $EC - 2FB + GA = 0$.

Supongamos que

$$A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = (A' du + B' dv)(C' du + D' dv)$$

Entonces, una de las familias de curvas es la solución de $A' du + B' dv = 0$ y la otra es, por ejemplo, la solución de $C' du + D' dv = 0$. A todo lo largo de la primera, es $du : dv = B' : -A'$; y, a lo largo de la segunda, es $du : dv = D' : -C'$. Pero, de acuerdo con el teorema 9.1 de la página 184, las familias son ortogonales si y sólo si

$$E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v = EB'D' - F(B'C' + D'A') + GA'C' = EC - 2FB + GA = 0$$

9.21. Demostrar el teorema 9.11, a saber: Demostrar que si P es un punto de una superficie de clase ≥ 2 , entonces existe una carta local que contiene a P y tal que las direcciones de las líneas de parámetros son direcciones principales.

Basta considerar el caso en que P no sea un punto umbilical. Porque si lo fuera, cualquier dirección sería una dirección principal y cualquier carta que contenga a P , sería suficiente para verificar la proposición. Supongamos, ahora, que $x = x(u, v)$ es una carta arbitraria que contiene el punto P , no umbilical, y supongamos que $du_1 : dv_1$ y $du_2 : dv_2$ son las direcciones principales en P . Consideremos, luego, la transformación de parámetros, lineal, dada por $u = du_1 \theta + du_2 \phi$,

$v = dv_1 \theta + dv_2 \phi$. Obsérvese que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\theta, \phi)} = \det \begin{pmatrix} du_1 & du_2 \\ dv_1 & dv_2 \end{pmatrix} \neq 0$, pues las direcciones $du_1 : dv_1$ y $du_2 : dv_2$ son distintas. De modo que la transformación de parámetros es una transformación admisible de clase C^∞ . De esto se desprende que $x = x^*(\theta, \phi) = x(u(\theta, \phi), v(\theta, \phi))$ es una carta de clase C^2 que contiene a P , y que

$$x_\theta = x_u(\partial u / \partial \theta) + x_v(\partial v / \partial \theta) = x_u du_1 + x_v dv_1$$

$$x_\phi = x_u(\partial u / \partial \phi) + x_v(\partial v / \partial \phi) = x_u du_2 + x_v dv_2$$

Por lo cual, las curvas de parámetros θ y ϕ en P están en la dirección de las direcciones principales.

9.22. Teorema de Euler. Demostrar que la curvatura normal en un punto de una superficie de clase ≥ 2 y en la dirección de una tangente L viene dada por la expresión

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha$$

siendo κ_1 y κ_2 las curvaturas principales en P y α , el ángulo que forman L y la tangente en la dirección principal correspondiente a κ_1 .

Es evidente la verdad del teorema, si P es un punto umbilical donde $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_n$. Si no lo es, supongamos que $x = x(u, v)$ es una carta que contiene a P , tal que las curvas de parámetro u

y las de parámetro v estén en la dirección de las direcciones principales. Entonces, de acuerdo con el teorema 9.12 de la página 198, es $F = M = 0$, y la curvatura normal en cualquier dirección

$du : dv$, será $\kappa_n = \frac{L du^2 + N dv^2}{E du^2 + G dv^2}$. Del teorema 9.13 se desprende que las curvaturas principales son

$\kappa_1 = L/E$ y $\kappa_2 = N/G$, respectivamente. Al sustituir, se tendrá

$$\kappa_n = \kappa_1 \frac{E du^2}{E du^2 + G dv^2} + \kappa_2 \frac{G dv^2}{E du^2 + G dv^2}$$

Ahora, bien, si α y β son, en su orden, los ángulos formados por una tangente arbitraria L con los números directores $du : dv$ y con las tangentes en las direcciones principales, $1 : 0$ y $0 : 1$, entonces, con base en la ecuación (9.6) de la página 184, tendremos

$$\cos \alpha = \frac{E du}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \sqrt{E}} \quad \text{y} \quad \cos \beta = \frac{G dv}{\sqrt{E du^2 + G dv^2} \sqrt{G}}$$

Elevando al cuadrado y sustituyendo, obtendremos

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha$$

Pero, las direcciones principales son perpendiculares entre sí, es decir, $\beta = \pi/2 - \alpha$. Y, en consecuencia, $\kappa_n = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha$.

9.23. Completar la demostración del teorema 9.14, a saber: Demostrar que $du : dv$ es una dirección principal en un punto de una carta si, para algún escalar κ , es

$$dN = -\kappa dx$$

en la dirección $du : dv$.

De la igualdad $dN = -\kappa dx$ se desprende que $(dN + \kappa dx) \cdot x_u = 0$ y $(dN + \kappa dx) \cdot x_v = 0$ o sea que

$$[(N_u du + N_v dv) + \kappa(x_u du + x_v dv)] \cdot x_u = 0$$

$$[(N_u du + N_v dv) + \kappa(x_u du + x_v dv)] \cdot x_v = 0$$

es decir,

$$(-N_u \cdot x_u - \kappa x_u \cdot x_u) du + (-N_v \cdot x_u - \kappa x_v \cdot x_u) dv = 0$$

$$(-N_u \cdot x_v - \kappa x_u \cdot x_v) du + (-N_v \cdot x_v - \kappa x_v \cdot x_v) dv = 0$$

o, también,

$$(L - \kappa E) du + (M - \kappa F) dv = 0$$

$$(M - \kappa F) du + (N - \kappa G) dv = 0$$

Del teorema 9.5 de la página 195, se desprende que κ es una curvatura principal y que $du : dv$ es la dirección principal correspondiente.

9.24. Demostrar el teorema 9.9, a saber: Demostrar que $du : dv$ es una dirección principal en un punto de una carta si y sólo si du y dv satisfacen la ecuación

$$(EM - LF) du^2 + (EN - LG) du dv + (FN - MG) dv^2 = 0$$

Según el teorema 9.5, $du : dv$ es una dirección principal si y sólo si, para algún κ , es

$$(L - \kappa E) du + (M - \kappa F) dv = 0$$

$$(M - \kappa F) du + (N - \kappa G) dv = 0$$

$$(L du + M dv) - \kappa(E du + F dv) = 0$$

$$(M du + N dv) - \kappa(F du + G dv) = 0$$

Pero, el anterior sistema puede tener una solución, $(1, -\kappa)$, que no es trivial, si y sólo si

$$\det \begin{pmatrix} L du + M dv & E du + F dv \\ M du + N dv & F du + G dv \end{pmatrix} = 0.$$

o, desarrollando el determinante

$$(EM - LF) du^2 + (EN - LG) du dv + (FN - MG) dv^2 = 0$$

- 9.25. Demostrar que si dos superficies se cortan bajo un ángulo constante y si la curva de intersección es una línea de curvatura en una de las superficies, entonces ésta es también una línea de curvatura en la otra superficie.

Como las superficies, llamémoslas M_1 y M_2 , se cortan bajo un ángulo constante, entonces, a lo largo de la curva de intersección, es $N_1 \cdot N_2 = \text{constante}$. Por tanto,

$$0 = \frac{d}{dt}(N_1 \cdot N_2) = \left(\frac{d}{dt}N_1\right) \cdot N_2 + N_1 \cdot \frac{d}{dt}N_2$$

Suponiendo que la curva de intersección es una línea de curvatura a todo lo largo de M_1 , entonces (según la fórmula de Rodríguez), $\frac{dN_1}{dt} = -\kappa_1 \frac{dx}{dt}$. En consecuencia,

$$-\kappa_1 \frac{dx}{dt} \cdot N_2 + N_1 \cdot \frac{dN_2}{dt} = 0$$

Pero, dx/dt es ortogonal a N_2 , es decir, $(dx/dt) \cdot N_2 = 0$. En esta forma, $N_1 \cdot (dN_2/dt) = 0$. Por tanto, dN_2/dt es ortogonal a N_1 . Pero, dN_2/dt es también ortogonal a N_2 , pues N_2 tiene la longitud unidad. De aquí se desprende que dN_2/dt es paralelo a dx/dt . Por ello, existe un κ_2 tal que $dN_2/dt = -\kappa_2(dx/dt)$. Y, en consecuencia, la curva de intersección es, también, una línea de curvatura a todo lo largo de M_2 .

- 9.26. Tercera forma fundamental. La tercera forma fundamental se define por $III = dN \cdot dN$. Demostrar que $III - 2H II + K I = 0$, en donde H y K son la curvatura media y curvatura gaussiana, respectivamente.

Se comprueba fácilmente que III es invariante, en el mismo sentido que lo es I . Obsérvese que II y H cambian de sentido al cambiar de orientación. Basta considerar un punto fijo P y una carta local que lo contenga y sea tal que las direcciones de las curvas de parámetros u y v en P sean direcciones principales. Según la fórmula de Rodríguez,

$$N_u = -\kappa_1 x_u \quad \text{y} \quad N_v = -\kappa_2 x_v$$

en donde, κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales. De esto se deduce que para un (du, dv) arbitrario, es

$$\begin{aligned} dN &= N_u du + N_v dv = -\kappa_1 x_u du - \kappa_2 x_v dv \\ &= -\kappa_1 x_u du - \kappa_1 x_v dv + \kappa_1 x_v dv - \kappa_2 x_v dv = -\kappa_1 dx + (\kappa_1 - \kappa_2) x_v dv \end{aligned}$$

$$\text{o, también,} \quad dN + \kappa_1 dx = (\kappa_1 - \kappa_2) x_v dv$$

$$\text{Además,} \quad dN = -\kappa_1 x_u du + \kappa_2 x_u du - \kappa_2 x_u du - \kappa_2 x_v dv = -\kappa_2 dx + (\kappa_2 - \kappa_1) x_u du$$

$$\text{es decir,} \quad dN + \kappa_2 dx = (\kappa_2 - \kappa_1) x_u du$$

$$\text{De modo que} \quad (dN + \kappa_1 dx) \cdot (dN + \kappa_2 dx) = (\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_2 - \kappa_1) du dv x_u \cdot x_v$$

Como quiera que las líneas de curvatura son ortogonales en P , se tiene que $x_u \cdot x_v = 0$. Entonces

$$(dN + \kappa_1 dx) \cdot (dN + \kappa_2 dx) = 0$$

$$\text{es decir,} \quad dN \cdot dN + (\kappa_1 + \kappa_2) dN \cdot dx + \kappa_1 \kappa_2 dx \cdot dx = 0$$

$$\text{Por tanto,} \quad III - 2H II + K I = 0.$$

- 9.27. Demostrar que las direcciones principales de una superficie dada por $f(x_1, x_2, x_3) = C$, son soluciones de

$$\det \begin{pmatrix} dx_1 & f_{x_1} & df_{x_1} \\ dx_2 & f_{x_2} & df_{x_2} \\ dx_3 & f_{x_3} & df_{x_3} \end{pmatrix} = 0, \quad f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0$$

Si $dx = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3$ es tangente, entonces, $f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0$. Y, por tanto, $G = f_{x_1} e_1 + f_{x_2} e_2 + f_{x_3} e_3$ es normal, y $N = G/|G|$. Así, pues,

$$dN = \frac{dG}{|G|} - \frac{(G \cdot dG)G}{|G|^3}$$

en donde, $dG = df_{x_1} e_1 + df_{x_2} e_2 + df_{x_3} e_3$. Supongamos ahora que $dx = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3$ está en una dirección principal. Entonces, de acuerdo con la fórmula de Rodríguez, dx es paralelo a dN . Por tanto, los tres vectores dx , N y dN son dependientes, o sea

$$0 = [dx \ N \ dN] = \left[dx \ \frac{G}{|G|} \left(\frac{dG}{|G|} - \frac{(G \cdot dG)G}{|G|^3} \right) \right] = \frac{1}{|G|^2} [dx \ G \ dG] - \frac{G \cdot dG}{|G|^4} [dx \ G \ G]$$

Pero, $[dx \ G \ G] = 0$; por tanto, $[dx \ G \ dG] = 0$. De donde se desprende el resultado buscado.

LINEAS ASINTOTICAS. FAMILIAS CONJUGADAS DE CURVAS

- 9.28. Demostrar que las curvas de parámetros de la superficie $x = x_1(u) + x_2(v)$ siendo x_1 y x_2 arbitrarios, son familias conjugadas de curvas.

$x_u = x'_1(u)$, $x_v = x'_2(v)$, $x_{uv} = 0$. Por tanto, $M = x_{uv} \cdot N = 0$. De esta suerte, según el teorema 9.20 de la página 201, las curvas de parámetros son familias conjugadas.

- 9.29. Demostrar el teorema 9.26, a saber: Demostrar que en un punto elíptico o hiperbólico toda dirección tiene una única dirección conjugada.

De acuerdo con la ecuación (9.29) de la página 200, $du : dv$ es conjugada de $du : dv$ si y sólo si

$$(L du + M dv) \delta u + (M du + N dv) \delta v = 0$$

La anterior ecuación tiene la solución única $\delta u : \delta v$, $\delta u^2 + \delta v^2 \neq 0$, si y sólo si los coeficientes no se anulan simultáneamente. De modo que, dada $du : dv$, existe una única $\delta u : \delta v$ si y sólo si

$$(L du + M dv)^2 + (M du + N dv)^2 \neq 0$$

$$\text{es decir, si} \quad (L^2 + M^2) du^2 + 2(LM + MN) du dv + (M^2 + N^2) dv^2 \neq 0$$

Pero esta ecuación es diferente de cero para todo valor de $du : dv$, siendo $du^2 + dv^2 \neq 0$, si y sólo si su discriminante es

$$(L^2 + M^2)(M^2 + N^2) - (LM + MN)^2 > 0$$

o, también, al hacer las operaciones: $(LN - M^2)^2 > 0$ o $LN - M^2 \neq 0$. De esta suerte, cualquier dirección $du : dv$ tiene una dirección conjugada, única, a saber: $\delta u : \delta v$, si y sólo si $LN - M^2 \neq 0$, lo cual demuestra el teorema y, de hecho, también su recíproco.

- 9.30. Demostrar el teorema 9.18, a saber: Demostrar que la torsión a lo largo de una línea asintótica, que no sea una recta, cumple la condición de que $\tau^2 = -K$.

De acuerdo con el teorema 9.17 de la página 200, el plano osculador en cada punto de la línea asintótica es tangente a la superficie. En consecuencia, a todo lo largo de la curva, la binormal es $b = \pm N$. De esto se desprende que $b = \pm (dN/ds) = -\tau n$ y $(dN/ds) \cdot (dN/ds) = \tau^2 (n \cdot n) = \tau^2$. Según el problema 9.26, es $III - 2H II + K I = 0$. Pero, a todo lo largo de una línea asintótica es $II = 0$, $III = (dN/ds) \cdot (dN/ds) = \tau^2$ y $I = (dx/ds) \cdot (dx/ds) = 1$. Y, por tanto, $\tau^2 + K = 0$, es decir, $\tau^2 = -K$.

- 9.31. Demostrar que las direcciones asintóticas de una superficie dada por $f(x_1, x_2, x_3) = C$, son las soluciones de las siguientes ecuaciones

$$dx_1 df_{x_1} + dx_2 df_{x_2} + dx_3 df_{x_3} = 0, \quad f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0$$

De acuerdo con el problema 9.27, $G = f_{x_1} e_1 + f_{x_2} e_2 + f_{x_3} e_3$ es normal a la superficie. $N = \frac{G}{|G|}$ y $dN = \frac{dG}{|G|} - \frac{(G \cdot dG)G}{|G|^3}$. Por tanto, si $dx = dx_1 e_1 + dx_2 e_2 + dx_3 e_3$ está en una dirección asintótica, entonces

$$0 = II = -dx \cdot dN = -\frac{dx \cdot dG}{|G|} + \frac{(G \cdot dG)(dx \cdot G)}{|G|^3}$$

Pero, $dx \cdot G = 0$. De modo que $dx \cdot dG = 0$, o sea, $dx_1 df_{x_1} + dx_2 df_{x_2} + dx_3 df_{x_3} = 0$.

- 9.32. Utilícese lo anterior para hallar las curvas asintóticas de la superficie descrita por $f = x_3 - x_1 \sin x_2 = 0$, $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$, $x_1 > 0$.

$f_{x_1} = -\sin x_2$, $f_{x_2} = -x_1 \cos x_2$, $f_{x_3} = 1$, $df_{x_1} = -\cos x_2 dx_2$, $df_{x_2} = -\cos x_2 dx_1 + x_1 \sin x_2 dx_2$, $df_{x_3} = 0$. La ecuación:

$$df_{x_1} dx_1 + df_{x_2} dx_2 + df_{x_3} dx_3 = -2 \cos x_2 dx_1 dx_2 + x_1 \sin x_2 dx_2^2 = 0,$$

se puede descomponer en los factores, $dx_2 = 0$ y $-2 \cos x_2 dx_1 + x_1 \sin x_2 dx_2 = 0$, que tienen las soluciones $x_2 = C$ y $x_1 = K \sec^{1/2} x_2$. Sustituyendo la primera en $x_3 - x_1 \sin x_2 = 0$ se obtiene la familia de rectas $x_1 = t$, $x_2 = C$, $x_3 = t \sin C$, $t > 0$. La segunda proporciona la familia de curvas $x_1 = K \sec^{1/2} u$, $x_2 = u$, $x_3 = K \sec^{1/2} u \sin u$, $-\pi/2 < u < \pi/2$.

Problemas propuestos

- 9.33. Demostrar que las curvas de parámetros, descritas por $x = ue_1 + ve_2 + f(u, v)e_3$, en una carta de Monge, son una familia ortogonal de curvas si y sólo si es $f_{uv} = 0$.
- 9.34. Demostrar que la primera forma fundamental de la superficie $x = y(s) + ut(s)$ tangente a la curva dada por $y = y(s)$ es $I = (1 + u^2 \kappa^2) ds^2 + 2ds du + du^2$.
- 9.35. Demostrar que la primera forma fundamental de la superficie $x = y(s) + ub(s)$, engendrada por la binormal, $b(s)$ de una curva $y = y(s)$ es $I = (1 + u^2 \tau^2) ds^2 + du^2$.
- 9.36. Hallar la longitud del arco $\theta = \int_{\pi/4}^t \frac{1}{\sin \tau} d\tau$, $\phi = t$, $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$, de la esfera descrita por $x = (\sin \phi \cos \theta)e_1 + (\sin \phi \sin \theta)e_2 + (\cos \phi)e_3$. Resp. $\sqrt{2}\pi/4$.
- 9.37. Demostrar que el área de la superficie de una carta de Monge dada por $x = ue_1 + ve_2 + f(u, v)e_3$, se expresa por medio de la integral $A = \iint_W \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} du dv$.
- 9.38. Demostrar que, en la intersección de dos cartas locales de una superficie, a saber, $x = x(u, v)$ y $x = x^*(\theta, \phi)$, se cumple que $EG - F^2 = (E^*G^* - F^{*2}) \left[\frac{\partial(\theta, \phi)}{\partial(u, v)} \right]^2$.
- 9.39. Demostrar que las curvas de la superficie $x = (u \cos \theta)e_1 + (u \sin \theta)e_2 + (a\theta + b)e_3$, cuyos puntos satisfacen la condición $(u^2 + a^2) d\theta^2 - du^2 = 0$, son familias ortogonales de curvas.
- 9.40. Demostrar que las curvas de parámetro θ , pertenecientes a la superficie $x = (r \cos \theta)e_1 + (r \sin \theta)e_2 + f(\theta)e_3$, son paralelas.
- 9.41. Demostrar que la segunda forma fundamental de una carta de Monge representada por $x = ue_1 + ve_2 + f(u, v)e_3$, es $II = (f_u^2 + f_v^2 + 1)^{-1/2} [f_{uu} du^2 + 2f_{uv} du dv + f_{vv} dv^2]$.
- 9.42. Demostrar que todos los puntos del cilindro general descrito por $x = y(s) + ug$, $g = \text{constante}$, son parabólicos o son planos.

- 9.43. Si $x = x(u, v)$, $x = x^*(\theta, \phi)$ son cartas de una superficie, tales que sobre la intersección es $\partial(\theta, \phi)/\partial(u, v) > 0$, demostrar que los segundos coeficientes fundamentales se transforman del modo siguiente

$$\begin{aligned} L &= L^* \theta_u^2 + 2M^* \theta_u \phi_u + N^* \phi_u^2 \\ M &= L^* \theta_u \theta_v + M^* (\theta_u \phi_v + \phi_u \theta_v) + N^* \phi_u \phi_v \\ N &= L^* \theta_v^2 + 2M^* \theta_v \phi_v + N^* \phi_v^2 \end{aligned}$$

- 9.44. Demostrar que la curvatura gaussiana y la curvatura media de $x = (u + v)e_1 + (u - v)e_2 + ue_3$ en $u = 1$, $v = 1$ son: $K = 1/16$ y $H = 1/8\sqrt{2}$.

- 9.45. Demostrar que, en cualquier punto de la siguiente superficie de revolución, la curvatura media es nula

$$x = (\cosh u \cos \theta)e_1 + (\cosh u \sin \theta)e_2 + ue_3$$

- 9.46. Demostrar que las curvaturas principales de la superficie descrita por $x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3 = 0$, son: $\pm 1/(x_1^2 + x_2^2 + 1)$.

- 9.47. Demostrar que las líneas de curvatura de la superficie $x = (u \cos \theta)e_1 + (u \sin \theta)e_2 + ue_3$, son las imágenes de $\log(u + \sqrt{u^2 + 1}) - \theta = C$ y $\log(u + \sqrt{u^2 + 1}) + \theta = K$.

- 9.48. Hallar las curvaturas principales y las direcciones principales de la superficie descrita por

$$x = ue_1 + ve_2 + (4u^2 + v^2)e_3$$

en $u = 0$, $v = 0$, utilizando la indicatriz de Dupin.

- 9.49. Demostrar que la familia de curvas de una carta que sean ortogonales a la familia de curvas dada por $A du + B dv = 0$, viene dada por las soluciones de la ecuación $(EB - FA) du + (FB - GA) dv = 0$.

- 9.50. Las curvas de parámetros de la superficie descrita por

$$x = e^{(u-v)/2} \left(\cos \frac{u+v}{2} \right) e_1 + e^{(u-v)/2} \left(\sin \frac{u+v}{2} \right) e_2 + \left(\frac{u-v}{2} \right) e_3$$

son líneas asintóticas. Verificar que a todo lo largo de la curva $v = 0$, de parámetro u , la torsión cumple la igualdad $\tau^2 = -K$.

- 9.51. Demostrar que las líneas asintóticas de la superficie $x_3 - x_1^4 + x_2^4 = 0$ son las intersecciones de esa superficie con las familias de cilindros $x_1^2 + x_2^2 = C$ y $x_1^2 - x_2^2 = K$.

- 9.52. Demostrar que las direcciones de curvatura bisecan las direcciones asintóticas.

- 9.53. Demostrar que la curvatura media es nula sobre una superficie cuyas líneas asintóticas sean familias ortogonales de curvas.

- 9.54. Demostrar que si una esfera o un plano corta a una superficie bajo un ángulo constante, la curva de intersección es una línea de curvatura.

- 9.55. Demostrar que la suma de las curvaturas normales en un punto de una superficie, en cualquier par de direcciones ortogonales, es constante.

- 9.56. Demostrar que si una superficie tiene una familia de curvas asintóticas planas de un solo parámetro, que no sean líneas rectas, entonces la superficie es un plano.

- 9.57. Supongamos que R es una región perteneciente a una carta de una superficie. Los puntos extremos de las normales unitarias en R forman sobre la esfera unitaria un conjunto R' que recibe el nombre de imagen esférica de R . Demostrar que la razón entre el área de R' y la de R tiende a $|K|$ en un punto P cuando R se contrae alrededor de P tendiendo hacia él. Sugerencia. Véase el problema 9.18 de la página 207.

- 9.58. Demostrar que si es $K \neq 0$ en un punto P de una superficie, existe un entorno de P en el que es posible poner los puntos del mismo en correspondencia inyectiva con la imagen esférica del entorno (véase el problema 9.57).

Capítulo 10

Teoría de superficies Análisis tensorial

ECUACIONES DE GAUSS-WEINGARTEN

Las ecuaciones de Gauss-Weingarten para las superficies son análogas a las de Frenet para las curvas. Recordemos que en las fórmulas de Frenet se expresan los vectores \mathbf{i} , \mathbf{n} y \mathbf{b} como combinaciones lineales de \mathbf{t} , \mathbf{n} y \mathbf{b} con coeficientes que dependen de κ y τ . Análogamente, en las fórmulas de Gauss-Weingarten se expresan las derivadas de los vectores \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v y \mathbf{N} como combinaciones lineales de los mismos, con coeficientes que son funciones de los primeros y de los segundos coeficientes fundamentales.

Supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta de una superficie de clase ≥ 2 . Entonces, \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v y \mathbf{N} son funciones de clase C^1 y poseen las derivadas continuas \mathbf{x}_{uu} , \mathbf{x}_{uv} , \mathbf{x}_{vv} , \mathbf{N}_u y \mathbf{N}_v . Puesto que los vectores \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v y \mathbf{N} son linealmente independientes, se puede escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + \alpha_{11} \mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + \alpha_{12} \mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + \alpha_{22} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_u &= \beta_1^1 \mathbf{x}_u + \beta_1^2 \mathbf{x}_v + \gamma_1 \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_v &= \beta_2^1 \mathbf{x}_u + \beta_2^2 \mathbf{x}_v + \gamma_2 \mathbf{N}\end{aligned}\quad (10.1)$$

en donde es menester determinar los coeficientes Γ_{ij}^k , α_{ij} , β_i^j , γ_i .

Como \mathbf{N} es de longitud igual a la unidad, entonces \mathbf{N}_u y \mathbf{N}_v son ortogonales a \mathbf{N} . Por tanto,

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{N} = \beta_1^1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} + \beta_1^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} + \gamma_1 \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \\ 0 &= \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{N} = \beta_2^1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} + \beta_2^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} + \gamma_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}\end{aligned}$$

Pero, $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. En esta forma, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Por otra parte, de lo anterior se desprende que

$$\begin{aligned}-L &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u = \beta_1^1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + \beta_1^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = \beta_1^1 E + \beta_1^2 F \\ -M &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u = \beta_1^1 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + \beta_1^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \beta_1^1 F + \beta_1^2 G \\ -M &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v = \beta_2^1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + \beta_2^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u = \beta_2^1 E + \beta_2^2 F \\ -N &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v = \beta_2^1 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + \beta_2^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \beta_2^1 F + \beta_2^2 G\end{aligned}$$

Si se resuelven las dos primeras ecuaciones para β_1^1 y β_1^2 y las otras dos para β_2^1 y β_2^2 , se tiene

$$\beta_1^1 = \frac{MF - LG}{EG - F^2}, \quad \beta_1^2 = \frac{LF - ME}{EG - F^2}, \quad \beta_2^1 = \frac{NF - MG}{EG - F^2}, \quad \beta_2^2 = \frac{MF - NE}{EG - F^2} \quad (10.2)$$

Prosiguiendo en esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}L &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} + \alpha_{11} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \alpha_{11} \\ M &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} + \alpha_{12} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \alpha_{12} \\ N &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} + \alpha_{22} \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \alpha_{22}\end{aligned}$$

De esta suerte,

$$\alpha_{11} = L, \quad \alpha_{12} = M, \quad \alpha_{22} = N \quad (10.3)$$

Sólo faltan por determinar los Γ_{ij}^k . En el problema 10.3 de la página 230, demostraremos que se expresan por medio de las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}\end{aligned}\quad (10.4)$$

De este modo, tenemos el

Teorema 10.1. En una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de una superficie de clase ≥ 2 , los vectores \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v , \mathbf{N} y sus derivadas cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + L \mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + M \mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + N \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_u &= \beta_1^1 \mathbf{x}_u + \beta_1^2 \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v &= \beta_2^1 \mathbf{x}_u + \beta_2^2 \mathbf{x}_v\end{aligned}\quad (10.5)$$

en donde los coeficientes β_i^j y Γ_{ij}^k están dados por las ecuaciones (10.2) y (10.4).

Las tres primeras de las ecuaciones precedentes reciben el nombre de *ecuaciones de Gauss* y las dos últimas el de *ecuaciones de Weingarten*. Las magnitudes Γ_{ij}^k se denominan *símbolos de Christoffel de segunda especie*. En (10.4) se puede observar que los Γ_{ij}^k dependen solamente de los primeros coeficientes fundamentales y de sus derivadas, en contraposición a los β_i^j que dependen tanto de los primeros coeficientes fundamentales como de los segundos. Además, por definición, $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1$ y $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2$. De suerte que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ para cualesquiera $i, j, k = 1, 2$.

Ejemplo 10.1.

Necesitamos verificar las ecuaciones (10.2) y (10.4) en el caso de la siguiente superficie de revolución

$$\mathbf{x} = (u \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (u \sin \theta) \mathbf{e}_2 + g(u) \mathbf{e}_3, \quad u > 0$$

En este caso, $\mathbf{x}_u = (\cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta) \mathbf{e}_2 + g'(u) \mathbf{e}_3$, $\mathbf{x}_\theta = -(u \sin \theta) \mathbf{e}_1 + (u \cos \theta) \mathbf{e}_2$

$$\mathbf{N} = -(1 + g'^2)^{-1/2} (g'(\cos \theta) \mathbf{e}_1 + g'(\sin \theta) \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = g'' \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{u\theta} = -(\sin \theta) \mathbf{e}_1 + (\cos \theta) \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}_{\theta\theta} = -(u \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (u \sin \theta) \mathbf{e}_2$$

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + g'^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_\theta = 0, \quad G = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = u^2$$

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = g''(1 + g'^2)^{-1/2}, \quad M = \mathbf{x}_{u\theta} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad N = \mathbf{x}_{\theta\theta} \cdot \mathbf{N} = ug'(1 + g'^2)^{-1/2}$$

Utilizando las ecuaciones (10.2) y (10.4) es posible calcular que

$$\beta_1^1 = -g''(1 + g'^2)^{-3/2}, \quad \beta_1^2 = \beta_2^1 = 0, \quad \beta_2^2 = -u^{-1}g'(1 + g'^2)^{-1/2}$$

$$\Gamma_{11}^1 = g'g''/(1 + g'^2), \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = u^{-1}, \quad \Gamma_{22}^2 = -u/(1 + g'^2)$$

De ello se desprende que

$$\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_\theta + L \mathbf{N} = g'g''/(1 + g'^2) \mathbf{x}_u + g''(1 + g'^2)^{-1/2} \mathbf{N} = g'' \mathbf{e}_3 = \mathbf{x}_{uu}$$

$$\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_\theta + M \mathbf{N} = u^{-1} \mathbf{x}_\theta = -(\sin \theta) \mathbf{e}_1 + (\cos \theta) \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_{u\theta}$$

$$\Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_\theta + N \mathbf{N} = -u/(1 + g'^2) \mathbf{x}_u + ug'(1 + g'^2)^{-1/2} \mathbf{N} = -(u \cos \theta) \mathbf{e}_1 - (u \sin \theta) \mathbf{e}_2 = \mathbf{x}_{\theta\theta}$$

$$\beta_1^1 \mathbf{x}_u + \beta_1^2 \mathbf{x}_\theta = -g''(1 + g'^2)^{-3/2} \mathbf{x}_u = -g''(1 + g'^2)^{-3/2} ((\cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta) \mathbf{e}_2 + g' \mathbf{e}_3) = \mathbf{N}_u$$

$$\beta_2^1 \mathbf{x}_u + \beta_2^2 \mathbf{x}_\theta = -u^{-1}g'(1 + g'^2)^{-1/2} \mathbf{x}_\theta = g'(1 + g'^2)^{-1/2} ((\sin \theta) \mathbf{e}_1 - (\cos \theta) \mathbf{e}_2) = \mathbf{N}_\theta$$

que es el resultado que se requería.

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD Y TEOREMA DE GAUSS

Dadas las funciones E, F, G, L, M y N de u y v , de clase suficientemente alta, es menester averiguar si existe o no una superficie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ cuyos primeros y segundos coeficientes fundamentales sean E, F, G, L, M y N . En general, la respuesta es negativa, a no ser que se cumplan ciertas condiciones de "compatibilidad". Tales condiciones resultan del hecho de que si $\mathbf{x}(u, v)$ es una función de clase C^3 , entonces las derivadas parciales mixtas de tercer orden, de \mathbf{x} , son independientes del orden en que se realice la derivación; es decir,

$$(\mathbf{x}_u)_{uv} = (\mathbf{x}_u)_{vu}, \quad (\mathbf{x}_v)_{uv} = (\mathbf{x}_v)_{vu} \quad (10.6)$$

En el problema 10.28 de la página 238 demostraremos el

Teorema 10.2. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta de una superficie de clase ≥ 2 y tal que los coeficientes de las ecuaciones de Gauss-Weingarten sean de clase C^1 . Entonces, las derivadas mixtas $\mathbf{x}_{uuv}, \mathbf{x}_{uvu}, \mathbf{x}_{vuv}, \mathbf{x}_{vuu}$, existen y cumplen las igualdades (10.6) si y sólo si los primeros y los segundos coeficientes fundamentales cumplen las llamadas *ecuaciones de compatibilidad*, a saber

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2 \\ M_v - N_u &= L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2 \end{aligned} \quad (10.7)$$

y

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= F[(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2] + E[(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v \\ &\quad + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1] \end{aligned} \quad (10.8)$$

Las ecuaciones de compatibilidad se pueden escribir bajo varias formas analíticas. En la forma anterior, las dos primeras ecuaciones (10.7) se denominan ecuaciones de Mainardi-Codazzi.

La ecuación (10.8) tiene particular interés. Recordemos que los Γ_{ij}^k sólo dependen de los primeros coeficientes fundamentales y de sus derivadas. Por ello, $LN - M^2$ sólo depende de E, F, G y de sus derivadas. Pero, en ese caso, la curvatura gaussiana, $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$, que originalmente se definió en función de la segunda forma fundamental, sólo depende de los coeficientes de la primera forma fundamental. Este es uno de los resultados más importantes de la teoría de las superficies y, según veremos, de él se desprenden muchas consecuencias importantes. En esta forma, tenemos el

Teorema 10.3. Teorema egregium de Gauss. La curvatura gaussiana de una superficie de clase ≥ 3 es sólo función de los coeficientes de la primera forma fundamental (y de sus derivadas).

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS SUPERFICIES

Teorema 10.4. Teorema fundamental de las superficies. Supongamos que E, F y G son funciones de u y v de clase C^2 , y L, M y N , funciones de u y v de clase C^1 , todas ellas definidas en un conjunto abierto que contiene a (u_0, v_0) y tales que, para todo (u, v) , se cumpla que

- (i) $EG - F^2 > 0, E > 0, G > 0$
- (ii) E, F, G, L, M, N satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (10.7) y (10.8).

Entonces, existe una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de clase C^3 , definida en un entorno de (u_0, v_0) , para la cual las funciones E, F, G, L, M, N sean los primeros y segundos coeficientes fundamentales. La superficie que representa la $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es única, salvo su posición en el espacio.

En el apéndice 2 se demuestra la existencia de la superficie que tiene las funciones dadas E, F, G, L, M, N como primeros y segundos coeficientes fundamentales. Aquí y ahora vamos

a demostrar su unicidad. Supongamos que existen dos cartas, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u, v)$, definidas en un conjunto U abierto y conexo que contiene a (u_0, v_0) , y tales que, para cualquier (u, v) , ocurra que los coeficientes sean: $E = E^*, F = F^*, G = G^*, L = L^*, M = M^*$ y $N = N^*$. Supongamos que a la superficie que representamos por $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u, v)$ se le aplica primero una traslación y luego un giro, de modo que el punto que corresponde a $\mathbf{x}^*(u_0, v_0)$ llegue a coincidir con el $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ y los vectores tangentes, $\mathbf{x}^*(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}^*(u_0, v_0)$ coincidan con $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$, respectivamente. Ello es posible, pues las longitudes de los vectores \mathbf{x}_u^* y \mathbf{x}_v^* y el ángulo que forman, están determinados por E^*, F^* y G^* que concuerdan con E, F y G , en (u_0, v_0) . Supongamos, ahora, que $u = u(t), v = v(t)$ es un arco que une a (u_0, v_0) con cualquier otro punto (u, v) de U , y consideremos las funciones $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $\mathbf{x}_u(t) = \mathbf{x}_u(u(t), v(t))$ y $\mathbf{x}_v(t) = \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$. Por derivación se tiene

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{x}_u}{dt} = \mathbf{x}_{uu} \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_{uv} \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{x}_v}{dt} = \mathbf{x}_{vu} \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_{vv} \frac{dv}{dt}$$

Utilizando las tres primeras ecuaciones de (10.5) y el hecho de que $N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}}$, obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \\ \frac{d\mathbf{x}_u}{dt} &= \left(\Gamma_{11}^1 \frac{du}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{dv}{dt} \right) \mathbf{x}_u + \left(\Gamma_{11}^2 \frac{du}{dt} + \Gamma_{12}^2 \frac{dv}{dt} \right) \mathbf{x}_v \\ &\quad + \left(L \frac{du}{dt} + M \frac{dv}{dt} \right) (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) (EG - F^2)^{-1/2} \\ \frac{d\mathbf{x}_v}{dt} &= \left(\Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} + \Gamma_{22}^1 \frac{dv}{dt} \right) \mathbf{x}_u + \left(\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} + \Gamma_{22}^2 \frac{dv}{dt} \right) \mathbf{x}_v \\ &\quad + \left(M \frac{du}{dt} + N \frac{dv}{dt} \right) (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) (EG - F^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

o, también,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= a(t)\mathbf{x}_u + b(t)\mathbf{x}_v \\ \frac{d\mathbf{x}_u}{dt} &= c(t)\mathbf{x}_u + d(t)\mathbf{x}_v + e(t)\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \\ \frac{d\mathbf{x}_v}{dt} &= f(t)\mathbf{x}_u + g(t)\mathbf{x}_v + h(t)\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \end{aligned} \quad (10.9)$$

en donde, $a(t) = \frac{du}{dt}, b(t) = \frac{dv}{dt}, c(t) = \Gamma_{11}^1 \frac{du}{dt} + \Gamma_{12}^1 \frac{dv}{dt}$, etc.

Consideremos, ahora, las anteriores ecuaciones como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para las funciones $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}_u(t)$ y $\mathbf{x}_v(t)$. Observemos, además, que los coeficientes $a(t), b(t)$, etc., sólo dependen de la curva $u(t), v(t)$, de los primeros y segundos coeficientes fundamentales E, F, G, L, M, N y de las derivadas de E, F y G a lo largo de $u = u(t), v = v(t)$. Como $E = E^*, F = F^*, G = G^*, L = L^*, M = M^*$ y $N = N^*$ para todo (u, v) , las correspondientes funciones $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}^*(u(t), v(t))$, $\mathbf{x}_u^*(t) = \mathbf{x}_u^*(u(t), v(t))$, y $\mathbf{x}_v^*(t) = \mathbf{x}_v^*(u(t), v(t))$ satisfacen el mismo sistema de ecuaciones (10.9), en toda la extensión de la carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u, v)$. Además, inicialmente, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{x}^*(u_0, v_0) = \mathbf{x}^*(t_0)$, $\mathbf{x}_u(t_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u^*(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u^*(t_0)$ y $\mathbf{x}_v(t_0) = \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_v^*(u_0, v_0) = \mathbf{x}_v^*(t_0)$. Del teorema de la unicidad, relativo a las ecuaciones diferenciales ordinarias, se desprende que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(t)$ en cualquier punto de la curva $u = u(t), v = v(t)$. Por tanto, las cartas $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(u, v)$ coinciden, con lo cual queda demostrado el teorema.

Ejemplo 10.2.

Se necesita determinar la superficie cuyos coeficientes fundamentales son: $E = 1, F = 0, G = \sin^2 u, L = 1, M = 0$ y $N = \sin^2 u, 0 < u < \pi$. De las ecuaciones (10.2) y (10.4) se obtiene: $\beta_1^1 = -1$,

$\beta_1^2 = \beta_2^2 = 0$, $\beta_2^1 = -1$, $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \cot u$, $\Gamma_{22}^1 = -\sin u \cos u$. De esta suerte, las ecuaciones de Gauss-Weingarten son:

$$x_{uu} = N, \quad x_{uv} = (\cot u)x_v, \quad x_{vv} = -(\sin u \cos u)x_u + (\sin^2 u)N, \quad N_u = -x_u, \quad N_v = -x_v$$

De la primera y cuarta ecuaciones se obtiene que $x_{uuu} = -x_u$. Al integrar, resulta

$$x = a(v) \sin u + b(v) \cos u + c(v)$$

De la segunda ecuación se deduce que

$$x_{uv} = a' \cos u - b' \sin u = (\cot u)x_v = a' \cos u + b' \cos u \cot u + c' \cot u$$

De esta suerte, $b'(\sin u + \cos u \cot u) = -c' \cot u$; es decir, $b' = -c' \cos u$. Comoquiera que b' y c' son funciones de la única variable v , se deduce que $b' = c' = 0$. De donde, $b = \text{constante}$ y $c = \text{constante}$. Por otra parte, de la primera y tercera ecuaciones, deducimos que

$$x_{vv} = a'' \sin u = -(\sin u \cos u)x_u + (\sin^2 u)x_{uu} = -a \sin u$$

En consecuencia, $a'' = -a$ y $a = d \cos v + e \sin v$, en donde $d = \text{constante}$ y $e = \text{constante}$. De suerte que

$$x = d \cos v \sin u + e \sin v \sin u + b \cos u + c$$

Falta demostrar que los vectores d , e y b forman un conjunto ortonormal. En efecto, en ese caso es

$$\begin{aligned} |x - c|^2 &= (d \cdot d) \cos^2 v \sin^2 u + 2(d \cdot e) \cos v \sin v \sin^2 u \\ &\quad + 2(d \cdot b) \cos v \sin u \cos u + (e \cdot e) \sin^2 v \sin^2 u \\ &\quad + 2(e \cdot b) \sin v \sin u \cos u + (b \cdot b) \cos^2 u \\ &= \cos^2 v \sin^2 u + \sin^2 v \sin^2 u + \cos^2 u = 1 \end{aligned}$$

Es decir, x pertenece a una esfera de centro en c y radio igual a 1. Para demostrar que d , e y b forman un conjunto ortonormal, observemos que

$$x_v \cdot x_v = G = \sin^2 u = (d \cdot d) \sin^2 v \sin^2 u - 2(d \cdot e) \sin v \cos v \sin^2 u + (e \cdot e) \cos^2 v \sin^2 u$$

o sea,

$$1 = (d \cdot d) \sin^2 v - 2(d \cdot e) \sin v \cos v + (e \cdot e) \cos^2 v$$

Por tanto, $e \cdot e = 1$, $d \cdot e = 0$, $d \cdot d = 1$. Haciendo uso de este hecho, tenemos que, además,

$$x_v \cdot x_u = F = 0 = (b \cdot d) \sin v \sin^2 u - (e \cdot b) \cos v \sin^2 u$$

De donde, $b \cdot d = e \cdot b = 0$. Por último,

$$x_u \cdot x_u = E = 1 = \cos^2 v \cos^2 u + \sin^2 v \cos^2 u + (b \cdot b) \sin^2 u$$

De modo que $b \cdot b = 1$, que es el resultado que se requería. Y por consiguiente, la superficie que tenga los coeficientes fundamentales dados es una esfera de radio uno.

ALGUNOS TEOREMAS RELATIVOS A SUPERFICIES EN GRANDE

Necesitamos demostrar que la esfera es la única superficie de clase ≥ 3 , cerrada y conexa, en la que todos los puntos son puntos umbilicales esféricos. Para ello, supongamos dada una superficie S de clase ≥ 3 conexa y cerrada, y que cada uno de sus puntos es un punto umbilical esférico. Supongamos, además que P es cualquier punto de S y $x = x(u, v)$ una carta conexa de S que contiene a P . Recordemos que, en un punto umbilical esférico, la curvatura normal es $\kappa = \text{constante} \neq 0$ en cualquier dirección, y, por ello, en la carta, cualquier dirección es dirección principal. De esta suerte, todas las curvas de la carta y, en particular las curvas de parámetros, son líneas de curvatura. De la fórmula de Rodríguez se desprende que $N_u = -\kappa x_u$ y $N_v = -\kappa x_v$. Obsérvese que, en un punto fijo, κ es constante en todas las direcciones; sin embargo, a priori no se sabe si κ es constante entre dos puntos de la carta. Para demostrar que es así, utilizamos el hecho de que $x(u, v)$ es de clase C^3 y calculamos $N_{uv} = -\kappa x_{uv} - \kappa_v x_u$ y $N_{vu} = -\kappa x_{vu} - \kappa_u x_v$. Sustrayendo la una de la otra, se tiene $\kappa_v x_u - \kappa_u x_v = 0$. Pero, en cada punto, x_u y x_v son linealmente independientes. De modo que $\kappa_v = 0$ y $\kappa_u = 0$. Y, en consecuencia, $\kappa = \text{constante}$ en la carta. Así, pues, todo punto de S pertenece a una carta en la que $\kappa = \text{constante} \neq 0$. Consideremos, ahora, que P sea un punto fijo y Q cualquier otro punto de S . Puesto que esta es conexa, existirá en ella un arco regular $\Gamma: x = x(t)$ que una a P y Q . Como cualquier punto de S es umbilical esférico, entonces cada una de las curvas de S es una línea de curvatura. De modo que, nuevamente, según la fórmula de Rodríguez, a lo largo de Γ , es $dN/dt = -\kappa(dx/dt)$, donde se observa que $\kappa =$

constante, pues en cada punto de Γ , $\kappa = \text{constante}$ en una carta que contenga el punto. Integrando se tiene que

$$N = -\kappa x + C, \quad \text{o} \quad |x - C/\kappa| = 1/|\kappa| \quad (C = \text{constante})$$

De esta suerte, x y, en especial, Q pertenecen a la esfera Σ de radio $1/|\kappa|$ y centro en C/κ . Como Q es arbitrario, se concluye que S toda pertenece a Σ . Y como Σ es conexa y S es cerrada, de acuerdo con el teorema 8.5 de la página 169, se llega a concluir que $S = \Sigma$. Con esto queda demostrado el

Teorema 10.5. Las esferas son las únicas superficies de clase ≥ 3 , conexas y cerradas, en las que todos los puntos son puntos umbilicales esféricos.

En forma análoga podemos demostrar el siguiente

Teorema 10.6. Los planos son las únicas superficies de clase ≥ 2 , conexas y cerradas, en las que todos los puntos son puntos planos.

La demostración de este teorema se deja al lector como ejercicio (problema 10.38).

Además, en el problema 10.10 demostraremos el

Teorema 10.7. (Liebmann). Las esferas son las únicas superficies conexas y compactas, de clase suficientemente alta, que tienen curvatura gaussiana constante.

Obsérvese que uno de los resultados de este teorema es una propiedad de las esferas, de especial importancia, que estudiaremos más detalladamente en el próximo capítulo. Se trata de lo siguiente: Supongamos que existe una aplicación continua inyectiva f de una superficie Σ sobre una superficie S y que la aplicación es localmente inyectiva y conserva la primera forma fundamental, es decir, que para cada punto P de Σ existe una carta $x = x(u, v)$ que contenga a P y tal que f es una aplicación inyectiva de $x = x(u, v)$ sobre una carta $x^* = x^*(u, v)$ de S , y que los primeros coeficientes fundamentales concuerden en los puntos correspondientes. Obsérvese que, como se muestra en el problema 9.6 de la página 202, no es necesario que las dos superficies sean la misma, pues una superficie está determinada en forma única por sus primeros y por sus segundos coeficientes fundamentales. Sin embargo, si Σ es una esfera, entonces S debe ser una esfera de igual radio. En efecto, una esfera Σ tiene curvatura gaussiana constante e igual a $K = 1/R^2$, en donde R es el radio de Σ , y, por ser la curvatura gaussiana función únicamente de los primeros coeficientes fundamentales, se deduce que S también posee curvatura gaussiana constante e igual a $K = 1/R^2$. Por otra parte, como la esfera Σ es conexa y compacta y la aplicación f de Σ sobre S es continua, se deduce que S es conexa y compacta. Pero, entonces, el teorema anterior permite concluir que S es también una esfera, y, que, además, su radio es $1/K^{1/2} = R$.

NOTACION

Es posible simplificar muchísimo el formalismo de la teoría de superficies utilizando los tensores y la notación tensorial. Empero, ello exige un cambio de notación, a saber: Las componentes de un vector se designarán con superíndices en vez de subíndices. Por ejemplo, un vector de E^3 se escribirá: $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$; un punto perteneciente al plano de los parámetros se representará por (u^1, u^2) , y una carta, se simbolizará por $x = x(u^1, u^2)$.

Por otro lado, las derivadas parciales de x se denotarán así:

$$x_1 = \frac{\partial x}{\partial u^1}, \quad x_2 = \frac{\partial x}{\partial u^2}, \quad x_{12} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^1 \partial u^2}, \quad x_{22} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2 \partial u^2}, \quad \text{etc.}$$

De lo anterior, se desprende que un vector tangente viene a ser $dx = x_1 du^1 + x_2 du^2$, y la primera forma fundamental se convertirá en

$$\begin{aligned} I &= dx \cdot dx = x_1 \cdot x_1 du^1 du^1 + 2x_1 \cdot x_2 du^1 du^2 + x_2 \cdot x_2 du^2 du^2 \\ &= g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2 = \sum_{ik} g_{ik} du^i du^k \end{aligned} \quad (10.10)$$

en donde, $g_{11} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = E$, $g_{12} = g_{21} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = F$ y $g_{22} = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 = G$ representan los primeros coeficientes fundamentales e $i, k = 1, 2$.

Además, utilizaremos a g para designar el discriminante de I ; es decir,

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = EG - F^2$$

e introduciremos las siguientes magnitudes

$$g^{11} = g_{22}/g, \quad g^{12} = g^{21} = -g_{12}/g, \quad g^{22} = g_{11}/g \quad (10.11)$$

En el problema 10.12 de la página 234, demostraremos que

$$\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (10.12)$$

Es decir, la matriz (g^{ij}) es la inversa de la (g_{ij}) , y el producto

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por último, la diferencial de la normal será el vector $d\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 du^1 + \mathbf{N}_2 du^2$ y la segunda forma fundamental será

$$\begin{aligned} II &= -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{N} = -\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{N}_1 du^1 du^1 - \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{N}_2 du^1 du^2 - \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{N}_1 du^2 du^1 - \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{N}_2 du^2 du^2 \\ &= b_{11} du^1 du^1 + b_{12} du^1 du^2 + b_{21} du^2 du^1 + b_{22} du^2 du^2 = \sum_{ik} b_{ik} du^i du^k \end{aligned} \quad (10.13)$$

en donde, $b_{11} = -\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{N}_1 = \mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{N} = L$

$$b_{12} = b_{21} = -\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{N}_1 = -\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = \mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{x}_{21} \cdot \mathbf{N} = M \quad (10.14)$$

$$b_{22} = -\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{N}_2 = \mathbf{x}_{22} \cdot \mathbf{N} = N$$

representan ahora los segundos coeficientes fundamentales. Además, por definición, será

$$b = \det(b_{ij}) = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = LN - M^2 \quad (10.15)$$

Utilizaremos el llamado *convenio de sumación de índices repetidos*, que consiste en lo siguiente: Consideremos la suma

$$\sum_{\alpha=1}^3 a_{i\alpha} b^\alpha = a_{i1}b^1 + a_{i2}b^2 + a_{i3}b^3$$

Obsérvese que, en el primer miembro de la igualdad, α aparece en el producto $a_{i\alpha}b^\alpha$ solamente una vez como subíndice y solamente una vez como superíndice. Cuando esto ocurra, omitiremos el signo Σ y escribiremos sencillamente: $a_{i\alpha}b^\alpha$. Así, pues,

$$a_{i\alpha}b^\alpha = \sum_{\alpha} a_{i\alpha}b^\alpha = a_{i1}b^1 + a_{i2}b^2 + a_{i3}b^3$$

El índice α se denomina *índice de sumación* o *índice mudo*. Al hacer un cálculo, será siempre posible cambiar un índice mudo. En otras palabras,

$$a_{i\alpha}b^\alpha = a_{i\beta}b^\beta = a_{i\gamma}b^\gamma$$

El índice i se denomina *índice libre*. Este no se puede cambiar. Por último, en el caso de una derivada, por ejemplo la $\partial\theta^i/\partial u^j$ o la $\mathbf{x}_j = \partial\mathbf{x}/\partial u^j$, el índice i se considera como un índice alto o superíndice y el j como un subíndice o índice bajo.

Ejemplo 10.3.

(a) Sean: $f = f(x^1, x^2, x^3)$ y $x^i = x^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2, 3$. La regla de la cadena para obtener las derivadas de f respecto de u^i , es

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial u^i} + \frac{\partial f}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial u^i} + \frac{\partial f}{\partial x^3} \frac{\partial x^3}{\partial u^i} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}, \quad i = 1, 2$$

Como, según el convenio, α aparece como "subíndice" en $\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$ y como "superíndice" en $\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$, esto se puede escribir en la siguiente forma

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$$

(b) Sea $S = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Puesto que tanto α como β aparecen una vez haciendo de subíndice y una vez de superíndice, S es la suma doble siguiente

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \\ &= a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + a_{13}x^1x^3 + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + a_{23}x^2x^3 + a_{31}x^3x^1 + a_{32}x^3x^2 + a_{33}x^3x^3 \end{aligned}$$

Ejemplo 10.4.

Utilizando el convenio de sumación, es posible escribir un vector tangente en la forma $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha$ y la primera forma fundamental así: $I = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\beta du^\alpha du^\beta$. La diferencial de la normal será: $d\mathbf{N} = \mathbf{N}_\alpha du^\alpha$ y la segunda forma fundamental será: $II = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{N}_\beta du^\alpha du^\beta = \mathbf{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{N} du^\alpha du^\beta = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$. Las ecuaciones (10.5) de Gauss-Weingarten se escribirán así

$$\mathbf{x}_{11} = \Gamma_{11}^\alpha \mathbf{x}_\alpha + b_{11} \mathbf{N}, \quad \mathbf{x}_{12} = \Gamma_{12}^\alpha \mathbf{x}_\alpha + b_{12} \mathbf{N}, \quad \mathbf{x}_{22} = \Gamma_{22}^\alpha \mathbf{x}_\alpha + b_{22} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}_1 = \beta_1^\alpha \mathbf{x}_\alpha, \quad \mathbf{N}_2 = \beta_2^\alpha \mathbf{x}_\alpha$$

o, simplemente,

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{x}_\alpha + b_{ij} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}_i = \beta_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha, \quad i, j = 1, 2$$

VARIEDADES ELEMENTALES

En vista de que los tensores tienen amplias aplicaciones, fuera de la que de ellos haremos en las superficies de E^3 , introduciremos una generalización del concepto de superficie elemental del siguiente modo: Supongamos que se tiene una colección abstracta, M , de objetos P que llamaremos "puntos" los cuales pueden ponerse en correspondencia biunívoca con un conjunto S de n -uplas de números reales (u^1, u^2, \dots, u^n) que denominaremos las coordenadas de P . Esta correspondencia, $P(u^1, u^2, \dots, u^n)$, entre los puntos que pertenecen a M y el conjunto S de las n -uplas, recibirá el nombre de *sistema de coordenadas* de M . Un sistema de coordenadas (o de referencia), $P(u^1, u^2, \dots, u^n)$, de M es análogo a una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$ de una superficie que determine una correspondencia biunívoca entre los puntos de la carta y un conjunto de puntos del plano $u^1 u^2$. Cualquier otro sistema de coordenadas $P(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ de M , definido en un conjunto de n -uplas, determinará una correspondencia biyectiva $(u^1, \dots, u^n) \leftrightarrow (\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ entre los dos conjuntos de n -uplas, S y \bar{S} , que se llamará *transformación de coordenadas*. Esta correspondencia puede expresarse como $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \dots, u^n)$, $i = 1, \dots, n$, y tiene las ecuaciones inversas $u^i = u^i(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$. Aquí, las \bar{u}^i son funciones numéricas reales de S y las u^i son funciones numéricas reales de \bar{S} . Estas ecuaciones corresponden a la transformación de parámetro $\bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2)$, $\bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2)$ cuya inversa, que es $u^1 = u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, $u^2 = u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ existe en la intersección de dos cartas de una superficie.

Supongamos que los conjuntos S de n -uplas de números reales, en los que se definen los sistemas de coordenadas, son *abiertos*. Un conjunto S de n -uplas de números reales (u^1, \dots, u^n) es abierto si para cualquier (u_0^1, \dots, u_0^n) perteneciente a S , existe un real $\epsilon > 0$ tal que todos los (u^1, \dots, u^n) que cumplan la condición de que $\left[\sum_{i=1}^n (u^i - u_0^i)^2 \right]^{1/2} < \epsilon$ pertenezcan a S .

Supongamos, por otra parte, que las transformaciones $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \dots, u^n)$ y sus inversas $u^i = u^i(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$, tienen derivadas parciales continuas $\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}$ y $\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}$, $i, j = 1, \dots, n$, y los jacobianos, no nulos, dados por $\frac{\partial(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} = \det \left(\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j} \right) \neq 0$ y $\frac{\partial(u^1, \dots, u^n)}{\partial(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)} = \det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \right) \neq 0$.

En el problema 10.17 de la página 235, demostraremos que por ser \bar{u}_i y u_i funciones mutuamente inversas, se tiene

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i} = \delta_i^i \quad (10.16)$$

Se dice que una función numérica en los reales $\bar{u}^i(u^1, \dots, u^n)$ definida en S , es continua en (u_0^1, \dots, u_0^n) si, dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\left[\sum_i (\bar{u}^i(u^1, \dots, u^n) - \bar{u}^i(u_0^1, \dots, u_0^n))^2 \right]^{1/2} < \epsilon$ para $\left[\sum_i (u^i - u_0^i)^2 \right]^{1/2} < \delta$. La función $\bar{u}^i(u^1, \dots, u^n)$ es continua en S si lo es en todo (u_0^1, \dots, u_0^n) de S . La derivada parcial $\partial \bar{u}^i / \partial u^j$ en (u_0^1, \dots, u_0^n) , está definida por el límite

$$\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}(u_0^1, \dots, u_0^n) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\bar{u}^i(u_0^1, \dots, u_0^j + k, \dots, u_0^n) - \bar{u}^i(u_0^1, \dots, u_0^n)}{k}$$

La colección fundamental de puntos M juntamente con la totalidad de los sistemas coordenados admisibles, definidos como queda dicho, recibe el nombre de *variedad coordenada elemental de n dimensiones*.

Ejemplo 10.5.

- Una curva regular simple (es decir, que no se corte a sí misma), perteneciente a E^3 , es una variedad coordenada elemental de 1 dimensión.
- Una superficie elemental (cubierta por una única carta), perteneciente a E^3 , es una variedad coordenada elemental de 2 dimensiones.
- El propio E^3 , junto con todos los sistemas de referencia $P(x^1, x^2, x^3)$ definidos en E^3 , (para los cuales las transformaciones de coordenadas $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, x^3)$, $i = 1, 2, 3$, y sus inversas $x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$, $i = 1, 2, 3$, son de clase C^1 y tienen los jacobianos $\frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \neq 0$ y $\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)} \neq 0$, es una variedad elemental de 3 dimensiones.

TENSORES

Dada una variedad coordenada, se puede considerar que un tensor T en un punto P de la variedad, es cierto "ente" geométrico que se asocia al punto y que tiene las siguientes propiedades:

- Dado el sistema de coordenadas $P(u^1, \dots, u^n)$ en la variedad, T se representa por medio de un conjunto C de escalares que recibe el nombre de *componentes de T respecto del sistema de coordenadas $P(u^1, \dots, u^n)$* .
- Si $P(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ es cualquier otro sistema de referencia de la variedad, las componentes \bar{C} de T respecto de $P(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ se relacionan con las componentes C según ciertas leyes de transformación que dependen de la transformación de coordenadas $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \dots, u^n)$, $i = 1, \dots, n$, y de su inversa, $u^i = u^i(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$.

Un ejemplo importante de tensor en un punto de una superficie, es aquel cuyas componentes respecto de una carta $x = x(u^1, u^2)$ que contenga a P , son los primeros coeficientes fundamentales g_{ij} , $i, j = 1, 2$. Si $\bar{x} = \bar{x}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ es otra carta cualquiera, que contenga a P , y cuyos primeros coeficientes fundamentales sean \bar{g}_{ij} , entonces, de las ecuaciones (9.2) y (9.3) se desprende que los g_{ij} y los \bar{g}_{ij} , se vinculan mutuamente mediante la ley de transformación siguiente

$$\bar{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j}, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (10.17)$$

Este tensor recibe el nombre de tensor *métrico covariante* de la superficie en P .

Al igual que el tensor métrico que se acaba de definir, ordinariamente un tensor T dependerá del punto P de la variedad; en ese caso las componentes de $T(P)$ se expresan por medio

de funciones de las coordenadas (u^1, \dots, u^n) de P . La función que a cada punto P de la variedad le hace corresponder el tensor $T(P)$ se denomina *campo de tensores*.

De acuerdo con sus correspondientes leyes de transformación, los tensores se clasifican del siguiente modo:

- Un tensor se denomina *tensor contravariante de orden 1* o *vector contravariante*, si tiene n componentes A^1, \dots, A^n que se transforman de acuerdo con la siguiente ley:

$$A^i = A^\alpha \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha}, \quad \alpha, i = 1, \dots, n \quad (10.18)$$

- Un tensor se llama *tensor covariante de orden 1* o *vector covariante* si tiene n componentes A_1, \dots, A_n , que se transforman de acuerdo con la siguiente ley:

$$A_i = A_\alpha \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^i}, \quad \alpha, i = 1, \dots, n \quad (10.19)$$

- Un tensor recibe el nombre de *tensor contravariante de orden 2*, si tiene n^2 componentes, A^{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, que se transforman siguiendo la ley:

$$A^{ij} = A^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta}, \quad \alpha, \beta, i, j = 1, \dots, n \quad (10.20)$$

- Un tensor se llama *tensor covariante de orden 2*, si tiene n^2 componentes, A_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, que se transforman de acuerdo con la siguiente ley:

$$\bar{A}_{ij} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j} \quad (10.21)$$

Los cuatro tensores mencionados son casos particulares del siguiente:

- Un tensor se denomina *tensor mixto, contravariante de orden r y covariante de orden s , de peso N* , si tiene n^{r+s} componentes del tipo $A_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r}$, $i_k, j_m = 1, \dots, n$, que se transforman de acuerdo con la ley:

$$\bar{A}_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = \left[\det \left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{u}_j} \right) \right]^N A_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \frac{\partial \bar{u}^{j_1}}{\partial u^{i_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}^{j_r}}{\partial u^{i_r}} \frac{\partial u^{i_{s+1}}}{\partial \bar{u}^{i_{s+1}}} \dots \frac{\partial u^{i_{s+s}}}{\partial \bar{u}^{i_{s+s}}} \quad (10.22)$$

Si el exponente N del jacobiano $\det(\partial u_i / \partial \bar{u}_j)$ es igual a cero, el tensor se denomina *tensor absoluto*. Si $s = 0$, se dice que el tensor es contravariante puro. Si $r = 0$, se dice que es covariante puro. A la suma $r + s$ se le llama *orden* del tensor. Obsérvese que los tensores (i), (ii), (iii) y (iv) son absolutos. Por otra parte, por definición:

- Un escalar es un tensor de orden cero.

Por último, obsérvese que la ley de transformación de un tensor general es transitiva.

Por ejemplo, consideremos la ley de transformación $\bar{A}^i = A^\alpha \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha}$ que expresa la relación que existe entre las componentes de un vector contravariante en los sistemas de coordenadas, $P(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ y $P(u^1, \dots, u^n)$. De la ecuación (10.18), por sustitución y aplicando la regla de la cadena, se desprende que

$$\bar{A}^i = \left(A^\beta \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \right) \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{u}^\alpha} = A^\beta \left(\frac{\partial \bar{u}^i}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \right) = A^\beta \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\beta}$$

que es precisamente la ley de transformación que relaciona las componentes del vector, referido a los sistemas coordenados $P(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n)$ y $P(u^1, \dots, u^n)$.

Ejemplo 10.6.

- Sea $f(x^1, x^2, x^3)$ una función numérica real de clase C^1 , definida en un conjunto abierto U de E^3 . Si

$x^i = x^i(x^1, x^2, x^3)$, $i = 1, 2, 3$, es una transformación admisible de coordenadas, entonces, según la regla de la cadena, en cada punto se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3$$

De esta suerte, la ecuación (10.19) permite ver que las $\partial f / \partial x^i$, $i = 1, 2, 3$, son las componentes de un campo de vectores covariantes de U , que llamaremos *gradiente* de f .

- (b) De las ecuaciones (10.17) y (10.21) se colige que el tensor métrico covariante, es decir, el campo tensorial de una superficie cuyas componentes son los primeros coeficientes fundamentales g_{ik} , es un campo de tensores covariantes absolutos de segundo orden.
- (c) Recordemos que (véase la ecuación (9.11) de la página 187) los segundos coeficientes fundamentales b_{ij} se transforman del mismo modo que los g_{ij} , es decir, que en la intersección de dos cartas, $x = x(u^1, u^2)$ y $x = x^*(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, se tiene

$$\tilde{b}_{ij} = b_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j}$$

De manera que los segundos coeficientes fundamentales, son, además, las componentes de un campo de tensores covariantes absolutos, de segundo orden, sobre la superficie.

- (d) Sea $\tilde{u}^i = \tilde{u}^i(u^1, \dots, u^n)$ una transformación admisible de coordenadas en una variedad coordinada de dimensión n , y consideremos la suma $\delta_\alpha^\beta \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i}$ en un punto. Como la única contribución tiene lugar cuando $\alpha = \beta$, entonces tenemos

$$\delta_\alpha^\beta \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} = \delta_i^j = \tilde{\delta}_i^j$$

en donde hemos utilizado la ecuación (10.16). De la ecuación (10.22) se desprende que la delta de Kronecker, δ_i^j es un tensor absoluto mixto de segundo orden, covariante de primer orden y contravariante de primer orden. Obsérvese que este es un tensor cuyas componentes son las mismas respecto de cualquier sistema de referencia dado en la variedad.

- (e) Supongamos que en un punto de la intersección de dos cartas de una superficie, es $A^U = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta}$, en donde los g^{ij} se han definido en la ecuación (10.11). Además, consideremos la siguiente suma

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ik} A^{kj} &= g_{\gamma\sigma} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \tilde{u}^k} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta} = \left(\frac{\partial u^\sigma}{\partial \tilde{u}^k} \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^\alpha} \right) g_{\gamma\sigma} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta} \\ &= \delta_\alpha^\sigma g_{\gamma\sigma} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta} = g_{\gamma\alpha} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta} = \delta_\gamma^\beta \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta} \\ &= \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta} = \delta_i^j = \tilde{\delta}_i^j \end{aligned}$$

Puesto que $\tilde{g}_{ik} A^{kj} = \delta_i^j$ se deduce que

$$\tilde{g}^{ij} = A^U = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta}$$

De esta suerte, la ecuación (10.20) nos permite ver que las g^{ij} son las componentes de un campo de tensores contravariantes absolutos, de segundo orden, en la superficie, llamados *tensores métricos contravariantes*.

- (f) Consideremos los 27 escalares e^{ijk} , $i, j, k = 1, 2, 3$, que se definen en la siguiente forma

$$e^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si dos de los índices } i, j, k \text{ son iguales} \\ 1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación de orden par de } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación de orden impar de } 1, 2, 3 \end{cases}$$

Por ejemplo, $e^{112} = 0$, $e^{212} = 0$, $e^{123} = 1$, $e^{231} = -1$, $e^{312} = 1$. Recordemos que

$$\det(a_i^j) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} = \sum \pm a_1^i a_2^j a_3^k$$

en donde, se toma el signo + cuando i, j, k forman una permutación de orden par de los números 1, 2, 3, y el signo - cuando i, j, k son una permutación de orden impar de 1, 2, 3. Pero, entonces, de la definición de e^{ijk} se deduce que

$$\det(a_i^j) = \sum_{\alpha\beta\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^1 a_\beta^2 a_\gamma^3 = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^1 a_\beta^2 a_\gamma^3$$

en donde sumamos en la extensión de todos los α, β, γ . Por otra parte, observemos que

$$e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^p a_\beta^q a_\gamma^r = \begin{cases} +\det(a_i^j) & \text{si } p, q, r \text{ es una permutación de orden par de } 1, 2, 3 \\ -\det(a_i^j) & \text{si } p, q, r \text{ es una permutación de orden impar de } 1, 2, 3 \end{cases}$$

De modo que

$$e^{pqr} \det(a_i^j) = e^{\alpha\beta\gamma} a_\alpha^p a_\beta^q a_\gamma^r$$

Ahora, bien, supongamos que $\tilde{u}^i = \tilde{u}^i(u^1, u^2, u^3)$ es una transformación de coordenadas en una variedad coordinada de 3 dimensiones. Entonces, de lo anterior se desprende que

$$e^{pqr} \det \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \right) = e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\beta} \frac{\partial \tilde{u}^r}{\partial u^\gamma}$$

$$\text{o sea: } \tilde{g}^{pqr} = e^{pqr} = \left[\det \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \right) \right]^{-1} e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\beta} \frac{\partial \tilde{u}^r}{\partial u^\gamma} = \det \left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} \right) e^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\beta} \frac{\partial \tilde{u}^r}{\partial u^\gamma}$$

De esto se deduce que los e^{ijk} son las componentes de un tensor contravariante de tercer orden y peso 1. Obsérvese que las magnitudes e_{ijk} , $i, j, k = 1, 2, 3$, donde $e_{ijk} = e^{ijk}$, son las componentes de un vector contravariante de tercer orden y peso -1. La demostración de esta verdad la dejamos al lector como ejercicio.

Se dice que un conjunto de componentes de un tensor es *simétrico* respecto de dos índices contravariantes (superíndices), o respecto de dos índices covariantes (subíndices), si las componentes no varían al permutar los índices. Por ejemplo, A_{pq}^{ijk} es simétrica respecto del primer y del tercer índices contravariantes si $A_{pq}^{ijk} = A_{pq}^{kji}$ para cualesquiera i y k .

Se dice que las componentes de un tensor son *hemisimétricas* (o antisimétricas) respecto de dos índices contravariantes, o respecto de dos índices covariantes, si al permutar los índices cambia el signo algebraico de la componente. Por ejemplo A_{pq}^{ijk} es hemisimétrica respecto del primer y del tercer índices contravariantes si $A_{pq}^{ijk} = -A_{pq}^{kji}$ para cualesquiera i y k .

Si un tensor es simétrico tanto respecto de todos los pares de índices contravariantes como respecto de todos los covariantes, entonces se dice simplemente que es simétrico. Si un tensor es hemisimétrico respecto de todos los pares de índices contravariantes y respecto de todos los covariantes, entonces se dice simplemente que es hemisimétrico.

En el problema 10.19 se demostrará que si las componentes de un tensor respecto de un sistema de coordenadas son simétricas con relación a un par de índices, entonces también lo serán respecto de los mismos índices en cualquier otro sistema de referencia. De modo que la simetría respecto de un par de índices es una propiedad intrínseca del tensor. Otro tanto puede decirse de la hemisimetría.

Ejemplo 10.7.

- (a) Los tensores métricos contravariantes y los métricos covariantes son simétricos, pues $g^{ij} = g^{ji}$, $i, j = 1, 2$, y $g_{ij} = g_{ji}$, $i, j = 1, 2$.
- (b) El concepto de la delta de Kronecker se puede ampliar del siguiente modo

$$\delta_{ij}^{pq} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = p, j = q, \text{ e } i \neq j \\ -1, & \text{si } i = q, j = p, \text{ e } i \neq j \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (i, j, p, q = 1, \dots, n)$$

En el problema 10.14 de la página 234, se demostrará que las δ_{ij}^{pq} son las componentes de un tensor absoluto de cuarto orden, covariante de segundo orden y contravariante de segundo orden. Es evidente

que tal tensor es hemisimétrico respecto de sus índices contravariantes. En efecto, si $i = p$, $j = q$ e $i \neq j$, entonces $\delta_{ij}^{pq} = 1$ y $\delta_{ij}^{pq} = -1$; por tanto, $\delta_{ij}^{pq} = -\delta_{ij}^{qp}$. Si $i = q$, $j = p$ e $i \neq j$, entonces $\delta_{ij}^{pq} = -1$, $\delta_{ij}^{qp} = 1$ y $\delta_{ij}^{pq} = -\delta_{ij}^{qp}$. En cualquier otro caso, es $\delta_{ij}^{pq} = 0$, $\delta_{ij}^{qp} = 0$ y $\delta_{ij}^{pq} = -\delta_{ij}^{qp}$. En forma parecida se prueba que es hemisimétrico respecto de sus índices covariantes.

(c) Lo anterior se generaliza, aún más, del siguiente modo

$$\delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} = \begin{cases} 1, & \text{si los } i_1, \dots, i_m \text{ son distintos y } j_1, \dots, j_m \text{ es una permutación de orden par de } i_1, \dots, i_m \\ -1, & \text{si los } i_1, \dots, i_m \text{ son distintos y } j_1, \dots, j_m \text{ es una permutación de orden impar de } i_1, \dots, i_m \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{1122}^{1245} = 0, \quad \delta_{1234}^{1134} = 0, \quad \delta_{1234}^{5678} = 0, \quad \delta_{1234}^{2134} = -1, \quad \delta_{1234}^{2314} = +1, \quad \delta_{3456}^{3465} = -1, \quad \delta_{4356}^{4356} = 1$$

Se demuestra que las $\delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m}$ son las componentes de un tensor absoluto hemisimétrico covariante de orden m y contravariante de orden m .

ALGEBRA TENSORIAL

(a) **Adición.** Sean $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ y $B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ las componentes de dos tensores, A y B , contravariante y covariante de órdenes y pesos iguales. En el problema de 10.18 de la página 235, demostraremos que la suma

$$C_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} = A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} + B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$$

que se obtiene adicionando las componentes de A y B , representa las componentes de un tensor C contravariante y covariante de órdenes y pesos iguales a los de A y B , que se llama *suma* de A y B .

(b) **Producto externo de tensores.** Si las componentes $B_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ de un tensor B de orden $p + k$ se multiplican por las componentes $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ de un tensor A de orden $r + s$, el resultado será un conjunto de $n^{r+s+p+q}$ números

$$C_{i_1 \dots i_r, \beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_p, j_1 \dots j_r} = A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} B_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

que, como se comprueba fácilmente, son las componentes de un tensor C contravariante de orden $r + p$, covariante de orden $s + q$ y de peso $N_1 + N_2$, siendo N_1 el peso de A y N_2 el peso de B . El tensor C recibe el nombre de *producto externo* de A por B . Como caso particular, A puede ser un tensor de orden cero, es decir, puede ser $A = \text{escalar}$.

(c) **Contracción.** Sean $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ las componentes de un tensor A contravariante de orden r , covariante de orden s y de peso N . Se puede demostrar que, el conjunto de los n^{r+s-2} escalares

$$B_{i_2 \dots i_s}^{j_2 \dots j_r} = A_{i_2 \dots i_s}^{\alpha_2 \dots \alpha_r, j_2 \dots j_r}$$

que se obtienen igualando el primer índice contravariante con el primer índice covariante y sumando luego, de acuerdo con el convenio de sumación, son las componentes de un tensor B , contravariante de orden $r - 1$, covariante de orden $s - 1$ y de peso N . Se dice que el tensor B es una *contracción* del tensor A . Una contracción vectorial se logra escogiendo un índice covariante y otro contravariante.

Ejemplo 10.8.

(a) Sean A^{ij} las componentes de un tensor contravariante arbitrario, de segundo orden, y, además, $B^{ij} = A^{ji}$. Es de observar que los B^{ij} son también las componentes de un tensor contravariante de segundo orden, pues

$$B^{\alpha\beta} \det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \right)^N \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} = A^{\beta\alpha} \det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \right)^N \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} = A^{\beta\alpha} \det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j} \right)^N \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^\beta} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^\alpha} = A^{ji} = B^{ij}$$

Consideremos, ahora, el tensor que se define por

$$C^{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} + B^{ij})$$

$$D^{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} - B^{ij})$$

En este caso,

$$C^{ji} = \frac{1}{2}(A^{ji} + B^{ji}) = \frac{1}{2}(B^{ij} + A^{ij}) = C^{ij}$$

y

$$D^{ji} = \frac{1}{2}(A^{ji} - B^{ji}) = \frac{1}{2}(B^{ij} - A^{ij}) = -D^{ij}$$

De modo que C^{ij} es simétrico y D^{ij} es hemisimétrico. Pero, es $C^{ij} + D^{ij} = A^{ij}$, y, de esta suerte, cualquier tensor contravariante de segundo orden resulta ser la suma de un tensor contravariante simétrico y otro contravariante hemisimétrico de segundo orden.

(b) Sean: $e^{11} = e_{11} = 0$, $e^{12} = e_{12} = 1$, $e^{21} = e_{21} = -1$ y $e^{22} = e_{22} = 0$. En este caso, e^{ij} y e_{ij} son los análogos bidimensionales de los e^{ijk} y e_{ijk} que figuran en el ejemplo 10.6(f). Consideremos, ahora, el producto externo

$$A_{pq}^{ij} = e^{ij} e_{pq}$$

Nótese que si los p, q son diferentes, entonces, será $A_{pq}^{ij} = 1$ si $i = p$ y $j = q$, y $A_{pq}^{ij} = -1$ si $i = q$ y $j = p$. En cualquier otro caso, será $A_{pq}^{ij} = 0$. Por lo tanto, según el ejemplo 10.7(b), será

$$A_{pq}^{ij} = e^{ij} e_{pq} = \delta_{pq}^{ij}$$

Por otra parte, vemos que la contracción

$$\delta_{\alpha\alpha}^{ij} = e^{\alpha j} e_{\alpha i} = e^{1j} e_{1i} + e^{2j} e_{2i} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases} = \delta_i^j$$

APLICACION DE LOS TENSORES A LAS ECUACIONES DE LA TEORIA DE SUPERFICIES

Consideremos las ecuaciones de Gauss, a saber

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{x}_\alpha + b_{ij} \mathbf{N} \quad (\alpha, i, j = 1, 2) \quad (10.23)$$

Si se realiza el producto escalar de las ecuaciones de Gauss por \mathbf{x}_k , se tendrá

$$\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_k = \Gamma_{ij}^\alpha (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_k) = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha k}$$

Las magnitudes $\Gamma_{ijk} = (\mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_k)$ se denominan *símbolos de Christoffel de primera especie*. Al utilizar la igualdad $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j$, se deduce, por otra parte, que

$$\Gamma_{ij\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^\alpha \delta_\alpha^k = \Gamma_{ij}^k$$

De modo que los símbolos de Christoffel de primera especie se relacionan con los símbolos de Christoffel de segunda especie por medio de las siguientes ecuaciones

$$\Gamma_{ijk} = g_{k\alpha} \Gamma_{ij}^\alpha \quad \text{y} \quad \Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha} \quad (10.24)$$

En el problema 10.24 de la página 237, demostraremos que los Γ_{ijk} tienen la expresión

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right] \quad (10.25)$$

y, por tanto, los Γ_{ij}^k vienen dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left[\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right] \quad (10.26)$$

Obsérvese que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k son componentes de un tensor, en la forma en que se han definido anteriormente. En las leyes de transformación de estos símbolos inter-

vienen las segundas derivadas de la transformación de parámetros. En el problema 10.27 de la página 237, se demostrará el

Teorema 10.8. Los símbolos de Christoffel se transforman de acuerdo con las siguientes leyes

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^k &= \left[\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial \bar{u}^j} + \frac{\partial^2 u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \right] \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^{\gamma}} \\ \bar{\Gamma}_{ijk} &= \left[\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^{\beta}}{\partial \bar{u}^j} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \right] \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^k}\end{aligned}$$

Consideremos, luego, las ecuaciones de Weingarten, a saber

$$N_i = \beta_i^{\alpha} x_{\alpha}, \quad \alpha, i = 1, 2 \quad (10.27)$$

Si multiplicamos escalarmente por x_j , se verá que los segundos coeficientes fundamentales b_{ij} satisfacen la igualdad

$$-b_{ij} = N_i \cdot x_j = \beta_i^{\alpha} x_{\alpha} \cdot x_j = \beta_i^{\alpha} g_{\alpha j}$$

Si definimos $b_i^j = b_{ia} g^{aj}$, de aquí se desprende que

$$b_i^j = b_{ia} g^{aj} = -\beta_i^{\alpha} g_{\alpha j} g^{aj} = -\beta_i^{\alpha} \delta_{\alpha}^j = -\beta_i^j$$

Y, de esta suerte, las ecuaciones de Weingarten se pueden escribir así

$$N_i = -b_i^{\alpha} x_{\alpha}, \quad i = 1, 2 \quad (10.28)$$

en donde b_i^j y b_{ij} se relacionan por medio de las igualdades

$$b_i^j = g^{aj} b_{ia} \quad \text{y} \quad b_{ij} = g_{aj} b_i^a \quad (10.29)$$

Aquí, los b_{ij} son las componentes de un tensor covariante absoluto de segundo orden y los b_i^j las componentes de un tensor absoluto de segundo orden, contravariante de primer orden y covariante de primer orden.

En seguida, definimos los *símbolos de Riemann de segunda clase*, a saber

$$R_{mijk} = b_{ik} b_{jm} - b_{ij} b_{km} \quad (10.30)$$

y sus asociados, los *símbolos de Riemann de primera clase*, a saber

$$R_{ijk}^p = g^{ap} R_{aijk} \quad (10.31)$$

Vemos que los R_{mijk} son las componentes de un tensor covariante absoluto de cuarto orden, y los R_{ijk}^p , las componentes de un tensor absoluto de cuarto orden, covariante de tercer orden y contravariante de primer orden, que reciben, en su orden, los nombres de *tensor covariante de curvatura de Riemann* y *tensor mixto de curvatura de Riemann*. De las ecuaciones (10.29) y (10.31) se desprende que

$$R_{ijk}^p = g^{ap} (b_{ik} b_{ja} - b_{ij} b_{ka}) = b_{ik} b_j^p - b_{ij} b_k^p \quad (10.32)$$

Observemos en la (10.30) que los R_{mijk} son hemisimétricas respecto de los dos primeros y de los dos últimos índices, es decir,

$$R_{imjk} = -R_{mijk} \quad \text{y} \quad R_{mikj} = -R_{mijk} \quad (10.33)$$

De modo que $R_{imjk} = 0$ siempre que sean iguales los dos primeros o los dos últimos índices. Por ello, sólo cuatro de las componentes son diferentes de cero, a saber,

$$R_{1212} = R_{2121} = b_{22} b_{11} - b_{12} b_{21} = LN - M^2 = b \quad (10.34)$$

$$\text{y} \quad R_{1221} = R_{2112} = b_{12} b_{21} - b_{22} b_{11} = -(LN - M^2) = -b \quad (10.35)$$

Si bien los tensores de curvatura se definieron en función de los coeficientes de la segunda forma fundamental, realmente, también se pueden expresar sólo en función de los coeficientes

de la primera forma fundamental, es decir, de tensores métricos y de sus derivadas. En el problema 10.29 de la página 239, se demostrará el

$$\text{Teorema 10.9.} \quad R_{mijk} = \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{ikm} - \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{ijm} + \Gamma_{ij}^{\alpha} \Gamma_{mka} - \Gamma_{ik}^{\alpha} \Gamma_{mja}$$

Como los símbolos de Christoffel sólo dependen de tensores métricos y de sus derivadas, entonces lo mismo debe ocurrir con los tensores de curvatura. Obsérvese que lo dicho es equivalente al teorema de Gauss, pues, según la ecuación (10.34), la curvatura de Gauss es

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{b}{g} = \frac{R_{1212}}{g}$$

Problemas resueltos

TEORIA DE LAS SUPERFICIES

10.1. Demostrar que las ecuaciones de Gauss-Weingarten para una carta de Monge, dada por $\mathbf{x} = ue_1 + ve_2 + f(u, v)e_3$, son

$$\begin{aligned}g\mathbf{x}_{uu} &= p\mathbf{r}\mathbf{x}_u + q\mathbf{r}\mathbf{x}_v + rg^{1/2}\mathbf{N} & g^{3/2}\mathbf{N}_u &= (spq - rq^2 - r)\mathbf{x}_u + (rpq - sp^2 - s)\mathbf{x}_v \\ g\mathbf{x}_{uv} &= p\mathbf{s}\mathbf{x}_u + q\mathbf{s}\mathbf{x}_v + sg^{1/2}\mathbf{N} & g^{3/2}\mathbf{N}_v &= (tpq - sq^2 - s)\mathbf{x}_u + (spq - tp^2 - t)\mathbf{x}_v \\ g\mathbf{x}_{vv} &= p\mathbf{t}\mathbf{x}_u + q\mathbf{t}\mathbf{x}_v + tg^{1/2}\mathbf{N}\end{aligned}$$

en donde, $p = f_u$, $q = f_v$, $r = f_{uu}$, $s = f_{uv}$, $t = f_{vv}$, $g = 1 + p^2 + q^2$.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \mathbf{e}_1 + p\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_v = \mathbf{e}_2 + q\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{uu} = r\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{uv} = s\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{x}_{vv} = t\mathbf{e}_3 \\ E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1 + p^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = pq, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1 + q^2 \\ EG - F^2 &= 1 + p^2 + q^2 = g, \quad \mathbf{N} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v / |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = -(p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)/g^{1/2} \\ L &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = r/g^{1/2}, \quad M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = s/g^{1/2}, \quad N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = t/g^{1/2} \\ E_u &= 2pr, \quad E_v = 2ps, \quad F_u = ps + qr, \quad F_v = pt + qs, \quad G_u = 2qs, \quad G_v = 2qt\end{aligned}$$

De las ecuaciones (10.2) y (10.4) se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= pr/g & \Gamma_{12}^1 &= ps/g & \Gamma_{22}^1 &= pt/g \\ \Gamma_{11}^2 &= qr/g & \Gamma_{12}^2 &= qs/g & \Gamma_{22}^2 &= qt/g \\ \beta_1^1 &= (spq - rq^2 - r)/g^{3/2} & \beta_2^1 &= (tpq - sq^2 - s)/g^{3/2} \\ \beta_1^2 &= (rpq - sp^2 - s)/g^{3/2} & \beta_2^2 &= (spq - tp^2 - t)/g^{3/2}\end{aligned}$$

de donde se desprende el resultado buscado.

10.2. Con la ayuda de las ecuaciones de Weingarten, demostrar que

$$\text{III} - 2H\text{II} + K\text{I} = 0$$

en donde la tercera forma fundamental, $\text{III} = d\mathbf{N} \cdot d\mathbf{N}$, H es la curvatura media y K la curvatura gaussiana.

Con la ayuda de la ecuación (10.2) de la página 214, se obtiene

$$\begin{aligned} N_u \cdot N_u &= (\beta_1^1 x_u + \beta_1^2 x_v) \cdot (\beta_1^1 x_u + \beta_1^2 x_v) \\ &= \frac{(MF - LG)^2 E}{(EG - F^2)^2} + \frac{2(MF - LG)(LF - ME)F}{(EG - F^2)^2} + \frac{(LF - ME)^2 G}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(-2LMF + L^2G + EM^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{(EN - 2MF + LG)L - (LN - M^2)E}{EG - F^2} \\ &= 2HL - KE \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} N_v \cdot N_v &= (\beta_2^1 x_u + \beta_2^2 x_v) \cdot (\beta_2^1 x_u + \beta_2^2 x_v) \\ &= \frac{(MF - LG)(NF - MG)E}{(EG - F^2)^2} + \frac{(NF - MG)(LF - ME)F}{(EG - F^2)^2} \\ &\quad + \frac{(MF - LG)(MF - NE)G}{(EG - F^2)^2} + \frac{(LF - ME)(MF - NE)E}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(MEN - M^2F + LGM - FLN)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{(EN - 2MF + LG)M}{EG - F^2} - \frac{(LN - M^2)F}{EG - F^2} \\ &= 2HM - KF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Además } N_u \cdot N_v &= (\beta_1^1 x_u + \beta_1^2 x_v) \cdot (\beta_2^1 x_u + \beta_2^2 x_v) \\ &= \frac{(NF - MG)^2 E}{(EG - F^2)^2} + \frac{2(NF - MG)(MF - NE)F}{(EG - F^2)^2} + \frac{(MF - NE)^2 G}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{(EN^2 - 2MFN + M^2G)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{(EN - 2MF + LG)N}{EG - F^2} - \frac{(LN - M^2)G}{EG - F^2} \\ &= 2HN - KG \end{aligned}$$

De ello se deduce que

$$\begin{aligned} III &= dN \cdot dN = (N_u du + N_v dv) \cdot (N_u du + N_v dv) = N_u \cdot N_u du^2 + 2N_u \cdot N_v du dv + N_v \cdot N_v dv^2 \\ &= (2HL - KE) du^2 + 2(2HM - KF) du dv + (2HN - KG) dv^2 \\ &= 2H(L du^2 + 2M du dv + N dv^2) - K(E du^2 + 2F du dv + G dv^2) = 2HII - KI \end{aligned}$$

lo cual proporciona el resultado deseado.

10.3. Demostrar que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k se expresan por medio de las ecuaciones (10.4) de la página 215.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} x_u \cdot x_{uu} &= \frac{1}{2}(x_u \cdot x_u)_u = \frac{1}{2}E_u, & x_u \cdot x_{uv} &= \frac{1}{2}(x_u \cdot x_v)_u = \frac{1}{2}E_v \\ x_v \cdot x_{vv} &= \frac{1}{2}(x_v \cdot x_v)_v = \frac{1}{2}G_v, & x_v \cdot x_{uv} &= \frac{1}{2}(x_v \cdot x_u)_v = \frac{1}{2}G_u \end{aligned}$$

Además, utilizando lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} F_u &= (x_u \cdot x_v)_u = x_{uu} \cdot x_v + x_u \cdot x_{uv} = x_{uu} \cdot x_v + \frac{1}{2}E_v \\ F_v &= (x_u \cdot x_v)_v = x_{uv} \cdot x_u + x_u \cdot x_{vv} = \frac{1}{2}G_u + x_u \cdot x_{vv} \end{aligned}$$

De donde

$$x_v \cdot x_{uu} = F_u - \frac{1}{2}E_v, \quad x_u \cdot x_{vv} = F_v - \frac{1}{2}G_u$$

Y, según la ecuación de Gauss y teniendo en cuenta lo anterior, se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E_u &= x_u \cdot x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u \cdot x_u + \Gamma_{11}^2 x_u \cdot x_v = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v &= x_v \cdot x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_v \cdot x_u + \Gamma_{11}^2 x_v \cdot x_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \\ \frac{1}{2}E_v &= x_u \cdot x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u \cdot x_u + \Gamma_{12}^2 x_u \cdot x_v = \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F \\ \frac{1}{2}G_u &= x_v \cdot x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_v \cdot x_u + \Gamma_{12}^2 x_v \cdot x_v = \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G \\ F_v - \frac{1}{2}G_u &= x_u \cdot x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u \cdot x_u + \Gamma_{22}^2 x_u \cdot x_v = \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F \\ \frac{1}{2}G_v &= x_v \cdot x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_v \cdot x_u + \Gamma_{22}^2 x_v \cdot x_v = \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G \end{aligned}$$

Al resolver las dos primeras ecuaciones para Γ_{11}^1 y Γ_{11}^2 , las dos siguientes para Γ_{12}^1 y Γ_{12}^2 , y las dos últimas para Γ_{22}^1 y Γ_{22}^2 , se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_v - FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

que son los resultados que se esperaban.

10.4. Demostrar que $K(EG - F^2)^2 = [x_{uu}x_vx_v][x_{vv}x_uu] - [x_{uv}x_uu]^2$.

$$L = x_{uu} \cdot N = x_{uu} \cdot x_u \times x_v / |x_u \times x_v| = [x_{uu}x_ux_v] / |x_u \times x_v|$$

$$M = x_{uv} \cdot N = [x_{uv}x_ux_v] / |x_u \times x_v|, \quad N = x_{vv} \cdot N = [x_{vv}x_uu] / |x_u \times x_v|$$

$$\text{De este modo,} \quad LN - M^2 = \frac{[x_{uu}x_ux_v][x_{vv}x_uu] - [x_{uv}x_uu]^2}{|x_u \times x_v|^2}$$

$$\text{Además,} \quad |x_u \times x_v|^2 = (x_u \times x_v) \cdot (x_u \times x_v) = (x_u \cdot x_u)(x_v \cdot x_v) - (x_u \cdot x_v)^2 = EG - F^2$$

$$\text{Por tanto,} \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{[x_{uu}x_ux_v][x_{vv}x_uu] - [x_{uv}x_uu]^2}{(EG - F^2)^2}$$

10.5. Con base en el resultado del anterior problema, demostrar que

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= (F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu})(EG - F^2) \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} 0 & F_v - \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obsérvese que esta es una demostración directa del teorema de Gauss.

Vemos que

$$\begin{aligned} [abc][def] &= \det \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} a \cdot d & b \cdot d & c \cdot d \\ a \cdot e & b \cdot e & c \cdot e \\ a \cdot f & b \cdot f & c \cdot f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De acuerdo con el problema 10.4 y los cálculos del 10.3, se tiene

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= \det \begin{pmatrix} x_{uu} \cdot x_{vv} & x_u \cdot x_{vv} & x_v \cdot x_{vv} \\ x_{uu} \cdot x_u & x_u \cdot x_u & x_v \cdot x_u \\ x_{uu} \cdot x_v & x_u \cdot x_v & x_v \cdot x_v \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_{uv} \cdot x_{uv} & x_u \cdot x_{uv} & x_v \cdot x_{uv} \\ x_{uv} \cdot x_u & x_u \cdot x_u & x_v \cdot x_u \\ x_{uv} \cdot x_v & x_u \cdot x_v & x_v \cdot x_v \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x_{uu} \cdot x_{vv} & F_v - \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_{uv} \cdot x_{uv} & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como ambos determinantes tienen común el menor $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, se deduce que

$$\begin{aligned} K(EG - F^2)^2 &= (x_{uu} \cdot x_{vv} - x_{uv} \cdot x_{uv})(EG - F^2) \\ &\quad + \det \begin{pmatrix} 0 & F_v - \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & E & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & F & G \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En el problema 10.3 obtuvimos que $x_{uu} \cdot x_v = F_u - \frac{1}{2}E_v$ y $x_{uv} \cdot x_v = \frac{1}{2}G_u$. Por tanto,

$$(F_u - \frac{1}{2}E_v)_v = (x_{uu} \cdot x_v)_v = x_{uuv} \cdot x_v + x_{uu} \cdot x_{vv}, \quad (\frac{1}{2}G_u)_u = (x_{uv} \cdot x_u)_u = x_{uvu} \cdot x_u + x_{uv} \cdot x_{uu}$$

Por sustracción, se tiene,

$$x_{uu} \cdot x_{vv} - x_{uv} \cdot x_{uv} = (F_u - \frac{1}{2}E_v)_v - \frac{1}{2}G_{uu} = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}$$

que era lo que se buscaba.

- 10.6. Demostrar que, si las curvas de parámetros de una carta son líneas de curvatura, entonces las ecuaciones (10.7) de Codazzi-Mainardi adoptan la siguiente forma

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} (\kappa_2 - \kappa_1), \quad \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G} (\kappa_1 - \kappa_2)$$

en donde κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales.

Si las curvas de parámetros son líneas de curvatura, entonces, $F = M = 0$. En ese caso, las ecuaciones (10.7) se reducen a

$$L_v = L\Gamma_{12}^1 - N\Gamma_{11}^2 = \frac{LGE_v}{2EG} + \frac{NEE_v}{2EG} = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right)$$

$$y \quad N_u = -L\Gamma_{22}^1 + N\Gamma_{12}^2 = \frac{LGG_u}{2EG} + \frac{NEG_u}{2EG} = \frac{1}{2} G_u \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right)$$

$$\text{o sea,} \quad \left(\frac{L}{E} \right)_v = \frac{E_v}{2E} \left(\frac{N}{G} - \frac{L}{E} \right) \quad y \quad \left(\frac{N}{G} \right)_u = \frac{G_u}{2G} \left(\frac{L}{E} - \frac{N}{G} \right)$$

Pero, según el teorema 9.13 de la página 198, si las curvas de parámetros son líneas de curvatura, entonces $\kappa_1 = L/E$ y $\kappa_2 = N/G$, que era lo que se deseaba tener.

- 10.7. Demostrar que no existe en E^3 ninguna superficie compacta de clase ≥ 2 cuya curvatura gaussiana sea $K \leq 0$.

Supongamos lo contrario, es decir, que existe una superficie compacta de clase ≥ 2 con $K \leq 0$ en cada uno de sus puntos. Y consideremos la función numérica en los reales, $f(P) = |\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, en que \mathbf{x} es el punto P . Dejamos como ejercicio al lector la demostración de que f es continua en S . Por consiguiente, según el teorema 6.9 de la página 118, f adopta su máximo, llamémoslo $f(P_0) = |\mathbf{x}_0|^2 = r^2$, en algún punto P_0 de S . Obsérvese que es $r^2 > 0$. Si no, tendríamos $f = 0$ en S , pues $f \geq 0$ y r^2 es su máximo. Pero, en ese caso, S estaría formado por el único punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo cual es imposible. Consideremos, ahora, que sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta de S que contenga a P_0 y tal que las curvas de parámetro u y las de parámetro v posean direcciones principales en P_0 . Como $f(P) = f(\mathbf{x}(u, v))$ tiene un máximo en P_0 , entonces,

$$\text{en } P_0. \text{ Además,} \quad \partial f / \partial u = 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_u = 0 \quad y \quad \partial f / \partial v = 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$\partial^2 f / \partial u^2 = 2\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_{uu} \leq 0 \quad y \quad \partial^2 f / \partial v^2 = 2\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_{vv} \leq 0$$

en P_0 . De las dos primeras ecuaciones anteriores deducimos que \mathbf{x} es ortogonal a \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v en P_0 . Por lo tanto, será $\mathbf{N} = \pm \mathbf{x} / |\mathbf{x}| = \pm \mathbf{x} / r$ en P_0 . Podemos suponer que el sentido de \mathbf{N} es tal que $\mathbf{N} = \mathbf{x} / r$. Sustituyendo en las dos últimas ecuaciones precedentes, obtendremos que $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + r\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} \leq 0$ y $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + r\mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} \leq 0$, o sea, $E + rL \leq 0$ y $G + rN \leq 0$, es decir, $L/E \leq -1/r < 0$ y $N/G \leq -1/r < 0$ en P_0 . Y como las curvas de parámetro u y las de parámetro v tienen direcciones principales en P_0 , según el teorema 9.11, tenemos que $\kappa_1 = L/E$ y $\kappa_2 = N/G$, y, en consecuencia, según lo anterior, es $K = \kappa_1 \kappa_2 = LN/EG \geq 1/r^2 > 0$ en P_0 , lo cual también es imposible, porque $K \leq 0$ en S . En esta forma queda demostrada la proposición.

- 10.8. Demostrar que $f(P) = [\kappa_1(P) - \kappa_2(P)]^2$ es una función continua en una superficie.

Recordemos que las curvaturas principales en un punto P de una superficie S dependen de la orientación de la carta que contenga a P , y que cambian de signo al variar el sentido de \mathbf{N} . De esta suerte, a no ser que S sea orientable, podría ocurrir que resultare imposible definir las propias $\kappa_1(P)$ y $\kappa_2(P)$ como funciones continuas en toda la extensión de S . Obsérvese, sin embargo, que f no depende del cambio de signo de κ_1 y κ_2 y, en consecuencia, resulta ser una propiedad intrínseca de S , independiente de la carta que contenga a P .

Para demostrar que f es continua en un punto P_0 , supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta que contiene a P_0 . Como κ_1 y κ_2 son funciones continuas de los primeros y de los segundos coeficientes

fundamentales, entonces $f(P) = f(\mathbf{x}(u, v))$ será una función continua de u y v . De tal suerte que, dado un $\epsilon > 0$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|f(\mathbf{x}(u, v)) - f(\mathbf{x}(u_0, v_0))| < \epsilon$, si (u, v) pertenece a $S_{\delta_1}(u_0, v_0)$. Según el problema 8.13 de la página 175, la imagen M de $S_{\delta_1}(u_0, v_0)$ en S es la intersección con S de un conjunto abierto O de E^3 . De esto se colige que existe en E^3 un $S_\delta(\mathbf{x}_0)$ tal que la $S_\delta(\mathbf{x}_0) \cap S$ está contenida en M . De modo que, si \mathbf{x} pertenece a $S_\delta(\mathbf{x}_0) \cap S$, tenemos que $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$. Con lo cual se verifica que f es continua en P_0 y queda demostrada la proposición.

- 10.9. Demostrar el lema de Hilbert, a saber: Si en un punto P_0 de una superficie de clase suficientemente alta, se tiene que: (i) $\kappa_1(P_0)$ es un máximo local, (ii) $\kappa_2(P_0)$ es un mínimo local, (iii) $\kappa_1(P_0) > \kappa_2(P_0)$, entonces $K(P_0) \leq 0$.

Como quiera que $\kappa_1(P_0) \neq \kappa_2(P_0)$, entonces P_0 no es un punto umbilical. De esta suerte, según el teorema 9.10 de la página 197, existe una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ que contiene a P_0 y cuyas curvas de parámetro son líneas de curvatura. Del problema 10.6 se desprende que

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} = \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} (\kappa_2 - \kappa_1) \quad y \quad \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G} (\kappa_1 - \kappa_2)$$

$$\text{Derivando,} \quad \frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{EE_{vv} - E_v^2}{E^2} \right) (\kappa_2 - \kappa_1) + \frac{1}{2} \frac{E_v}{E} (\kappa_2 - \kappa_1)_v$$

$$\frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{GG_{uu} - G_u^2}{G^2} \right) (\kappa_1 - \kappa_2) + \frac{1}{2} \frac{G_u}{G} (\kappa_1 - \kappa_2)_u$$

Como quiera que κ_1 y κ_2 son valores extremos en P_0 , entonces $\partial \kappa_1 / \partial v = \partial \kappa_2 / \partial u = 0$ en P_0 . Además, $\kappa_1 \neq \kappa_2$ en P_0 . De esta suerte, de las dos primeras ecuaciones precedentes, sale que $E_v = G_u = 0$ en P_0 . Al sustituir estos valores en el segundo par de ecuaciones anteriores, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 \kappa_1}{\partial v^2} = \frac{1}{2} \frac{E_{vv}}{E} (\kappa_2 - \kappa_1) \quad y \quad \frac{\partial^2 \kappa_2}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{G_{uu}}{G} (\kappa_1 - \kappa_2)$$

Como κ_1 es un máximo en P_0 , entonces $\partial^2 \kappa_1 / \partial v^2 \leq 0$ en ese punto. Por otra parte, es $\kappa_1 > \kappa_2$ en P_0 y $E > 0$. Por tanto, según la primera de las ecuaciones anteriores, $E_{vv} \geq 0$ en P_0 . Como κ_2 es un mínimo en P_0 , entonces $\partial^2 \kappa_2 / \partial u^2 \geq 0$ en ese punto. Además, es $G > 0$. Por tanto, es $G_{uu} \geq 0$ en P_0 . Por último, puesto que las curvas de parámetros son líneas de curvatura, tenemos que $F = M = 0$. Además, en P_0 , es $E_v = 0$ y $G_u = 0$. Del problema 10.5 se desprende que, en P_0 , es

$$K = -\frac{1}{2} \frac{E_{vv} + G_{uu}}{EG}$$

Y como $E_{vv} \geq 0$ y $G_{uu} \geq 0$, se concluye que es $K \leq 0$, que era el resultado que se buscaba.

- 10.10. Demostrar el teorema 10.7, a saber: Las esferas son las únicas superficies de clase suficientemente alta, conexas y compactas que poseen curvatura gaussiana constante.

Supongamos que S es una superficie conexa y compacta que tiene $K = \text{constante}$. Según el problema 10.7, en ningún punto de S puede ser $K \leq 0$. Por ello, podemos suponer que sea $K = \text{constante} > 0$. Ahora, bien: Si fuera posible demostrar que cada uno de los puntos de S es un punto umbilical esférico, entonces, del teorema 10.5 de la página 219, se deduciría que S es una superficie esférica, y la demostración habría concluido. Para demostrar que cualquier punto de S es umbilical esférico, consideremos la función $f(P) = [\kappa_1(P) - \kappa_2(P)]^2$. Según el problema 10.8, $f(P)$ es continua en S . Como S es compacta, entonces f adopta un máximo absoluto en algún punto P_0 de S . Supongamos, ahora, que $f > 0$ en P_0 . Como f es continua en P_0 , entonces es $f > 0$ en algún entorno $S(P_0)$. Y como es $f = (\kappa_1 - \kappa_2)^2 > 0$ en $S(P_0)$, entonces $\kappa_1 \neq \kappa_2$ en $S(P_0)$. Por otra parte, κ_1 y κ_2 tienen el mismo signo en $S(P_0)$ porque $K = \kappa_1 \kappa_2 > 0$ en $S(P_0)$. De modo que podemos suponer que $\kappa_1 > \kappa_2 > 0$ en $S(P_0)$. Como $\kappa_1 - \kappa_2 > 0$ en $S(P_0)$ y $(\kappa_1 - \kappa_2)^2$ tiene un máximo en P_0 , se colige que $\kappa_1 - \kappa_2$ tiene un máximo local en P_0 . Como $K = \kappa_1 \kappa_2 = \text{constante} > 0$, κ_2 decrece cuando κ_1 crece y se concluye que κ_1 tiene un máximo local en P_0 y κ_2 , un mínimo local en el mismo punto. En esta forma, vemos que si $f > 0$ en P_0 , entonces: (i) κ_1 tiene un máximo local en P_0 , (ii) κ_2 tiene un mínimo local en P_0 , y (iii) $\kappa_1 > \kappa_2$ en P_0 . Del problema 10.9 se colige que $K \leq 0$ en P_0 . Pero, esto resulta imposible, pues $K > 0$ en S . De esta suerte, f no es positiva en P_0 . Pero, ocurre que f adopta su máximo en P_0 y es $f(P) \geq 0$ para cualquier P . En consecuencia, es $f = 0$ en S . De aquí se deduce que $\kappa_1 = \kappa_2$ en todo P de S . Y como las curvaturas principales son valores extremos de la curvatura normal en P , y, además, es $K > 0$, se concluye que la curvatura normal

es $\kappa = \text{constante} \neq 0$ en todo punto P . En otras palabras, cualquier punto de S es un punto umbilical esférico y, en consecuencia, S es una superficie esférica.

TENSORES

10.11. Demostrar que si $v^i = a_\alpha^i u^\alpha$ y $w^i = b_\alpha^i v^\alpha$, entonces, $w^i = b_\alpha^i a_\beta^\alpha u^\beta$.

Escribase: $v^\alpha = \sum_\beta a_\beta^\alpha u^\beta$. De donde,

$$w^i = \sum_\alpha b_\alpha^i v^\alpha = \sum_\alpha b_\alpha^i \sum_\beta a_\beta^\alpha u^\beta = \sum_\alpha \sum_\beta b_\alpha^i a_\beta^\alpha u^\beta = b_\alpha^i a_\beta^\alpha u^\beta$$

10.12. Demostrar que $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j$, $\alpha, i, j = 1, 2$, sabiendo que los $g^{\alpha j}$ quedaron definidos en la ecuación (10.11).

$$g_{1\alpha} g^{\alpha 1} = g_{11} g^{11} + g_{12} g^{21} = g_{11} g_{22}/g - g_{12} g_{12}/g = g/g = 1$$

$$g_{1\alpha} g^{\alpha 2} = g_{11} g^{12} + g_{12} g^{22} = -g_{11} g_{12}/g + g_{12} g_{11}/g = 0$$

$$g_{2\alpha} g^{\alpha 1} = g_{21} g^{11} + g_{22} g^{21} = g_{21} g_{22}/g - g_{22} g_{12}/g = 0$$

$$g_{2\alpha} g^{\alpha 2} = g_{21} g^{12} + g_{22} g^{22} = -g_{21} g_{12}/g + g_{22} g_{11}/g = g/g = 1$$

Y, en consecuencia, $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} = \delta_i^j$

10.13. Demostrar que $\delta_{ij}^{pq} = \delta_i^p \delta_j^q - \delta_j^p \delta_i^q$, sabiendo que los δ_{ij}^{pq} se definieron en el ejemplo 10.7(b) de la página 225.

Supongamos que $A_{ij}^{pq} = \delta_i^p \delta_j^q - \delta_j^p \delta_i^q$. Es evidente que $A_{ij}^{pq} = 0$, si $i = j$. Supongamos, ahora, que $i \neq j$ y $p \neq i$. Entonces, será: $\delta_i^p = 0$ y $A_{ij}^{pq} = 0$, a menos que $p = j$ y $q = i$; en ese caso, será $A_{ij}^{pq} = -1$. Si $i \neq j$ y $p = i$, entonces, $\delta_j^p = 0$. Por tanto, $A_{ij}^{pq} = 0$, a no ser que, también, sea $q = j$; en ese caso, será $A_{ij}^{pq} = 1$. En esta forma se tiene que

$$A_{ij}^{pq} = \begin{cases} 1, & \text{si } i \neq j, p = i, q = j \\ -1, & \text{si } i \neq j, q = i, p = j \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases} = \delta_{ij}^{pq}$$

que era lo que se deseaba demostrar.

10.14. Demostrar que los δ_{ij}^{pq} del problema precedente son las componentes de un tensor absoluto, covariante de segundo orden y contravariante de segundo orden.

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\sigma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} &= (\delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\sigma) \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\sigma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \\ &= \left(\delta_\alpha^\gamma \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\gamma} \right) \left(\delta_\beta^\sigma \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\sigma} \right) \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \right) - \left(\delta_\beta^\gamma \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\gamma} \right) \left(\delta_\alpha^\sigma \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\sigma} \right) \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} - \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\beta} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \right) \left(\frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \right) \\ &= \delta_i^p \delta_j^q - \delta_j^p \delta_i^q = \delta_{ij}^{pq} = \delta_{ij}^{pq} \end{aligned}$$

De modo que los δ_{ij}^{pq} son las componentes de un tensor absoluto covariante de segundo orden y contravariante de segundo orden.

Otro método. Los productos $\delta_i^p \delta_j^q$ y $\delta_j^p \delta_i^q$ son los productos externos de tensores absolutos mixtos covariantes de primer orden y contravariantes de primer orden. De donde se desprende que son las componentes de tensores absolutos covariantes de segundo orden y contravariantes de segundo orden. Y de ello se deduce que las diferencias

$$\delta_{ij}^{pq} = \delta_i^p \delta_j^q - \delta_j^p \delta_i^q$$

son las componentes de un tensor absoluto covariante de segundo orden y contravariante de segundo orden.

10.15. Demostrar que la contracción A_α^α de las componentes A_i^j de un tensor mixto absoluto es un invariante escalar.

Comoquiera que $\tilde{A}_i^j = A_\alpha^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\beta}$, tenemos que $\tilde{A}_\gamma^\gamma = A_\alpha^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^\gamma}{\partial u^\beta}$. De la ecuación (10.16) de la página 222, sale que $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^\gamma}{\partial u^\beta} = \delta_\beta^\alpha$. Y, en consecuencia, $\tilde{A}_\gamma^\gamma = A_\alpha^\beta \delta_\beta^\alpha = A_\alpha^\alpha$, que es el resultado esperado.

10.16. Demostrar que si \tilde{A}_{ij}^{pq} son las componentes de un tensor contravariante de segundo orden, covariante de segundo orden, y de peso N , entonces la contracción $\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ representa las componentes de un tensor mixto contravariante de primer orden, covariante de primer orden, y de peso N .

Puesto que $\tilde{A}_{ij}^{pq} = \left[\det \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^q}{\partial u^\sigma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j}$, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}^{\alpha\beta} &= \left[\det \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^\gamma} \frac{\partial \tilde{u}^\beta}{\partial u^\sigma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \\ &= \left[\det \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} \delta_\gamma^\alpha \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^\sigma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} = \left[\det \left(\frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\alpha\beta}^{\alpha\sigma} \frac{\partial \tilde{u}^\alpha}{\partial u^\sigma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^i} \end{aligned}$$

Es decir, los $\tilde{A}_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ se transforman del mismo modo que un tensor mixto absoluto de peso N , que era lo que se quería demostrar.

10.17. Demostrar que si $\tilde{u}^i = \tilde{u}^i(u^1, \dots, u^n)$, $i = 1, \dots, n$, es una transformación admisible de coordenadas en una variedad coordinada de n dimensiones y $u^i = u^i(\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^n)$ es su inversa, entonces $\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} = \delta_i^j$.

Según la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial \tilde{u}^i} = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^i} + \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^i} + \dots + \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^n} \frac{\partial u^n}{\partial \tilde{u}^i} = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i}$$

Pero, $\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial \tilde{u}^i} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en los demás casos} \end{cases} = \delta_i^j$. Así, pues, $\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} = \delta_i^j$.

10.18. Demostrar que si $A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ y $B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ son las componentes de dos tensores A y B , contravariante y covariante de órdenes iguales y de iguales pesos, entonces

$$C_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = A_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + B_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

son las componentes de un tensor, contravariante y covariante de iguales órdenes y pesos que A y B .

$$\tilde{C}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} = \tilde{A}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} + \tilde{B}_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_r}}{\partial u^{\alpha_r}} + \left[\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N B_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_s}}{\partial u^{\alpha_s}} \\
&= \left[\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N [A_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} + B_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}] \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_r}}{\partial u^{\alpha_r}} \\
&= \left[\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N C_{\beta_1 \dots \beta_{r+s}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r+s}} \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{\beta_{r+s}}}{\partial u^{\alpha_{r+s}}}
\end{aligned}$$

que es el resultado que se buscaba.

- 10.19. Demostrar que si las componentes $A_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$ de un tensor son simétricas, respecto de los índices i_1 e i_2 , por ejemplo, entonces, las componentes transformadas

$$\tilde{A}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = \left[\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_1}}{\partial u^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_r}}{\partial u^{\beta_r}}$$

son también simétricas respecto de i_1 e i_2 .

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} &= \left[\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_1}}{\partial u^{\beta_1}} \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_2}}{\partial u^{\beta_2}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_r}}{\partial u^{\beta_r}} \\
&= \left[\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \right) \right]^N A_{\beta_1 \dots \beta_r}^{\alpha_2 \alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_2}}{\partial u^{\beta_1}} \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_1}}{\partial u^{\beta_2}} \dots \frac{\partial \tilde{u}^{\alpha_r}}{\partial u^{\beta_r}} = A_{j_1 \dots j_r}^{i_2 i_1 \dots i_r}
\end{aligned}$$

- 10.20. Si la magnitud $J = C^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta$ es un invariante escalar respecto de las componentes A_i y B_j de dos vectores covariantes cualesquiera, demostrar que $C^{\alpha\beta}$ son las componentes de un tensor contravariante absoluto de segundo orden.

Se da la suma $C^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = \tilde{C}^{\alpha\beta} \tilde{A}_\alpha \tilde{B}_\beta$ para A_i y B_j cualesquiera. De donde,

$$C^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = \tilde{C}^{\alpha\beta} \tilde{A}_\alpha \tilde{B}_\beta = \tilde{C}^{\alpha\beta} A_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\beta} B_\sigma \frac{\partial u^\sigma}{\partial \tilde{u}^\beta} = \tilde{C}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\beta} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \tilde{u}^\beta} A_\alpha B_\sigma$$

Identificando coeficientes, se tiene: $C^{\alpha\beta} = \tilde{C}^{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\beta} \frac{\partial u^\sigma}{\partial \tilde{u}^\beta}$, lo cual nos muestra que los $C^{\alpha\beta}$ son las componentes de un tensor absoluto de segundo orden.

- 10.21. Demostrar que si A_{ij} y B_{ij} son las componentes de dos tensores simétricos, y si x_i y y_i son las componentes de dos vectores contravariantes, tales que

$$(A_{ij} - \kappa_1 B_{ij})x^i = 0, \quad (A_{ij} - \kappa_2 B_{ij})y^i = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \kappa_1 \neq \kappa_2$$

entonces, $A_{ij}x^i x^j = B_{ij}x^i x^j = 0$ y κ_1 es un invariante escalar.

Comoquiera que $(A_{ij} - \kappa_1 B_{ij})x^i = 0$ para todo valor de j , tenemos que $(A_{ij} - \kappa_1 B_{ij})x^i y^j = 0$. Análogamente, de la segunda ecuación se desprende que $(A_{ij} - \kappa_2 B_{ij})y^i x^j = 0$, o sea, $(A_{ij} - \kappa_2 B_{ij})x^i y^j = 0$, porque las A_{ij} y B_{ij} son simétricas. Por sustracción encontramos que $(\kappa_1 - \kappa_2)B_{ij}x^i y^j = 0$. Comoquiera que $\kappa_1 \neq \kappa_2$, entonces $B_{ij}x^i y^j = 0$ y, por tanto, $A_{ij}x^i y^j = 0$. Para demostrar que κ_1 es un invariante escalar, supongamos que los \tilde{x}^i son las componentes de un vector contravariante arbitrario y consideremos la siguiente suma

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_{ij} - \kappa_1 \tilde{B}_{ij})\tilde{x}^i \tilde{x}^j &= (A_{\alpha\beta} - \kappa_1 B_{\alpha\beta}) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \tilde{x}^i \tilde{x}^j = (A_{\alpha\beta} - \kappa_1 B_{\alpha\beta}) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} x^\gamma \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\gamma} x^\sigma \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\sigma} \\
&= (A_{\alpha\beta} - \kappa_1 B_{\alpha\beta}) x^\gamma x^\sigma \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\gamma} \right) \left(\frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^\sigma} \right) \\
&= (A_{\alpha\beta} - \kappa_1 B_{\alpha\beta}) x^\gamma x^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_\sigma^\beta = (A_{\alpha\beta} - \kappa_1 B_{\alpha\beta}) x^\alpha x^\beta
\end{aligned}$$

Puesto que $(A_{\alpha\beta} - \kappa_1 B_{\alpha\beta})x^\alpha = 0$ para cualquier β , entonces $(\tilde{A}_{ij} - \kappa_1 \tilde{B}_{ij})\tilde{x}^i \tilde{x}^j = 0$. Pero, las \tilde{x}^i son arbitrarias. En consecuencia, $(\tilde{A}_{ij} - \kappa_1 \tilde{B}_{ij})\tilde{x}^i = 0$ para todo valor de j . Así, pues, κ_1 es una invariante escalar.

APLICACIONES DE LOS TENSORES

- 10.22. Demostrar que las componentes du^i , $i = 1, 2$, de un vector tangente, $dx = x_\alpha du^\alpha$, se transforman del mismo modo que las componentes de un vector contravariante. Se denominan componentes *contravariantes* de dx .

Supongamos que $\tilde{u}^i = \tilde{u}^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2$, es una transformación admisible de parámetros y que tiene como inversa a $u^i = u^i(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$, $i = 1, 2$. Entonces, de acuerdo con la regla de la cadena, $x_\alpha = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{u}^2} \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha}$. De esto se infiere que $dx = x_\alpha du^\alpha = \frac{\partial x}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha = \frac{\partial x}{\partial \tilde{u}^i} d\tilde{u}^i$. Por tanto, $du^i = du^\alpha \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^\alpha}$, que es el resultado que se buscaba.

- 10.23. Demostrar que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$.

Derivando a $g_{ij} = x_i \cdot x_j$ respecto de u^k , se tiene: $\partial g_{ij} / \partial u^k = x_{ik} \cdot x_j + x_i \cdot x_{jk}$. Y, por definición, $\Gamma_{ijk} = x_{ij} \cdot x_k$. Y, en consecuencia, $\partial g_{ij} / \partial u^k = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$.

- 10.24. Demostrar que $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right]$.

Según el problema anterior, $\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij}$, $\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk}$, y $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki}$.

Puesto que $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}$ para cualesquiera i, j, k , entonces $\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2\Gamma_{ijk}$.

- 10.25. Demostrar que $\frac{\partial g}{\partial u^i} = 2g\Gamma_{ai}^\alpha$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) = \frac{\partial g_{11}}{\partial u^i} g_{22} + g_{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^i} - 2g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^i} \\
&= g \left[g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^i} + g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^i} + 2g^{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^i} \right] = g g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

en donde se ha utilizado la ecuación (10.11) de la página 220. De acuerdo con el problema 10.23, se tiene

$$\frac{\partial g}{\partial u^i} = g g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha i\beta} + \Gamma_{\beta i\alpha}) = g (g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha i\beta} + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta i\alpha}) = g (\Gamma_{\alpha i}^\alpha + \Gamma_{\beta i}^\beta) = 2g\Gamma_{ai}^\alpha$$

en donde se ha utilizado la igualdad $\Gamma_{ij}^\alpha = g^{k\alpha} \Gamma_{ijk}$, y se ha remplazado el índice mudo β por el α .

- 10.26. Demostrar que $R_{mijk} = g_{am} R_{ijk}^\alpha$.

Según la (10.31) de la página 228, es $g_{am} R_{ijk}^\alpha = g_{am} g^{\beta\alpha} R_{\beta ijk} = \delta_m^\alpha R_{\beta ijk} = R_{mijk}$.

- 10.27. Demostrar que los símbolos de Christoffel de primera clase se transforman de acuerdo con la siguiente ley

$$\tilde{\Gamma}_{ijk} = \left\{ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \right\} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k}$$

Recordemos que los g_{jk} son las componentes de un tensor covariante de segundo orden. De modo que $\tilde{g}_{jk} = g_{\beta\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k}$. Derivando respecto de \tilde{u}^i , se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial \tilde{u}^i} &= \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial^2 u^\beta}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^k} \\
&= \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^k}
\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la regla de la cadena, a saber, $\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \tilde{u}^i} = \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i}$, cambiando los índices mudos y utilizando el hecho de que $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. De modo análogo,

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ki}}{\partial \tilde{u}^j} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^j \partial \tilde{u}^k} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^j \partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k}$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial \tilde{u}^k} = \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^k} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^j} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^k \partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^j} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^k \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^i}$$

De la ecuación (10.25) de la página 227, se desprende que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ijk} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial \tilde{u}^i} + \frac{\partial \tilde{g}_{ki}}{\partial \tilde{u}^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial \tilde{u}^k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right] \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} \\ &= \left\{ \Gamma_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} + g_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \tilde{u}^i \partial \tilde{u}^j} \right\} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \tilde{u}^k} \end{aligned}$$

10.28. Demostrar el teorema 10.2, a saber: Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta de una superficie de clase ≥ 2 tal que los coeficientes de las ecuaciones de Gauss-Weingarten sean de clase C^1 . Entonces, las derivadas mixtas \mathbf{x}_{uvv} , \mathbf{x}_{uvu} , \mathbf{x}_{vuv} , \mathbf{x}_{vvu} existen y satisfacen la ecuación (10.6) si y sólo si los segundos coeficientes fundamentales satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (10.7) y (10.8).

Como se supone que los coeficientes de las ecuaciones de Gauss, a saber, $\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{x}_\alpha + b_{ij} \mathbf{N}$, son de clase C^1 , es posible calcular sus terceras derivadas, del siguiente modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_{ij}}{\partial u^k} = \mathbf{x}_{ijk} &= (\Gamma_{ij}^\alpha)_k \mathbf{x}_\alpha + \Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{x}_{\alpha k} + (b_{ij})_k \mathbf{N} + b_{ij} \mathbf{N}_k \\ &= (\Gamma_{ij}^\alpha)_k \mathbf{x}_\alpha + \Gamma_{ij}^\alpha [\Gamma_{\alpha k}^\beta \mathbf{x}_\beta + b_{\alpha k} \mathbf{N}] + (b_{ij})_k \mathbf{N} + b_{ij} (-b_k^\alpha \mathbf{x}_\alpha) \\ &= [(\Gamma_{ij}^\alpha)_k + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha - b_{ij} b_k^\alpha] \mathbf{x}_\alpha + [\Gamma_{ij}^\alpha b_{\alpha k} + (b_{ij})_k] \mathbf{N} \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos utilizado la ecuación de Weingarten $\mathbf{N}_i = -b_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha$. Análogamente,

$$\mathbf{x}_{ikj} = [(\Gamma_{ik}^\alpha)_j + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - b_{ik} b_j^\alpha] \mathbf{x}_\alpha + [\Gamma_{ik}^\alpha b_{\alpha j} + (b_{ik})_j] \mathbf{N}$$

Ahora, bien, las derivadas de tercer orden son independientes del orden en que se ejecute la derivación si y sólo si $\mathbf{x}_{ijk} = \mathbf{x}_{ikj}$, $i, k, j = 1, 2$, o sea, si y sólo si

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ijk} - \mathbf{x}_{ikj} &= [(\Gamma_{ij}^\alpha)_k - (\Gamma_{ik}^\alpha)_j + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha - \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - b_{ij} b_k^\alpha + b_{ik} b_j^\alpha] \mathbf{x}_\alpha \\ &\quad + [\Gamma_{ij}^\alpha b_{\alpha k} + (b_{ij})_k - \Gamma_{ik}^\alpha b_{\alpha j} - (b_{ik})_j] \mathbf{N} = 0 \end{aligned}$$

Puesto que \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 y \mathbf{N} son independientes, la ecuación anterior equivale a estas otras

$$\begin{aligned} (a) \quad &(\Gamma_{ij}^\alpha)_k - (\Gamma_{ik}^\alpha)_j + \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha - \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - b_{ij} b_k^\alpha + b_{ik} b_j^\alpha = 0, \quad \alpha, i, j, k = 1, 2 \\ (b) \quad &\Gamma_{ij}^\alpha b_{\alpha k} + (b_{ij})_k - \Gamma_{ik}^\alpha b_{\alpha j} - (b_{ik})_j = 0, \quad i, j, k = 1, 2 \end{aligned}$$

Consideremos, primero, la ecuación (b). Es evidente que $j = k$ satisface la ecuación. Por otra parte, el primer miembro de la igualdad simplemente cambia de signo si se permutan j y k . De esta suerte, la (b) equivale a las dos ecuaciones que se obtienen al hacer $i = 1, j = 1, k = 2$ e $i = 2, j = 1, k = 2$, a saber

$$(b_{11})_2 - (b_{12})_1 = \Gamma_{12}^\alpha b_{\alpha 1} - \Gamma_{11}^\alpha b_{\alpha 2}, \quad (b_{21})_2 - (b_{22})_1 = \Gamma_{22}^\alpha b_{\alpha 1} - \Gamma_{21}^\alpha b_{\alpha 2}$$

Si desarrollamos los segundos miembros de las precedentes ecuaciones y utilizamos las igualdades $b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$, $b_{22} = N$, $u = u^1$ y $v = u^2$, obtenemos las ecuaciones (10.7) de Mainardi-Codazzi; es decir,

$$\begin{aligned} L_v - M_u &= \Gamma_{12}^1 L + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) M - \Gamma_{11}^2 N \\ M_v - N_u &= \Gamma_{22}^1 L + (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) M - \Gamma_{12}^2 N \end{aligned}$$

Consideremos ahora la ecuación (a), que, de acuerdo con la ecuación (10.32), puede escribirse del siguiente modo

$$(c) \quad R_{ijk}^\alpha = (\Gamma_{ik}^\alpha)_j - (\Gamma_{ij}^\alpha)_k + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha, \quad \alpha, i, j, k = 1, 2$$

Y ésta, según la ecuación (10.31) y el problema 10.26, equivale a esta otra

$$R_{pijk} = g_{ap} R_{ijk}^\alpha = g_{ap} (\Gamma_{ik}^\alpha)_j - g_{ap} (\Gamma_{ij}^\alpha)_k + g_{ap} \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - g_{ap} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha$$

Con base en las propiedades de la hemisimetría de R_{pijk} (véase la ecuación (10.33)) y de acuerdo con las ecuaciones, (10.34) y (10.35), se deduce que la anterior ecuación es equivalente a la siguiente

$$R_{1212} = g_{\alpha 1} (\Gamma_{22}^\alpha)_1 - g_{\alpha 1} (\Gamma_{21}^\alpha)_2 + g_{\alpha 1} \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta 1}^\alpha - g_{\alpha 1} \Gamma_{21}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\alpha$$

Al desarrollar y agrupar términos semejantes, se tiene

$$\begin{aligned} R_{1212} &= g_{11} \{ (\Gamma_{22}^1)_1 - (\Gamma_{21}^1)_2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 \} \\ &\quad + g_{21} \{ (\Gamma_{22}^2)_1 - (\Gamma_{21}^2)_2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 \} \end{aligned}$$

Si utilizamos las igualdades $g_{11} = E$, $g_{21} = F$, $u^1 = u$, $u^2 = v$, $\Gamma_{12}^j = \Gamma_{21}^j$, y tenemos en cuenta que, según la ecuación (10.34) es $R_{1212} = LM - N^2$, entonces, se obtiene

$$\begin{aligned} LM - N^2 &= E \{ (\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 \} \\ &\quad + F \{ (\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \} \end{aligned}$$

que es la tercera, (véase la (10.8)), de las ecuaciones de compatibilidad.

10.29. Demostrar el teorema 10.9, a saber: $R_{mijk} = (\Gamma_{ikm})_j - (\Gamma_{ijm})_k + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{mk\alpha} - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{mja}^\alpha$.

De acuerdo con la ecuación (c) del problema 10.28, se tiene

$$R_{ijk}^\alpha = (\Gamma_{ik}^\alpha)_j - (\Gamma_{ij}^\alpha)_k + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha$$

Según el problema 10.26, es

$$R_{mijk} = g_{\alpha m} R_{ijk}^\alpha = g_{\alpha m} (\Gamma_{ik}^\alpha)_j - g_{\alpha m} (\Gamma_{ij}^\alpha)_k + g_{\alpha m} \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha - g_{\alpha m} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha$$

Ahora, bien, $g_{\alpha m} (\Gamma_{ik}^\alpha)_j = (g_{\alpha m} \Gamma_{ik}^\alpha)_j - (g_{\alpha m})_j \Gamma_{ik}^\alpha = (\Gamma_{ikm})_j - (\Gamma_{\alpha jm} + \Gamma_{mja}) \Gamma_{ik}^\alpha$

en donde hemos utilizado la ecuación (10.24) y el problema 10.23. Análogamente,

$$g_{\alpha m} (\Gamma_{ij}^\alpha)_k = (\Gamma_{ijm})_k - (\Gamma_{\alpha km} + \Gamma_{mka}) \Gamma_{ij}^\alpha$$

Además, $g_{\alpha m} \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta j}^\alpha = \Gamma_{ik}^\beta g_{\alpha m} \Gamma_{\beta j}^\alpha = \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta jm}^\alpha$ y, en forma parecida, $g_{\alpha m} \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta k}^\alpha = \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta km}^\alpha$. De modo que, sustituyendo en la anterior,

$$R_{mijk} = (\Gamma_{ikm})_j - \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha jm} - (\Gamma_{ijm})_k + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha km} + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{mk\alpha} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{\beta jm}^\alpha - \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{\beta km}^\alpha$$

que es el resultado que se buscaba.

Problemas resueltos

TEORIA DE LAS SUPERFICIES

10.30. Obtener los símbolos de Christoffel, Γ_{ij}^k , para el cilindro $\mathbf{x} = \mathbf{y}(u) + v\mathbf{g}$, $\mathbf{g} = \text{constante}$, $|\mathbf{g}| = 1$. Resp. $\Gamma_{11}^1 = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}'' / |\mathbf{y}' \times \mathbf{g}|^2$, $\Gamma_{11}^2 = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{y}')(\mathbf{y}' \cdot \mathbf{y}'') / |\mathbf{y}' \times \mathbf{g}|^2$, en cualquier otro caso, $\Gamma_{ij}^k = 0$.

10.31. Verificar que las ecuaciones $E = 1 + 4u^2$, $F = -4uv$, $G = 1 + 4v^2$, $L = 2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$, $M = 0$, $N = -2(4u^2 + 4v^2 + 1)^{-1/2}$, satisfacen las condiciones de compatibilidad, o sea, las ecuaciones (10.7) y (10.8) de la página 216.

10.32. Utilizando las ecuaciones de Weingarten, demostrar que $\mathbf{N}_u \times \mathbf{N}_v = (EG - F^2)\mathbf{KN}$.

10.33. Resolver las ecuaciones de Gauss-Weingarten para la superficie cuyos coeficientes fundamentales son $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$, $L = -1$, $M = 0$, $N = 0$. Resp. Un cilindro circular de radio igual a 1.

10.34. Deducir la fórmula de Rodríguez de las ecuaciones de Weingarten.

10.35. Si las curvas de parámetros en una carta son ortogonales, demostrar que

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right]$$

10.36. Demostrar que $f(P) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ es una función continua de un punto P de una superficie.

10.37. Demostrar que las curvaturas principales $\kappa_1(P)$ y $\kappa_2(P)$ son funciones continuas de un punto P de una superficie orientada.

10.38. Demostrar el teorema 10.6, a saber: Los planos son las únicas superficies conexas y cerradas de clase ≥ 2 en las que todos los puntos son puntos planos.

10.39. Demostrar que las esferas son las únicas superficies compactas y conexas que poseen curvatura gaussiana positiva y curvatura media constante.

TENSORES

10.40. Demostrar que si A_i y B_j son las componentes de dos vectores covariantes, entonces el producto externo $C_{ij} = A_i B_j$ representa las componentes de un tensor covariante de segundo orden.

10.41. Demostrar que $\det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \epsilon^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3$ sabiendo que ϵ^{ijk} ya fue definida en el ejemplo 10.6 de la página 223.

10.42. Demostrar que $\delta_{ij}^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = A_{ij} - A_{ji}$.

10.43. Demostrar que si A^{ij} son las componentes de un tensor contravariante absoluto y $A_{i\alpha} A^{\alpha j} = \delta_i^j$, entonces $A^{\alpha j}$ son las componentes de un tensor covariante absoluto. Se dice que los dos tensores son recíprocos.

10.44. Demostrar que si A^{ij} y A_{ij} son las componentes de tensores simétricos recíprocos, y si x_i representa las componentes de un vector covariante, entonces $A_{ij} x^i x^j = A^{ij} x_i x_j$, siendo $x_i = A^{ia} x_a$.

10.45. Demostrar que las magnitudes $\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk}$, en donde las ϵ^{ijk} se definieron en el ejemplo 10.6(f) de la página 224, son las componentes de un tensor covariante de tercer orden y peso -1 .

10.46. Suponiendo que $\epsilon_{11} = 0$, $\epsilon_{12} = \sqrt{g}$, $\epsilon_{21} = -\sqrt{g}$, $\epsilon_{22} = 0$, y que $g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$, demostrar que las ϵ_{ij} , $i, j = 1, 2$, son las componentes de un tensor covariante hemisimétrico tal que $\bar{\epsilon}_{11} = 0$, $\bar{\epsilon}_{12} = \sqrt{g}$, $\bar{\epsilon}_{21} = -\sqrt{g}$, $\bar{\epsilon}_{22} = 0$.

10.47. Suponiendo que $\epsilon^{ij} = \epsilon_{\alpha\beta} g^{i\alpha} g^{j\beta}$, sabiendo que $\epsilon_{\alpha\beta}$ fue definida en el problema anterior, demostrar que $\epsilon^{11} = 0$, $\epsilon^{12} = 1/\sqrt{g}$, $\epsilon^{21} = -1/\sqrt{g}$, $\epsilon^{22} = 0$.

10.48. Demostrar que $b_i^\beta b_{\beta j} - b_j^\beta b_{\beta i} = 0$, $i, j = 1, 2$.

10.49. Probar que $\bar{\Gamma}_{ij}^k = \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^j} + \frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \right] \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^\gamma}$.

10.50. Probar que $\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = -g^{\alpha i} \Gamma_{\alpha k}^i - g^{\alpha j} \Gamma_{\alpha k}^j$.

10.51. Demostrar que

$$R_{112}^1 = R_{221}^2 = -R_{121}^1 = -R_{212}^2 = F \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$R_{212}^1 = -R_{221}^1 = G \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$R_{121}^2 = -R_{121}^2 = E \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

y, en cualquier otro caso, $R_{ijk}^p = 0$.

10.52. Probar que $R_{ijk}^p = \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^p}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{\alpha j}^p - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^p$.

10.53. Probar que $\frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u^1} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2$, $\frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u^2} = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2$.

Capítulo 11

Geometría intrínseca

APLICACIONES SOBRE SUPERFICIES

Sean: S una superficie de clase C^m , S^* una superficie de clase C^n y f una función de S en S^* , como se muestra en la figura 11-1. Si para cada carta local $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ en S , cuyo dominio es U , ocurre que la aplicación compuesta $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(u, v) = f(\mathbf{x}(u, v))$ de U en S^* es una representación paramétrica regular, de clase C^r ($r \leq \min(m, n)$), entonces f recibe el nombre de *aplicación regular derivable de S en S^* , de clase C^r* . Recordemos que $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(u, v)$ es una representación paramétrica regular de clase C^r si

- \mathbf{x}^* pertenece a C^r de U ,
- $\mathbf{x}_u^* \times \mathbf{x}_v^* \neq 0$ para todo (u, v) en U .

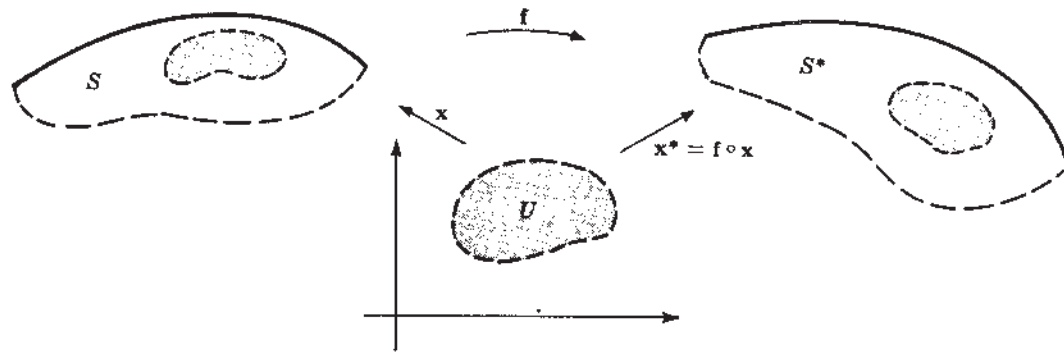


Fig. 11-1

En el problema 11.3 de la página 263, demostraremos que si una función f de S en S^* goza de la propiedad de que $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(u, v))$ es una representación paramétrica regular de clase C^r para toda carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de una base de S , entonces f goza de la propiedad de que $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(u, v))$ es una representación paramétrica regular de clase C^r para todas las posibles cartas de S . En esta forma, al aplicar la definición anterior basta verificar a f en un número conveniente de cartas para estar seguros de que cubren a S .

Ejemplo 11.1.

- (a) Sean: S la esfera de centro en $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_3$ y radio igual a 1, agujereada en el polo norte, y S^* el plano x_1x_2 , como se ve en la figura 11-2. Consideremos que f sea la función que proyecta un punto \mathbf{x} de la esfera sobre S^* por medio de una recta que pasa por el polo norte. Esta aplicación f recibe el nombre de *proyección estereográfica* de S sobre S^* . Se demuestra con facilidad que $\mathbf{x}^* = \frac{2}{2-x_3}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)$. Como base de S podemos utilizar dos cartas que se obtienen de

$$\mathbf{x} = (\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2 + (\cos \phi + 1)\mathbf{e}_3$$

($0 < \phi < \pi$) cuando $0 < \theta < 3\pi/2$ y $\pi/2 < \theta < 5\pi/2$, y la carta de Monge

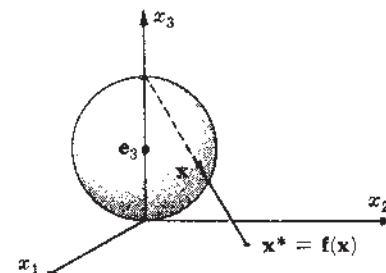


Fig. 11-2

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + (1 - \sqrt{1-x_1^2-x_2^2})\mathbf{e}_3, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1$$

para cubrir el polo sur. En las dos primeras cartas,

$$\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(\theta, \phi)) = \frac{2}{1 - \cos \phi} ((\cos \theta \sin \phi)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{e}_2), \quad 0 < \phi < \pi$$

En este caso, \mathbf{x}^* es de clase C^∞ y

$$|\mathbf{x}_\theta^* \times \mathbf{x}_\phi^*| = 4 \sin \phi / (1 - \cos \phi)^2 \neq 0$$

En la carta de Monge tenemos

$$\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(x_1, x_2)) = \frac{2}{1 + (1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}} (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)$$

También en este caso, \mathbf{x}^* es de clase C^∞ y

$$|\mathbf{x}_{x_1}^* \times \mathbf{x}_{x_2}^*| = 4/(1-x_1^2-x_2^2)^{1/2} [1 + (1-x_1^2-x_2^2)^{1/2}]^2 \neq 0$$

De suerte que la proyección estereográfica de la esfera agujereada, sobre el plano, es una aplicación diferencial regular de clase C^∞ .

- (b) Sean: S el plano x_1x_2 y S^* la superficie cilíndrica circular de eje en x_3 y radio igual a 1. La función

$$\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}) = (\cos x_1)\mathbf{e}_1 + (\sin x_1)\mathbf{e}_2 + x_2\mathbf{e}_3$$

define una aplicación de S sobre S^* que enrolla el plano alrededor de la superficie cilíndrica en forma tal que las rectas $x_1 = \text{constante}$ tienen su imagen sobre las generatrices del cilindro y las rectas $x_2 = \text{constante}$, sobre las secciones transversales (circunferencias) de la superficie cilíndrica. En este caso, $\mathbf{x} = \theta\mathbf{e}_1 + \phi\mathbf{e}_2$ es una carta que cubre a S y en la que

$$\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(\theta, \phi)) = (\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)\mathbf{e}_2 + \phi\mathbf{e}_3$$

es evidentemente de clase C^∞ , y

$$|\mathbf{x}_\theta^* \times \mathbf{x}_\phi^*| = |(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)\mathbf{e}_2| = 1 \neq 0$$

De modo que f es una aplicación regular, derivable, de clase C^∞ del plano sobre el cilindro.

Recordemos que una representación paramétrica regular es localmente inyectiva y bicontinua. (Problema 8.12 de la página 175.) De suerte que si f es una aplicación regular derivable de S en S^* , P un punto de S y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta local de S que contiene a P , siendo P la imagen de (u, v) , entonces existe un entorno $S(u, v)$ de (u, v) en el que $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(u, v))$ es inyectiva y bicontinua y, por consiguiente, es una carta de S^* que contiene a $f(P)$, como se ve en la figura 11-3. Como la restricción de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ a $S(u, v)$ una carta local en S , tendremos el

Teorema 11.1. Si f es una aplicación regular derivable de una superficie S en una superficie S^* , entonces a cada punto P de S le corresponde una carta local $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de S que contiene a P y tal que $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(u, v))$ es una carta local en S^* .

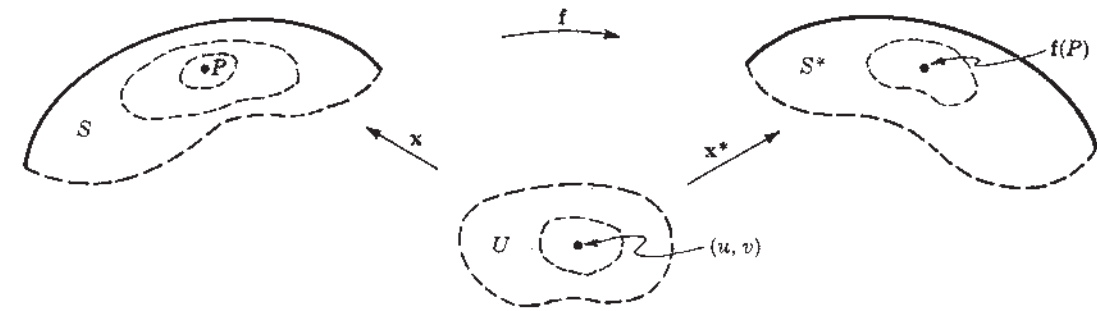


Fig. 11-3

Observemos que para cada carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de S , la aplicación f viene a ser la función compuesta $\mathbf{x}^* \circ \mathbf{x}^{-1}$ donde $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(u, v))$. Y como la aplicación compuesta de dos aplicaciones inyectivas y bicontinuas es inyectiva y bicontinua, tenemos el

Corolario: Una aplicación regular derivable es localmente inyectiva y bicontinua. Es decir, si f es una aplicación regular derivable de una superficie S es una superficie S^* , entonces, a cada punto P de S se le puede hacer corresponder una carta local, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de S , que contenga a P y dentro de la cual f sea una aplicación inyectiva y bicontinua en S^* .

Por último, tenemos el

Teorema 11.2. Si f es una aplicación regular derivable de clase C^r de S en S^* y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una curva regular C de clase C^r en S , entonces, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t) = f(\mathbf{x}(t))$, es una curva regular de clase C^r de S^* .

La demostración de la proposición anterior se deja como ejercicio al lector.

Observación: A no ser que se diga lo contrario, cuando se hable de "aplicación de clase C^m " de una superficie S en otra T , se quiere significar: "aplicación regular derivable de clase C^m " de S en T .

APLICACIONES ISOMETRICAS. GEOMETRIA INTRINSECA

Se dice que una aplicación inyectiva f de una superficie S sobre una superficie S^* es una *aplicación isométrica* o una *isometría*, si la longitud de un arco regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, arbitrario, de S , es igual a la longitud de su imagen $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(t) = f(\mathbf{x}(t))$ en S^* . En el problema 11.5 demostraremos que si f es una isometría de S sobre S^* , entonces f^{-1} es también, una isometría de S^* sobre S .

Si existe una isometría de S sobre S^* , entonces se dice que S y S^* son *isométricas*. Intuitivamente es evidente que si curvamos con cuidado una hoja de papel haciendo que adopte distintas formas, sin estirla ni rasgarla, las superficies que resultan son todas isométricas entre sí, como se muestra en la figura 11-4.

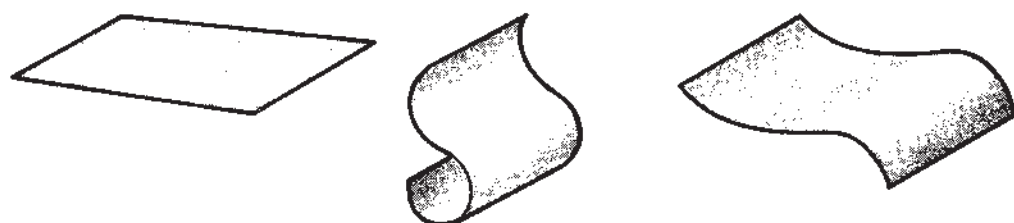


Fig. 11-4

Supongamos, ahora, que f es una aplicación inyectiva de S sobre S^* tal que los coeficientes fundamentales E, F y G de toda carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de S sean iguales a los coeficientes fundamentales E^*, F^* y G^* en toda la extensión de la imagen $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(u, v) = f(\mathbf{x}(u, v))$ de la carta. Entonces, f es una isometría. En efecto, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \leq t \leq b$, es un arco cualquiera C en S . En general, puede ocurrir que C no se halle totalmente en ninguna carta de S . Sin embargo, como C es compacto (por ser la imagen continua del intervalo compacto $a \leq t \leq b$), estará formado de un número finito de arcos C_i , $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$, consecutivos y tales que cada C_i esté en alguna carta $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(u, v)$. Recordemos, ahora, que la longitud de un arco en una carta es la integral de la raíz cuadrada de la primera forma fundamental. De modo que la longitud $L(C)$ de C está dada por

$$L(C) = \sum_i L(C_i) = \sum_i \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E_i \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F_i \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G_i \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt \right]$$

Pero, por hipótesis, para todo i es $E_i = E_i^*$, $F_i = F_i^*$ y $G_i = G_i^*$, siendo E_i^*, F_i^*, G_i^* los coeficientes fundamentales en $\mathbf{x}_i^* = f(\mathbf{x}_i(u, v))$. Por tanto,

$$\begin{aligned} L(C) &= \sum_i \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{E_i^* \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F_i^* \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G_i^* \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt \right] \\ &= \sum_i L(C_i^*) = L(C^*) \end{aligned}$$

De este modo, la longitud de un arco cualquiera C de S es igual a la longitud de su imagen C^* de S^* . Por tanto, f es una isometría. En el problema 11.9 de la página 265, demostraremos la recíproca de esta aserción. Tenemos, pues, el

Teorema 11.3. Una función o aplicación inyectiva y sobreyectiva de S sobre S^* es una isometría si y sólo si en toda carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de S los primeros coeficientes fundamentales son respectivamente iguales, es decir, si

$$E = E^*, F = F^* \text{ y } G = G^*$$

siendo E^*, F^* y G^* los primeros coeficientes fundamentales en la imagen $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(u, v))$ de la carta.

Ejemplo 11.2.

Sea S la superficie de revolución siguiente

$$\mathbf{x} = (\cos \theta \cosh v) \mathbf{e}_1 + (\sin \theta \cosh v) \mathbf{e}_2 + v \mathbf{e}_3, \quad 0 < \theta < 2\pi, -\infty < v < \infty$$

y S^* la conoide recta dada por

$$\mathbf{x}^* = (u \cos \phi) \mathbf{e}_1 + (u \sin \phi) \mathbf{e}_2 + \phi \mathbf{e}_3, \quad 0 < \phi < 2\pi, -\infty < u < \infty$$

Llamemos f a la función que trasforma el punto $\mathbf{x}(\theta, v)$ de S en el punto $\mathbf{x}^*(\phi, u)$ de S^* , siendo $\phi = \theta$ y $u = \sinh v$. En otras palabras: f es la aplicación compuesta de la \mathbf{x}^{-1} seguida de la $\phi = \theta$, $u = \sinh v$, y luego, seguida de la \mathbf{x}^* , como se puede ver en la figura 11-5. Para cualquier parte de la faja $0 < \theta < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$, dentro de la cual \mathbf{x} sea una carta (bicontinua), la imagen de ésta en S^* , a saber

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{**}(\theta, v) = f(\mathbf{x}(\theta, v)) = \mathbf{x}^*(\theta, \sinh v) = (\sinh v \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\sinh v \sin \theta) \mathbf{e}_2 + \theta \mathbf{e}_3$$

será de clase C^∞ y $\mathbf{x}_\theta^{**} \times \mathbf{x}_v^{**} = \cosh^2 v \neq 0$. De suerte que f es regular y de clase C^∞ . Además f es biyectiva. Dejamos al lector, por vía de ejercicio, la demostración de esta aserción. Por último, mediante un fácil cálculo se tiene que

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = \cosh^2 v = \mathbf{x}_\theta^{**} \cdot \mathbf{x}_\theta^{**} = E^{**} \\ F &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_v = 0 = \mathbf{x}_\theta^{**} \cdot \mathbf{x}_v^{**} = F^{**} \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \cosh^2 v = \mathbf{x}_v^{**} \cdot \mathbf{x}_v^{**} = G^{**} \end{aligned}$$

Y, de esta suerte, según el teorema precedente, f es una isometría de S sobre S^* .

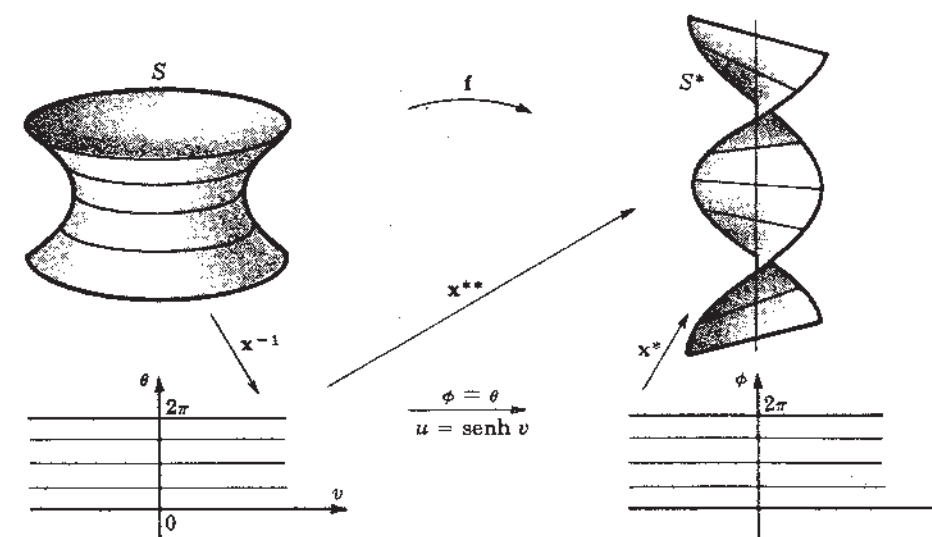


Fig. 11-5

Consideremos la aplicación del plano alrededor de la superficie cilíndrica del ejemplo 11.9(b). Por intuición vemos que la imagen de cada curva del plano es una curva de igual longitud en el cilindro. Pero, tal aplicación no es inyectiva y, en consecuencia, no constituye una isometría. Sin embargo, el plano y el cilindro son *localmente isométricos*. En otros términos, decimos, por definición, que una aplicación de S en S^* es *localmente isométrica*, si tal aplicación conserva la longitud de los arcos, pero no es, necesariamente, biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).

Uno de los aspectos importantes de la geometría es el estudio de aquellas propiedades de las superficies que se conservan invariantes en una aplicación inyectiva de clase dada. Por ejemplo, una determinada propiedad topológica de una superficie se conserva invariante en una aplicación inyectiva bicontinua (topológica). La compacidad es un ejemplo de una propiedad topológica de algunas superficies. Las propiedades de las superficies que se mantienen invariantes en una isometría, se denominan propiedades *intrínsecas* de la superficie. Al conjunto de todas éstas se le da el nombre de *geometría intrínseca* de la superficie.

Del teorema 11.3 se desprende que una cierta propiedad de una superficie es intrínseca si y sólo si únicamente depende de la primera forma fundamental. Por ejemplo, se ve fácilmente que la curvatura gaussiana es una propiedad intrínseca de las superficies.

Sean P y Q dos puntos de una superficie. Por definición, se llama *distancia intrínseca entre P y Q* , y se representa por $D(P, Q)$, al ínfimo (es decir, la mayor cota inferior), de las longitudes $L(C)$ de todos los posibles arcos regulares C de S , que unan a P y Q . Es evidente que la distancia intrínseca entre dos puntos de una superficie existe siempre, pues el conjunto de números reales $L(C)$ no es vacío (por ser S conexa y, por tanto, arco-conexa) y es acotado inferiormente por la distancia euclidiana entre P y Q , que es $|P - Q|$. Es evidente que la distancia intrínseca entre dos puntos de una superficie es una propiedad intrínseca de ésta. En el problema 11.6 de la página 264, demostraremos el

Teorema 11.4. (i) $D(P, Q) = D(Q, P)$
 (ii) $D(P, R) \leq D(P, Q) + D(Q, R)$
 (iii) $D(P, Q) \geq 0$, $D(P, Q) = 0$ si $P = Q$

Ahora, bien: dados P y Q , si existe un arco regular que una a P y Q y cuya longitud sea igual a la distancia intrínseca entre P y Q , entonces C recibe el nombre de *arco de longitud mínima entre P y Q* .

De acuerdo con la definición del ínfimo se tiene que, si C es un arco de longitud mínima entre P y Q , entonces su longitud $L(C)$ cumple las siguientes condiciones

- (i) $L(C) \leq L(C')$, siendo C' cualquier otro arco que une a P y Q . ($L(C) = D(P, Q)$ es una cota inferior.)
- (ii) Para un $\epsilon > 0$, arbitrario, existe un arco regular C' que une a P y Q y tal que $L(C) + \epsilon > L(C')$. ($L(C) = D(P, Q)$ es la mayor cota inferior.)

De nuevo, es evidente que los arcos de longitud mínima entre puntos, pertenecen a la geometría intrínseca de la superficie.

En el plano, $D(P, Q)$ es la distancia euclidiana y existe siempre un arco de longitud mínima, único, y es el segmento de recta entre P y Q . Sin embargo, en general, como se demostrará en el ejemplo 11.3(a), entre dos puntos de una superficie no existe, necesariamente, un arco de longitud mínima, o, de existir, no es necesariamente único, como se demostrará en la parte (b) del ejemplo 11.3.

Ejemplo 11.3.

- (a) Sean, S el plano xy , excluido el origen, y los puntos $P(0, 1)$ y $Q(0, -1)$, como se muestra en la figura 11-6. Es evidente que para cualquier $\epsilon > 0$, existe un arco que une a P y Q de longitud menor que $2 - \epsilon$. Se podría tomar un arco de circunferencia entre P y Q de centro en $(R, 0)$, $R > 0$, con R suficientemente grande. Además, la longitud de cualquier arco entre P y Q debe ser mayor que 2 o

igual a 2. De suerte que $D(P, Q) = 2$. Por otra parte, no existe en S ningún arco que una a P y Q y que tenga longitud igual a 2, pues, por hipótesis, no se tiene en cuenta el origen. De suerte que no existe ningún arco de longitud mínima entre los puntos P y Q de S .

- (b) Sea S una superficie esférica. Es visiblemente cierto que cualquier circunferencia máxima (meridiano) que una los polos norte y sur es un arco de longitud mínima entre los polos. Vemos, pues, que puede existir un número infinito de arcos diferentes, de longitud mínima, entre dos puntos de una superficie.

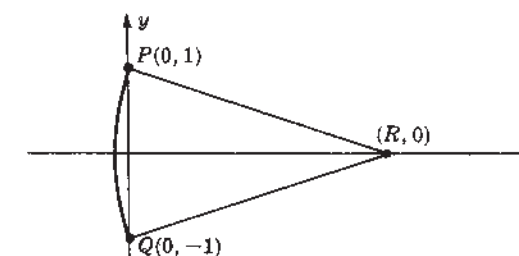


Fig. 11-6

CURVATURA GEODESICA

Supongamos que C es un arco de longitud mínima entre dos puntos de una superficie S . Si P es cualquier punto de C y Q otro punto de C , vecino del primero, entonces intuitivamente se ve que la parte del arco entre P y Q es también un arco de longitud mínima entre esos puntos. Por otra parte, parece que la proyección C^* del segmento de C , entre P y Q , sobre el plano tangente a S en P , como se ve en la figura 11-7, es un arco de longitud mínima en el plano tangente, entre P y la proyección Q^* de Q sobre dicho plano. Pero, en ese caso, C^* debe ser un segmento de recta o, lo que es igual, una curva de curvatura cero. De esta suerte, al escoger entre posibles arcos de longitud mínima, nos vemos precisados a considerar los que pertenezcan a curvas en las que el vector de curvatura de la proyección ortogonal de la curva sobre el plano tangente sea cero.

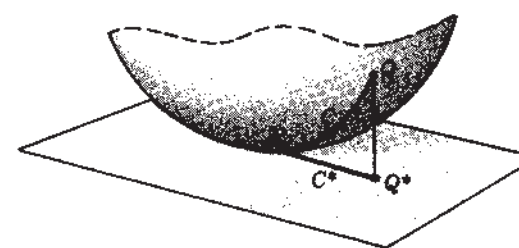


Fig. 11-7

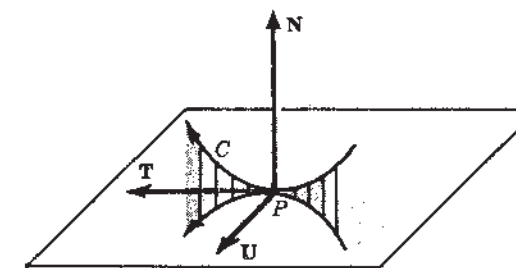


Fig. 11-8

El vector de curvatura en P de la proyección de una curva C , sobre el plano tangente en dicho punto, se denomina *vector de curvatura geodésica de C en P* y se representa por k_* . Para calcular a k_* , supongamos que, S es una superficie de clase ≥ 2 , $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, una carta que contiene a P , y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, una representación natural de C de clase C^2 . Llamemos, por el momento, \mathbf{T} al vector unitario tangente a C en P y \mathbf{U} al vector del plano tangente en ese punto y tal que $(\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{N})$ formen una terna ortonormal dextrógira, como se muestra en la figura 11-8. Sin riesgo de perder generalidad, podemos suponer que P se halle en el origen. Entonces, la proyección de C sobre el plano tangente en P vendrá dada por la expresión: $\mathbf{x}^* = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}$. Haciendo la derivación se tiene

$$d\mathbf{x}^*/ds = (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{U})\mathbf{U} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}$$

$$d^2\mathbf{x}^*/ds^2 = (\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{U})\mathbf{U} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U})\mathbf{U}$$

$$\mathbf{t}^* = \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| \quad \text{y} \quad \mathbf{k}^* = \frac{d\mathbf{t}^*}{ds^*} = \frac{d\mathbf{t}^*}{ds} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right| = \frac{\left(\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right) \frac{d^2\mathbf{x}^*}{ds^2} - \left(\frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{x}^*}{ds^2} \right) \frac{d\mathbf{x}^*}{ds}}{\left| \frac{d\mathbf{x}^*}{ds} \right|^4}$$

Ahora, bien, en P , $t = T$; de modo que en P se tiene

$$\frac{dx^*}{ds} = (T \cdot T)T + (T \cdot U)U = T, \quad \left| \frac{dx^*}{ds} \right| = 1, \quad \frac{d^2x^*}{ds^2} = (k \cdot T)T + (k \cdot U)U = (k \cdot U)U$$

y, en consecuencia, $k^* = k_p = (k \cdot U)U - (k \cdot U)(U \cdot T)T$. Pero, U es ortogonal a T ; por lo cual, la fórmula queda así

$$k_p = (k \cdot U)U \quad (11.1)$$

Una consecuencia de la (11.1) es el hecho de que, según vemos, k_p es realmente la proyección ortogonal del vector de curvatura k de C en P sobre el plano tangente. Y como k es ortogonal a T , su proyección ortogonal sobre el plano tangente es, sencillamente, su proyección $(k \cdot U)U$ sobre U . De este modo, tenemos el

Teorema 11.5. La curvatura geodésica k_g de una curva C en P es la proyección vectorial del vector de curvatura k de C en P , sobre el plano tangente en este punto.

De acuerdo con la ecuación (11.1) y por ser $k \cdot T = 0$, podemos escribir

$$k = k_p + k_n = (k \cdot U)U + (k \cdot N)N \quad (11.2)$$

en donde hemos recordado que $k_n = (k \cdot N)N$ es el vector de curvatura normal de C en P . De esta suerte, k_g es independiente de la orientación de la superficie S y de la curva C , pues k y k_n lo son.

La función escalar κ_g , definida por la igualdad $k_g = \kappa_g U$, recibe el nombre de *curvatura geodésica de C en P* . De la ecuación (11.2) se desprende que $\kappa_g = k \cdot U$. Además, puesto que U se escogió de modo que (T, U, N) , es decir, (t, U, N) fuera una terna ortonormal dextró-gira, tenemos que $U = N \times t$. Y, en consecuencia, $\kappa_g = k \cdot U = k \cdot (N \times t)$. De este modo, tenemos la fórmula

$$\kappa_g = [tkN], \text{ o sea, } \kappa_g = [\dot{x} \ddot{x} N] \quad (11.3)$$

Obsérvese que κ_g depende tanto de la orientación de S (o sea, del sentido de N), como de la orientación de C (o sea, del sentido de t).

Al contrario de κ_n , que depende de los primeros y de los segundos coeficientes fundamentales, la curvatura geodésica, κ_g , sólo depende de los primeros coeficientes fundamentales (y de sus derivadas); por ello, es una propiedad intrínseca de la superficie. Esta aserción se puede demostrar hallando a κ_g en forma explícita en función de E, F y G . En el problema 11.13 de la página 267, demostraremos que

$$\kappa_g = \left[\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \frac{dv}{ds} + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \frac{du}{ds} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 + \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right] \sqrt{EG - F^2} \quad (11.4)$$

y de aquí, resulta el

Teorema 11.6. La curvatura geodésica a lo largo de una curva, perteneciente a una superficie, es una propiedad intrínseca de ésta.

Obsérvese que a todo lo largo de las curvas $v = \text{constante}$, de parámetro u , $dv/ds = 0$ y $du/ds = 1/\sqrt{E}$; y a todo lo largo de las curvas $u = \text{constante}$, de parámetro v , $du/ds = 0$ y $dv/ds = 1/\sqrt{G}$. De esta suerte, para el caso de la curvatura geodésica de las curvas de parámetros, la ecuación (11.4) viene a ser

$$\begin{aligned} (\kappa_g)_{v=\text{constante}} &= \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^3 \sqrt{EG - F^2} = \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}} \\ (\kappa_g)_{u=\text{constante}} &= -\Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 \sqrt{EG - F^2} = -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}} \end{aligned} \quad (11.5)$$

Si, por añadidura, las curvas de parámetros son ortogonales, entonces,

$$F = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}E_v/G$$

y $\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u/E$. De modo que

$$(\kappa_g)_{v=\text{constante}} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}, \quad (\kappa_g)_{u=\text{constante}} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \quad (11.6)$$

Ejemplo 11.4.

Consideremos el paraboloide siguiente: $x = (r \cos \theta)e_1 + (r \sin \theta)e_2 + r^2e_3$, $0 < r < \infty$, $-\infty < \theta < \infty$. En este caso, se tiene

$$x_r = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2 + 2re_3, \quad x_\theta = (-r \sin \theta)e_1 + (r \cos \theta)e_2$$

$$E = x_r \cdot x_r = 1 + 4r^2, \quad F = x_r \cdot x_\theta = 0, \quad G = x_\theta \cdot x_\theta = r^2$$

$$N = \frac{x_r \times x_\theta}{|x_r \times x_\theta|} = (1 + 4r^2)^{-1/2} (-2r(\cos \theta)e_1 - 2r(\sin \theta)e_2 + e_3)$$

La curva $r = r_0$, de parámetro θ , es

$$x = (r_0 \cos \theta)e_1 + (r_0 \sin \theta)e_2 + r_0^2e_3$$

Y a todo lo largo de esta curva, se tiene

$$x' = (-r_0 \sin \theta)e_1 + (r_0 \cos \theta)e_2, \quad |x'| = r_0$$

$$t = x'/|x'| = (-\sin \theta)e_1 + (\cos \theta)e_2, \quad t' = (-\cos \theta)e_1 - (\sin \theta)e_2$$

$$k = t'/|t'| = r_0^{-1} ((-\cos \theta)e_1 - (\sin \theta)e_2)$$

$$N = (1 + 4r_0^2)^{-1/2} (-2r_0(\cos \theta)e_1 - 2r_0(\sin \theta)e_2 + e_3)$$

$$U = N \times t = (1 + 4r_0^2)^{-1/2} ((-\cos \theta)e_1 - (\sin \theta)e_2 - 2r_0e_3)$$

$$k_g = (k \cdot U)U = r_0^{-1} (1 + 4r_0^2)^{-1} ((-\cos \theta)e_1 - (\sin \theta)e_2 - 2r_0e_3)$$

$$\kappa_g = k \cdot U = (1/r_0)(1 + 4r_0^2)^{-1/2}$$

y, tal como lo esperábamos, κ_g es independiente de θ . Obsérvese que lo anterior concuerda con la fórmula (11.6),

$$(\kappa_g)_{r=r_0} = \frac{G_r}{2G\sqrt{E}} \Big|_{r=r_0} = \frac{2r}{2r^2\sqrt{1+4r^2}} \Big|_{r=r_0} = (1/r_0)(1+4r_0^2)^{-1/2}$$

GEODESICAS

Recordemos que nuestros candidatos a arcos de longitud mínima deben pertenecer a curvas a lo largo de las cuales se anula el vector de curvatura geodésica. Las curvas C a lo largo de las cuales $k_g = 0$ reciben el nombre de *líneas geodésicas* o simplemente *geodésicas*. A lo largo de una recta, $k = 0$ y, en consecuencia, $k_g = (k \cdot U)U = 0$. Si C no es una recta, entonces de la igualdad $k = k_g + k_n$ se desprende que $k_g = 0$ si y sólo si $k = k_n = (k \cdot N)N$, o sea, si y sólo si el plano osculador (que, según recordamos, es el plano paralelo a k y t), contiene la normal a S . Tenemos así el

Teorema 11.7. Todas las rectas de una superficie son geodésicas. Una curva, que no sea una recta, es una geodésica si y sólo si el plano osculador de la curva es perpendicular al plano tangente a la superficie en cada punto.

Obsérvese que una curva asintótica es una recta o una curva a lo largo de la cual el plano osculador y el plano tangente a la superficie coinciden, en tanto que una geodésica es una recta o una curva a lo largo de la cual el plano osculador es perpendicular al plano tangente. Por otra parte, una curva es asintótica si $k_n = 0$; una curva es geodésica si $k_g = 0$.

En el problema 11.14 de la página 267 demostraremos el

Teorema 11.8. Una representación natural de una curva, $x = x(s) = x(u(s), v(s))$ de clase C^2 en una carta $x = x(u, v)$ de clase C^2 , es una geodésica si y sólo si $u(s)$ y $v(s)$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 &= 0\end{aligned}\quad (11.7)$$

De esta suerte, nos vemos precisados a considerar como candidata a geodésica por un punto arbitrario $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ en una dirección arbitraria $(du/ds)_0 : (dv/ds)_0$, a la curva $\mathbf{x}(u(s), v(s))$, en donde $u(s), v(s)$ son las soluciones de la ecuación (11.7) que satisfacen las condiciones iniciales siguientes

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad \frac{du}{ds}(0) = \left(\frac{du}{ds}\right)_0, \quad \frac{dv}{ds}(0) = \left(\frac{dv}{ds}\right)_0$$

Si en las ecuaciones (11.7) los Γ_{ij}^k son de clase C^1 , entonces de acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales, ciertamente existirá una solución única, $u(s), v(s)$ en un entorno de $s = 0$ que satisfaga las condiciones iniciales dadas. Sin embargo, en general, s no representará la longitud a lo largo de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ y, en consecuencia, del anterior teorema no se deduce directamente que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ sea una geodésica. No obstante, en el problema 11.15 de la página 268, demostraremos que si $(du/ds)_0 : (dv/ds)_0$ se escoge de modo que inicialmente sea

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right|^2 = E\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + G\left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2 = 1$$

entonces $|d\mathbf{x}/ds|^2 = 1$ para todo valor de s ; es decir, s será igual a una longitud de arco, y, por tanto, según el teorema anterior, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ es la única geodésica que pasa por el punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ en la dirección dada $(du/ds)_0 : (dv/ds)_0$.

Es evidente que como los números directores $(du/ds)_0 : (dv/ds)_0$ satisfacen la ecuación anterior, se les puede hallar para una dirección cualquiera, $du_0 : dv_0$, con sólo hacer $(du/ds)_0 = du_0/\lambda$ y $(dv/ds)_0 = dv_0/\lambda$, siendo $\lambda = E_0 du_0^2 + 2F_0 du_0 dv_0 + G_0 dv_0^2$. Por último, los Γ_{ij}^k serán de clase C^1 si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es de clase C^3 . Así, tenemos el

Teorema 11.9. En las vecindades de un punto P de una superficie de clase ≥ 3 existe una y sólo una geodésica que pasa por el punto en una dirección dada. La geodésica es de clase C^3 .

Ejemplo 11.5.

- Plano.** En el plano, es $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$. Por tanto, una curva es una geodésica si y sólo si es una recta. Es evidente que por cada punto pasa una geodésica en cada dirección.
- Superficie esférica.** Comoquiera que los planos osculadores a lo largo de una geodésica son paralelos a \mathbf{N} , todos deben pasar por el centro de la esfera. Pero, de acuerdo con el problema 4.20 de la página 81, una curva cuyo plano osculador pasa por un punto fijo descansa sobre un plano. Así, pues, una geodésica de una superficie esférica es una *circunferencia máxima* (meridiano), y, recíprocamente. En este caso, también es evidente que por cualquier punto pasa una geodésica en cada dirección.
- Superficie cilíndrica general.** Supongamos que las generatrices de la superficie cilíndrica tienen la dirección y el sentido de un vector unitario constante \mathbf{g} . Como C es una geodésica si y sólo si $\mathbf{k} = \mathbf{k}_n = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}$ y sobre la superficie cilíndrica es $\mathbf{N} \cdot \mathbf{g} = 0$, entonces se deduce que C será una geodésica si y sólo si $\mathbf{k} \cdot \mathbf{g} = 0$ es decir, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{g} = 0$; o sea, por integración, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{g} = \text{constante}$. De modo, pues, que las geodésicas de un cilindro son hélices generales. Esto incluye a las generatrices mismas, cuando $\mathbf{t} \cdot \mathbf{g} = \pm 1$ y a las secciones trasversales del cilindro cuando $\mathbf{t} \cdot \mathbf{g} = 0$.

Por último, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta en una superficie y tal que las curvas de parámetro u y las de parámetro v sean ortogonales, y los primeros coeficientes fundamentales dependan solamente de uno de los parámetros. Entonces, siempre será posible hallar las geodésicas por medio de cuadraturas. Por ello, en el problema 11.17 de la página 269 demostraremos el

Teorema 11.10. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta en una superficie de clase ≥ 2 y tal que $E = E(u)$, $F = 0$ y $G = G(u)$, entonces:

- Las curvas $u = \text{constante}$, de parámetro v , son geodésicas.
- La curva $v = v_0$, de parámetro u , es una geodésica si y sólo si $G_u(u_0) = 0$.
- Una curva de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v(u))$ es una geodésica si y sólo si

$$v = \pm \int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}} du \quad (C = \text{constante})$$

COORDENADAS GEODESICAS

A menudo, resulta conveniente conocer la forma de introducir coordenadas en superficies cuyas curvas de parámetros gocen de propiedades especiales. Una carta local en que las curvas de parámetros sean ortogonales y una de las familias de tales curvas esté formada por geodésicas, recibe el nombre de *conjunto de coordenadas geodésicas*.

Las coordenadas geodésicas pueden introducirse en una superficie de infinito número de maneras. En efecto, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(v)$, $a \leq v \leq b$ es un arco arbitrario C_0 de clase C^2 en una superficie de clase ≥ 3 . Según el teorema 11.9, por cada punto $\mathbf{x}(v_0)$ de C_0 pasa una única geodésica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v_0)$ perpendicular a la C_0 , a lo largo de la cual u es igual a la longitud de arco y tal que $\mathbf{x}(0, v_0) = \mathbf{x}(v_0)$. Véase la figura 11-9.

En el problema 11.20 de la página 271 demostraremos que, para un ϵ , suficientemente pequeño, la función $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, $-\epsilon < u < \epsilon$, $a < v < b$, es una representación paramétrica regular de clase C^2 .

Sólo falta demostrar que las curvas de parámetro u y las de parámetro v son ortogonales. Para ello, consideremos la derivada

$$F_u = (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} \quad (11.8)$$

Comoquiera que u es la longitud de arco, entonces, $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1$. Por tanto, $E_v = 2\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = 0$. Además, por ser u la longitud de arco, \mathbf{x}_u es la tangente unitaria a las curvas de parámetro u y \mathbf{x}_{uu} el vector de curvatura de las mismas. Pero, a lo largo de una geodésica, el vector de curvatura tiene la dirección y el sentido de la normal a la superficie. De modo que, además, $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = 0$. Y, como consecuencia de la ecuación (11.8), $F_u = 0$. De modo que es $F = \text{constante}$ en todos los puntos de la geodésica $v = \text{constante}$. Pero, la geodésica $v = \text{constante}$ es ortogonal a C_0 . Es decir, $F = 0$ para $u = 0$ y para cada valor de v . Por tanto, $F \equiv 0$. De aquí se desprende que las curvas de parámetros u y v son ortogonales entre sí y, por consiguiente, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es un conjunto de coordenadas geodésicas. Tenemos en esta forma el

Teorema 11.11. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(v)$, $a \leq v \leq b$, es un arco arbitrario de clase C^2 en una superficie S de clase ≥ 3 , entonces existe un conjunto de coordenadas geodésicas $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, $-\epsilon < u < \epsilon$, $a < v < b$, en S de clase C^2 tal que $\mathbf{x}(0, v) = \mathbf{x}(v)$ y las curvas de parámetros u son representaciones naturales de geodésicas.

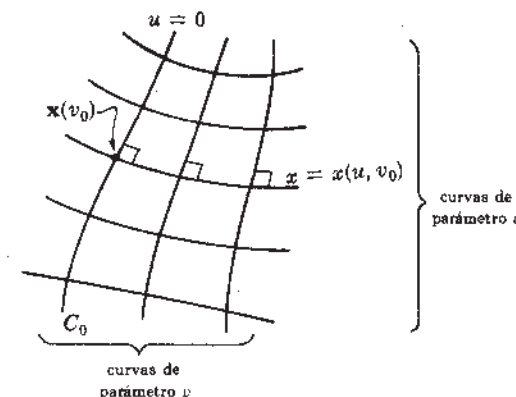


Fig. 11-9

Obsérvese que en la construcción anterior, las distancias, tomadas sobre geodésicas y comprendidas entre dos trayectorias ortogonales cualesquiera, son iguales, pues el parámetro a todo lo largo de cada geodésica es un parámetro natural. Y esto ocurre con cualquier conjunto de coordenadas geodésicas. En efecto, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es un conjunto de coordenadas geodésicas en que las curvas de parámetro u son geodésicas. Por ser ortogonales las curvas de parámetro u y las de parámetro v , es aplicable la ecuación (11.6) y en esa forma $(\kappa_v)_{v=\text{constante}} = -E_v/2E\sqrt{G} = 0$. Por tanto, $E_v = 0$, o, $E = E(u)$. Además, $F = 0$. De modo que la primera forma fundamental de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es de la forma

$$I = E(u) du^2 + G(u, v) dv^2$$

Ahora bien, sobre una geodésica $v = \text{constante}$, es $dv = 0$. Y, en consecuencia, sobre una geodésica comprendida entre la trayectoria ortogonal $u = u_1$ y $u = u_2$ es

$$S = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{I} = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u)} du$$

que es independiente de v y, por tanto, de la geodésica.

Del análisis anterior se concluye que la longitud de arco se puede introducir siempre como parámetro a todo lo largo de las geodésicas de un conjunto de coordenadas geodésicas, introduciendo la siguiente transformación de parámetro

$$u^* = \int_{u_1}^u \sqrt{E(t)} dt, \quad v = v$$

Si se hace esto o, lo que es igual, si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es un conjunto de coordenadas geodésicas tal que u sea un parámetro natural sobre las geodésicas, entonces, $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1$ y la primera forma fundamental tiene la forma

$$I = du^2 + G(u, v) dv^2 \quad (11.9)$$

Por último, de la fórmula (deducida del problema 10.35)

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right] \quad (11.10)$$

que nos da la curvatura gaussiana cuando $F = 0$, se obtiene directamente el

Teorema 11.12. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es un conjunto de coordenadas geodésicas en una superficie de clase ≥ 3 , tal que las curvas de parámetro u sean geodésicas y u sea un parámetro natural, entonces,

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \quad (11.11)$$

Ejemplo 11.6.

$\mathbf{x} = (r \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (r \sin \theta) \mathbf{e}_2 + r^2 \mathbf{e}_3$, $1 < r < 3$, $-\infty < \theta < \infty$, es un conjunto de coordenadas geodésicas en el paraboloide $x_3 = x_1^2 + x_2^2$. En efecto, se verifica con facilidad que $E = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = 1 + 4r^2$, $F = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\theta = 0$, $G = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = r^2$. De esta suerte, las curvas de parámetro son ortogonales, y, como, según la ecuación (11.6), es $(\kappa_\theta)_{\theta=\text{constante}} = -E_\theta/2E\sqrt{G} = 0$, entonces las curvas $\theta = \text{constante}$, de parámetro r , son geodésicas. Si introducimos el parámetro $r^* = \int_1^r \sqrt{E} dr = \int_1^r \sqrt{1+4\rho^2} d\rho$ en lugar de r , entonces la carta $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\theta, r^*) = \mathbf{x}(\theta, r(r^*))$ será un conjunto de coordenadas geodésicas que tienen a r^* como parámetro natural. Entonces,

$$E^* = \mathbf{x}_{r^*}^* \cdot \mathbf{x}_{r^*}^* = (\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r) (dr/dr^*)^2 = (\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r) / (dr^*/dr)^2 = 1$$

$$F^* = \mathbf{x}_{r^*}^* \cdot \mathbf{x}_\theta^* = (\mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\theta) (dr/dr^*) = 0$$

$$G^* = \mathbf{x}_\theta^* \cdot \mathbf{x}_\theta^* = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = r^2$$

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial^2 \sqrt{G^*}}{\partial r^{*2}} = -\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{dr^{*2}} = 4/(1+4r^2)$$

en donde, $r = r(r^*)$.

COORDENADAS GEODESICAS POLARES

Sean, P , un punto de una superficie de clase ≥ 3 y \mathbf{g}_1 y \mathbf{g}_2 dos vectores ortonormales escogidos en forma arbitraria y paralelos al plano tangente a la superficie en P , como se muestra en la figura 11-10. De acuerdo con el teorema 11.9, a cada real θ_0 corresponde una única geodésica, representada en forma natural, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta_0)$, que pase por P y tenga la dirección del vector tangente, $(\cos \theta_0) \mathbf{g}_1 + (\sin \theta_0) \mathbf{g}_2$. En el problema 11.21 de la página 271, demostraremos que existe un $\epsilon > 0$ tal que para $0 < r < \epsilon$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ sea una representación paramétrica regular de clase C^2 y, por consiguiente, un conjunto de coordenadas geodésicas, al que se le da el nombre de *coordenadas geodésicas polares* en P . Demostraremos, además, que para un $0 < r < \epsilon$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ es una aplicación biyectiva sobre un entorno reducido de P . En esta forma, la geodésica que una a P con cada punto de su entorno es única. Las curvas $r = \text{constante}$, de parámetro θ , se denominan *circunferencias geodésicas* y los correspondientes valores de r reciben el nombre de *radios* de las circunferencias geodésicas.

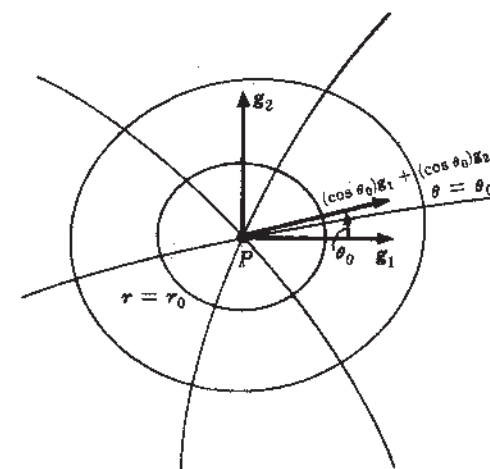


Fig. 11-10

Al igual que en el caso de las coordenadas geodésicas en general, la primera forma fundamental en el caso de las coordenadas geodésicas polares, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$, $r > 0$, es de la forma

$$I = dr^2 + G(r, \theta) d\theta^2 \quad (11.12)$$

Un ejemplo sencillo de coordenadas geodésicas polares lo constituye un sistema de coordenadas polares colocado en el origen del plano $x_1 x_2$. Este viene dado por la expresión $\mathbf{x} = r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2$, $r > 0$, $-\infty < \theta < \infty$. Es evidente que $E = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = 1$, $F = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\theta = 0$ y $G = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = r^2$ y, por tanto, $I = dr^2 + r^2 d\theta^2$. En el problema 11.23 de la página 273, demostraremos que, en el caso general, para valores pequeños de r , $G(r, \theta)$ se comporta como un sistema de coordenadas polares en el plano. En particular, demostraremos el interesante

Teorema 11.13. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ es un conjunto de coordenadas geodésicas polares en un punto P de una superficie de clase suficientemente alta, entonces

$$\sqrt{G(r, \theta)} = r - \frac{1}{6} K(P) r^3 + R(r, \theta) \quad (11.13)$$

en donde, $\lim_{r \rightarrow 0} (R(r, \theta)/r^3) = 0$ y $K(P)$ es la curvatura gaussiana en P .

Ejemplo 11.7.

La siguiente representación por medio de parámetros

$$\mathbf{x} = (a \cos \theta \sin(r/a)) \mathbf{e}_1 + (a \sin \theta \sin(r/a)) \mathbf{e}_2 + (a \cos(r/a)) \mathbf{e}_3 \quad a > 0, 0 < r < \pi/2a, -\infty < \theta < \infty$$

es un conjunto de coordenadas geodésicas polares en el polo norte de la esfera que tiene su centro en el origen y radio igual a a , como se muestra en la figura 11-11. Las curvas $\theta = \theta_0$, de parámetro r , son las circunferencias máximas que pasan por el polo norte y las curvas $r = r_0$, de parámetro θ , son los paralelos de latitud cercanos al polo. Mediante cálculos fáciles se halla que $E = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = 1$, $F = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\theta = 0$, $G = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = a^2 \sin^2(r/a)$ y, de esta suerte, $I = dr^2 + a^2 \sin^2(r/a) d\theta^2$. Como $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$, entonces, $\sqrt{G} = a \sin(r/a) = r - r^3/6a^2 + o(r^3)$, resultado que está de acuerdo con la ecuación (11.13).

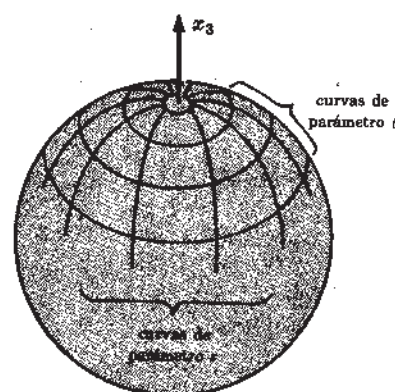


Fig. 11-11

Como consecuencia del teorema 11.13, tenemos una interpretación, de gran interés e importancia, de la curvatura gaussiana. En efecto, sobre la circunferencia geodésica $r = \text{constante}$, tenemos $dr = 0$. Y la longitud de esa circunferencia viene dada por la integral

$$C(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta = 2\pi r - \frac{1}{2}K(P)\pi r^3 + o(r^3) \quad (11.14)$$

De donde,

$$K(P) = \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi r - C(r)}{r^3} \right) + o(1)$$

o, también, por ser $K(P)$ independiente de r

$$K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi r - C(r)}{r^3} \right) \quad (11.15)$$

Vemos así, de nuevo, expresada la curvatura gaussiana en función de algunas propiedades intrínsecas de la superficie.

Por último, recordando la fórmula $\iint_R \sqrt{EG-F^2} du dv$ del área de una superficie, hallamos que la encerrada dentro de una circunferencia geodésica es

$$A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G} d\theta dr = \pi r^2 - (\pi/12) K(P) r^4 + o(r^4)$$

$$\text{En consecuencia, tal como antes, } K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \left(\frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} \right) \quad (11.16)$$

Tenemos así el

Teorema 11.14. La curvatura gaussiana en un punto P , de una superficie de clase ≥ 3 , viene dada por

$$K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi r - C(r)}{r^3} \right) \text{ o sea: } K(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \left(\frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} \right)$$

siendo, r , $C(r)$ y $A(r)$, en su orden, el radio, la longitud de la circunferencia y el área encerrada por la circunferencia geodésica (área del círculo), con centro en P .

ARCOS DE LONGITUD MINIMA

Si P y Q son puntos de una superficie bastante cerrada tal que en P exista un conjunto de coordenadas geodésicas polares $x = x(r, \theta)$ que contenga a Q , como aparece en la figura 11-12, entonces demostraremos que la geodésica $\theta = \text{constante}$ que contenga a Q es el único arco de longitud mínima entre P y Q .

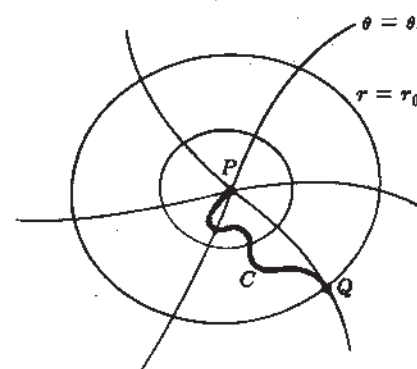


Fig. 11-12

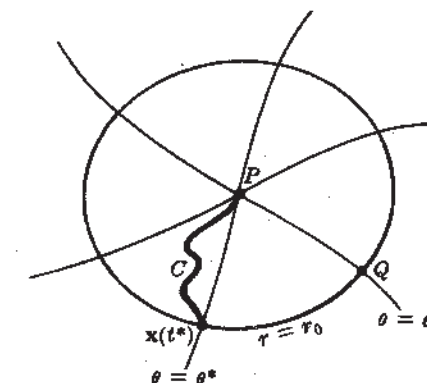


Fig. 11-13

Supongamos que Q pertenece a la circunferencia geodésica $r = r_0$ y a la geodésica $\theta = \theta_0$ y que $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, es un arco C de S que une a P con Q . Por el momento, convengamos que C está contenido en $x = x(r, \theta)$. Entonces, la longitud $L(C)$ del arco C viene dada por la integral

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(dr/dt)^2 + G(r, \theta)(d\theta/dt)^2} dt$$

Como $G > 0$, entonces,

$$L(C) \geq \int_a^b \sqrt{(dr/dt)^2} dt \geq \int_a^b (dr/dt) dt = \int_0^{r_0} dr = r_0$$

Pero, r_0 es la longitud de la geodésica $\theta = \theta_0$ entre P y Q , y la anterior igualdad de signos tiene lugar si y sólo si $d\theta/dt = 0$, o sea, $\theta = \text{constante}$. De esta suerte, la geodésica $\theta = \theta_0$ es, entre todos los arcos contenidos en $x = x(r, \theta)$, el único de longitud mínima que une a P con Q . Pero, ahora podemos demostrar que éste es en realidad el menor de todos los arcos regulares de S que unen a P con Q . En efecto, supongamos que $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, sea un arco C que une a P con Q y parte de $x = x(r, \theta)$, como se ve en la figura 11-13. Entonces, es posible demostrar que en algún punto $x = x(t^*)$, donde $t^* < t$, C corta la circunferencia geodésica $r = r_0$, por ejemplo, en θ^* y está contenido en $x = x(r, \theta)$ si $a \leq t \leq t^*$. Ahora, bien: si designamos con C^* la parte de C que está en el intervalo $a \leq t \leq t^*$, entonces C^* es un arco regular en $x = x(r, \theta)$ que une a P con P^* , que es el punto correspondiente a (r_0, θ^*) . La argumentación anterior, aplicada a los puntos P y P^* , nos proporciona la expresión: $L(C^*) \geq r_0$. Pero, $L(C) > L(C^*)$. Y, en consecuencia, $L(C) > r_0$, que es la longitud de la geodésica $\theta = \theta_0$ que une a P y Q . Tenemos así el

Teorema 11.15. Si P y Q son puntos de una superficie tales que exista en P un conjunto de coordenadas geodésicas polares que contenga a Q , entonces existe entre P y Q un arco único de longitud mínima representado por la geodésica que une dichos puntos.

Con base en este teorema, demostraremos que si C es un arco de longitud mínima entre cualquier par de puntos P_1 y P_2 de una superficie de clase C^3 , entonces C es una geodésica. Para ello, supongamos que C está dado por $x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, y que P es un punto arbitrario de C , diferente de P_1 y P_2 . Como S es de clase C^3 , existe en P un conjunto de coordenadas geodésicas polares, $x = x(r, \theta)$. Tomemos, ahora, un $\epsilon > 0$, suficientemente pequeño, de modo que los puntos P_ϵ y $P_{-\epsilon}$, que corresponden a $t + \epsilon$ y $t - \epsilon$, estén en $x = x(r, \theta)$, como se ve en la figura 11-14. Llamemos C_ϵ la parte de C que se halla entre P y P_ϵ . Necesitamos demostrar que C es un arco de longitud mínima entre P y P_ϵ . Para ello, supongamos lo contrario, es decir, que existe un arco regular Γ_ϵ entre P y P_ϵ tal que su longitud $L(\Gamma_\epsilon)$ sea estrictamente menor que $L(C_\epsilon)$. En particular, sea $L(\Gamma_\epsilon) + \delta = L(C_\epsilon)$. Consideremos, ahora, el arco Γ que se obtiene al remplazar en C a C_ϵ por Γ_ϵ . Obsérvese que es posible que este arco no sea regular en P y P_ϵ . Sin embargo, es posible demostrar que un arco como ese

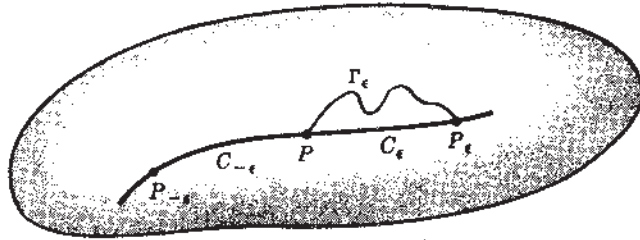


Fig. 11-14

se puede aproximar en P y en P_ϵ , dando así un arco C^* cuya longitud difiera de la de Γ a lo sumo en $\delta/2$. Como $L(\Gamma) + \delta = L(C)$, se deduce que C^* es un arco regular entre P_1 y P_2 tal que

$$L(C^*) + \delta/2 \leq L(C), \text{ o sea: } L(C^*) < L(C)$$

lo cual es imposible, pues C es un arco regular entre P_1 y P_2 de longitud mínima. De suerte que C_ϵ es un arco de longitud mínima entre P y P_ϵ . Por la misma razón, $C_{-\epsilon}$, que es la parte de C comprendida entre $P_{-\epsilon}$ y P , es también un arco de longitud mínima entre $P_{-\epsilon}$ y P .

Pero, entonces, como consecuencia del teorema precedente, $C_{-\epsilon}$ y C_ϵ son curvas geodésicas, por ejemplo, $\theta = \theta_\epsilon$ y $\theta = \theta_{-\epsilon}$ de P a P_ϵ y a $P_{-\epsilon}$, respectivamente, como se muestra en la figura 11-15. Pero, C es regular en P ; de donde, $\theta_{-\epsilon} = \theta_\epsilon + \pi$. En otras palabras, cerca de P , C es la única geodésica por ese punto, en la dirección definida por θ . Y como P es un punto arbitrario de C , el teorema queda demostrado. Tenemos así el

Teorema 11.16. Si C es un arco de longitud mínima entre dos puntos de una superficie de clase ≥ 3 , entonces C es una geodésica.

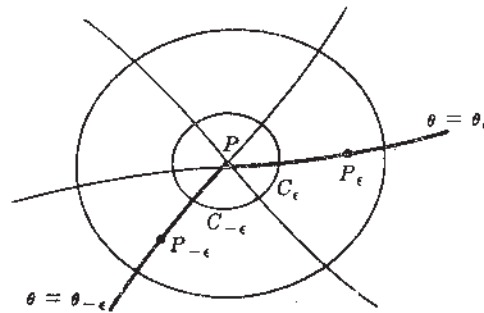


Fig. 11-15

SUPERFICIES DE CURVATURA GAUSIANA CONSTANTE

Recordemos que la curvatura gaussiana K es invariante en una aplicación isométrica. Por este motivo, en puntos correspondientes de dos superficies isométricas, las curvaturas gaussianas son iguales. La recíproca de esta aserción no es verdadera, en general, como se demostrará en el problema 11.28. Sin embargo, si dos superficies tienen la misma curvatura gaussiana constante, entonces, demostraremos que dos entornos cualesquiera suficientemente pequeños de esas superficies, son isométricos. En efecto, supongamos que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ es un conjunto de coordenadas polares geodésicas en un punto de una superficie de curvatura gaussiana constante K . De las ecuaciones (11.11) y (11.13), se desprende que $\sqrt{G} = \sqrt{\mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta}$ satisface la siguiente ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{G} + K\sqrt{G} = 0 \quad (11.17)$$

$$\text{con las condiciones iniciales } \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\partial \sqrt{G} / \partial r) = 1 \quad (11.18)$$

Si $K = 0$, entonces la solución general de la ecuación (11.17) es $\sqrt{G} = rC_1(\theta) + C_2(\theta)$. Al aplicar la condición inicial (11.18) se tiene $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, y, de esta suerte, $G = r^2$. De esta suerte, los primeros coeficientes fundamentales de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ deben ser $E = 1$, $F = 0$ y $G = r^2$. Si $K > 0$, entonces la solución general de la (11.17) es $\sqrt{G} = C_1(\theta) \sin$

$(r\sqrt{K}) + C_2(\theta) \cos(r\sqrt{K})$. En este caso, las condiciones iniciales (11.18) implican que $C_1 = 1/\sqrt{K}$ y $C_2 = 0$. Y, por ello, en este caso, los primeros coeficientes fundamentales de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ deben ser: $E = 1$, $F = 0$, $G = (1/K) \sin^2(r\sqrt{K})$. Por último, si es $K < 0$, entonces la solución general de (11.17) es:

$$\sqrt{G} = C_1(\theta) \sinh(r\sqrt{-K}) + C_2(\theta) \cosh(r\sqrt{-K})$$

Aplicando la condición inicial se tiene: $C_1 = 1/\sqrt{-K}$ y $C_2 = 0$. De esta suerte, en el caso presente es: $E = 1$, $F = 0$, $G = (1/\sqrt{-K}) \sinh r\sqrt{-K}$.

Vemos, pues, que los primeros coeficientes fundamentales de un conjunto de coordenadas polares geodésicas, en cualquier punto P de una superficie S de constante K , están unívocamente determinados y dependen únicamente de K . Pero, es evidente que si P^* es cualquier otro punto de cualquier otra superficie que tenga igual curvatura gaussiana K , constante, y $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(r, \theta)$ es un conjunto de coordenadas polares geodésicas en P^* , entonces la aplicación f , definida por $f(\mathbf{x}(r, \theta)) = \mathbf{x}^*(r, \theta)$ es una aplicación isométrica de un entorno de P sobre un entorno de P^* . En esta forma se tiene el

Teorema 11.17. (Minding). Dos entornos cualesquiera, suficientemente pequeños, de superficies de clase ≥ 3 que tengan igual curvatura gaussiana constante, son isométricos.

La superficie esférica es ejemplo de superficies que poseen curvatura gaussiana constante. En el ejemplo 11.8 construiremos una superficie de curvatura constante negativa que se llamará *seudoesfera*.

Ejemplo 11.8.

Sea C una curva del plano x_1x_2 que comienza en el punto $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $a > 0$, y goza de la propiedad de que el segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia P y el eje x_3 tiene la longitud a , como se muestra en la figura 11-16. La curva C recibe el nombre de *tractriz* y es evidente que viene dada por la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$dx_2/dx_1 = -\sqrt{a^2 - x_1^2}/x_1, \quad x_2(a) = 0$$

Se llama *seudoesfera* de *seudorradio* a a la superficie de revolución que engendra C al girar en torno al eje x_3 . De esta definición se desprende que la seudoesfera está representada por la función

$$\mathbf{x} = (r \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (r \sin \theta) \mathbf{e}_2 + f(r) \mathbf{e}_3, \quad 0 < r < a, \quad -\infty < \theta < \infty$$

siendo $f'(r) = -\sqrt{a^2 - r^2}/r$. En este caso, es $E = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_r = 1 + (f')^2 = a^2/r^2$, $F = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_\theta = 0$ y $G = \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta = r^2$; y, en consecuencia, según la ecuación (11.10) de la página 252, $K = -1/a^2$. De modo que la seudoesfera de pseudorradio a tiene curvatura gaussiana constante que es igual a $-1/a^2$.

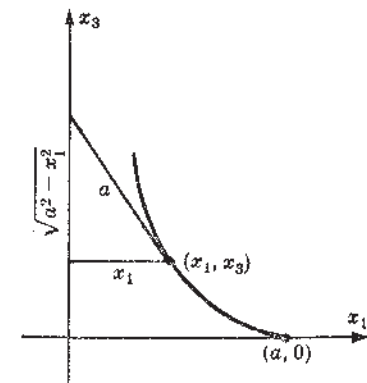


Fig. 11-16

Recordemos que la dirección que se escoge para que corresponda a $\theta = 0$ en un conjunto de coordenadas geodésicas, es completamente arbitraria. De esta suerte, según el teorema 11.17, los entornos de dos puntos distintos en una superficie de curvatura gaussiana constante se pueden aplicar isométricamente uno sobre el otro de tal manera que una dirección cualquiera que se dé en uno de los puntos, se puede hacer corresponder a otra dirección cualquiera que se escoja en el otro. Intuitivamente, esto significa que cualquier figura geométrica situada en una superficie de curvatura gaussiana constante se puede trasladar y girar libremente sin que varíen las longitudes de las curvas. De esto se concluye que las superficies de curvatura constante positiva y negativa conducen a los modelos de geometrías no euclidianas elíptica e hiperbólica. En estos modelos, las geodésicas de las superficies se identifican con las "líneas rectas" de la geometría ordinaria. La diferencia principal entre las geometrías del plano ($K = 0$), elíptica, ($K > 0$) e hiperbólica ($K < 0$), descansa en el axioma de

“paralelismo”. En la geometría euclidiana este axioma afirma que por un punto exterior a una recta dada existe una única paralela (es decir, que no la corta) a la recta. En la geometría elíptica (sobre la superficie esférica) no se pueden trazar rectas paralelas, pues dos “rectas” cualesquiera (meridianos) se cortan siempre (en los polos). Y en la geometría hiperbólica existen infinitas paralelas a una “recta” dada, como se demostrará en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 11.9. Plano hiperbólico.

Consideremos el interior del círculo de radio igual a 2, en el plano x_1x_2 , como una variedad de dos dimensiones, y un sistema de coordenadas polares, (r, θ) , en el origen respecto del cual definimos el tensor métrico siguiente

$$g_{11} = E = 1/(1-r^2/4)^2, \quad g_{12} = g_{21} = F = 0, \quad g_{22} = G = r^2/(1-r^2/4)^2$$

De acuerdo con la ecuación (11.10) y mediante un cálculo sencillo se tiene que $K = -1$. La “superficie” que tiene curvatura gaussiana constante, $K = -1$, se denomina *plano hiperbólico*. Recurriendo al teorema 11.10, encontramos que las geodésicas constan de las curvas de parámetro r , es decir, las rectas euclidianas que pasan por el origen y de las curvas siguientes:

$$\theta = \pm \int \frac{C\sqrt{E} dr}{\sqrt{G} \sqrt{G-C^2}} = \pm \int \frac{C(1-r^2/4) dr}{r\sqrt{r^2-C^2(1-r^2/4)^2}} \quad (C = \text{constante})$$

Si hacemos $u = a(1+r^2/4)/r$, en donde $a = C/\sqrt{1+C^2}$, entonces

$$1-u^2 = [r^2 - C^2(1-r^2/4)^2]/r^2(1+C^2), \quad du = -a(1-r^2/4) dr/r^2$$

y

$$\theta = \pm \int \frac{C(1-r^2/4) dr}{r\sqrt{r^2-C^2(1-r^2/4)^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Integrando tenemos

$$\theta - \theta_0 = \cos^{-1} u, \quad \text{o sea: } u = a(1+r^2/4)/r = \cos(\theta - \theta_0)$$

o sea $r^2 + r_0^2 - 2r_0r \cos(\theta - \theta_0) = \rho^2$, en donde hacemos $r_0 = 2/a$ y $\rho^2 = r_0^2 - 4$. Esta es, en coordenadas polares, la ecuación de la circunferencia que tiene centro en (r_0, θ_0) y radio ρ , como aparece en la figura 11-17(a). Obsérvese que $r_0^2 = \rho^2 + 4 > 4$; por tanto, el centro de esa circunferencia cae por fuera del contorno de $r = 2$ y corta a éste ortogonalmente. De suerte que las “rectas” (geodésicas) del hiperplano son las rectas que pasan por el origen, y las circunferencias que cortan ortogonalmente la de radio $r = 2$. En la figura 11-17(b) se muestra que por un punto P , exterior a la “recta” C , existen infinitas “paralelas” a C .

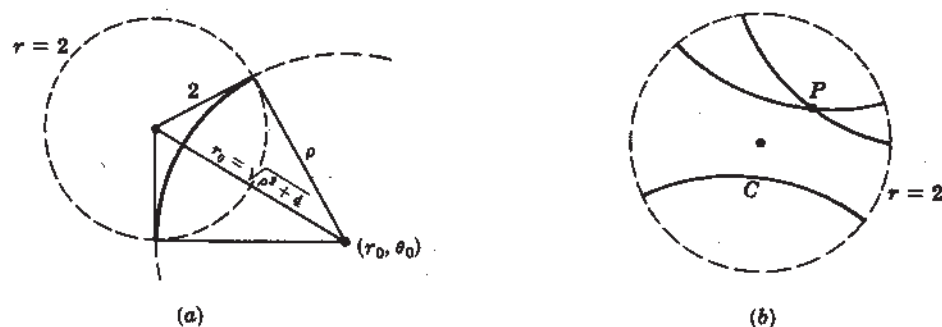


Fig. 11-17

TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Se denomina *arco de Jordan*, C , de clase C^m , a una sucesión finita de arcos regulares C_i , $i = 1, \dots, n$, de clase C^m , contiguos, es decir, puesto uno a continuación del otro en forma que el extremo del anterior sea el origen del siguiente, como se muestra en la figura 11-18. Es visiblemente evidente que un arco de Jordan C tiene una representación continua única, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_n$, tal que sus componentes C_i se representan por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ en subintervalos, $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Es también evidente que un arco de Jordan es rectificable y que su longitud es igual a la suma de las longitudes de sus componentes. Dejamos al lector, por vía de ejercicio, la demostración de esta aserción.

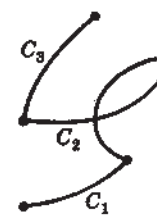


Fig. 11-18

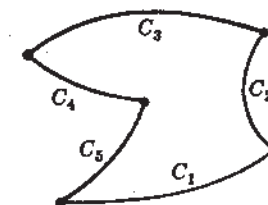


Fig. 11-19

Si los extremos de un arco de Jordan coinciden, se dice que el arco de Jordan es *cerrado*. Se llama *arco de Jordan cerrado* y *simple* o *polígono curvilíneo* a un arco de Jordan cerrado que no tiene más puntos múltiples que sus extremos, como se muestra en la figura 11-19. Las componentes regulares de un polígono curvilíneo se llaman *bordes* o *lados* del polígono y a cada punto común a dos lados se le denomina *vértice* del polígono.

Si $C: u = u(t), v = v(t)$ es un polígono curvilíneo en el plano, se puede demostrar (teorema de la curva de Jordan) que C es el contorno de un dominio D simplemente conexo y acotado que se llama su *interior*. (Un conjunto de puntos D de un espacio euclídeo E es *simplemente conexo* si cualquier polígono curvilíneo cerrado, contenido en D , puede deformarse o “contraerse” continuamente alrededor de un punto sin salirse de D .) Si, además, $P(u, v)$ y $Q(u, v)$ son funciones derivables en un conjunto abierto U del plano que contenga un polígono curvilíneo C y su interior D , y si C está *orientada positivamente* alrededor de D , es decir, si una pequeña rotación positiva de un vector tangente a C lo deja señalando hacia el interior de D , entonces se puede demostrar (teorema de Green) que

$$\oint_C \left(P \frac{du}{dt} + Q \frac{dv}{dt} \right) dt = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv \quad (11.19)$$

siendo R el conjunto cerrado $D \cup C$.

Supongamos, ahora, que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta de una superficie S definida en un conjunto abierto U . Es evidente que una curva $C: \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ es un polígono curvilíneo de la carta si y sólo si $u = u(t), v = v(t)$ es un polígono curvilíneo en U . Si C es un polígono curvilíneo perteneciente a la carta, diremos, por definición, que el *interior* W de C en $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es la imagen del interior de $u = u(t), v = v(t)$ en U ; por otra parte, diremos que C está *orientado positivamente* en la carta si $u = u(t), v = v(t)$ tiene orientación positiva en el plano de parámetros. Por último, observemos que es posible demostrar que el interior W de C en la carta es un subconjunto simplemente conexo de ésta si y sólo si el interior de $u = u(t), v = v(t)$ está contenido en U como se muestra en la figura 11-20.

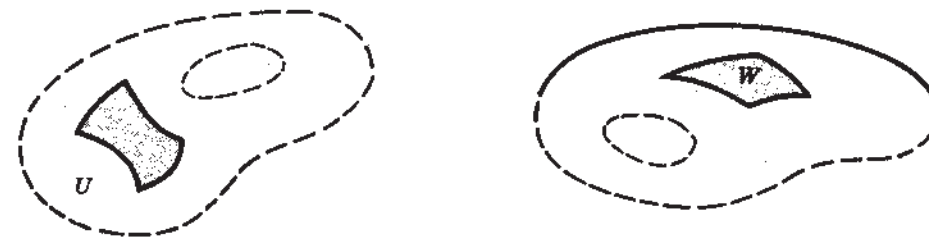


Fig. 11-20

Supongamos, ahora, que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta de una superficie de clase ≥ 3 tal que las curvas de parámetros sean ortogonales; supongamos, además que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ es una representación natural de un polígono curvilíneo C de clase C^2 en $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, orientado positivamente, y cuyo interior es simplemente conexo. Convengamos que

$$g_1 = \mathbf{x}_u / |\mathbf{x}_u| = \mathbf{x}_u / \sqrt{E} \quad \text{y} \quad g_2 = \mathbf{x}_v / |\mathbf{x}_v| = \mathbf{x}_v / \sqrt{G}$$

son los vectores unitarios a lo largo de C en la dirección y sentido de las curvas de parámetros u y de parámetro v , respectivamente, y $\theta(s)$ la función, derivable a trozos, descrita por $t = (\cos \theta)g_1 + (\sin \theta)g_2$ siendo t la tangente unidad a todo lo largo de C , como se muestra en la figura 11-21. Obsérvese que $\theta(s)$ presenta un salto en cada vértice P_i de C igual a un ángulo α_i , donde $-\pi < \alpha_i < \pi$. El ángulo α_i se llama *ángulo externo* de C en P_i .

Ahora, bien: En el problema 11.19 de la página 270 demostraremos (*fórmula de Liouville*) que a todo lo largo de cada lado de C la curvatura geodésica viene dada por

$$\kappa_g = d\theta/ds + \kappa_1 \cos \theta + \kappa_2 \sin \theta \quad (11.20)$$

siendo κ_1 y κ_2 las curvaturas geodésicas de las curvas de parámetros, $v = \text{constante}$ y $u = \text{constante}$, respectivamente. De modo que

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C \frac{d\theta}{ds} ds + \int_C (\kappa_1 \cos \theta + \kappa_2 \sin \theta) ds$$

Ahora, bien,

$$\cos \theta = t \cdot \frac{x_u}{\sqrt{E}} = \left(x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds} \right) \cdot \frac{x_u}{\sqrt{E}} = \frac{x_u \cdot x_u}{\sqrt{E}} \frac{du}{ds} = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \quad (11.21a)$$

$$\text{y} \quad \sin \theta = t \cdot \frac{x_v}{\sqrt{G}} = \left(x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds} \right) \cdot \frac{x_v}{\sqrt{G}} = \frac{x_v \cdot x_v}{\sqrt{G}} \frac{dv}{ds} = \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \quad (11.21b)$$

en donde hemos utilizado el hecho de que las curvas de parámetros son ortogonales y, por ello, $x_u \cdot x_v = 0$. De esta suerte, al sustituir en la integral anterior, se tiene

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta + \int_C \left(\kappa_1 \sqrt{E} \frac{du}{ds} + \kappa_2 \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \right) ds$$

Del teorema de Green (11.19) de la página 259, se desprende que

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta + \iint_{R'} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\kappa_2 \sqrt{G}) - \frac{\partial}{\partial v} (\kappa_1 \sqrt{E}) \right] du dv$$

siendo R' el interior y el contorno de $u = u(s)$, $v = v(s)$ en el plano. De la ecuación (11.6) de la página 249, resulta que

$$\begin{aligned} \int_C \kappa_g ds &= \int_C d\theta + \iint_{R'} \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right] du dv \\ &= \int_C d\theta + \iint_{R'} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{G_u}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right] \sqrt{EG} du dv \end{aligned}$$

y, en consecuencia, de acuerdo con la fórmula (11.10) para la curvatura gaussiana,

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \iint_{R'} K \sqrt{EG} du dv$$

Así se llega a la fórmula
$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \iint_R K ds$$

en donde R es la unión de C con su interior en S . Sólo hace falta calcular la $\int_C d\theta$. Como quiera que C es una curva simple, se puede demostrar que el cambio total de θ al recorrerse

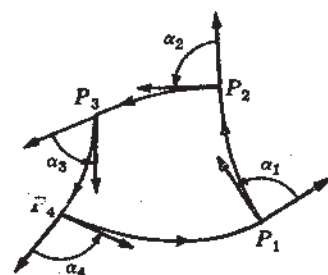


Fig. 11-21

C completamente, es igual a 2π . En cualquier texto de topología se puede hallar una demostración de este hecho. Como quiera que $\int_C d\theta$ mide el cambio de θ a todo lo largo de los lados, tenemos que $\int_C d\theta + \sum \alpha_i = 2\pi$. Se llega así al

Teorema 11.18. Fórmula de Gauss-Bonnet. Sea C un polígono curvilíneo de clase C^2 en una carta de una superficie de clase ≥ 3 . Supongamos, que C está orientado positivamente y que su interior, en la carta, es simplemente conexo. Entonces

$$\int_C \kappa_g ds + \iint_R K dS = 2\pi - \sum \alpha_i \quad (11.22)$$

siendo κ_g la curvatura geodésica a lo largo de C , R la unión de C y de su interior, K la curvatura gaussiana y α_i los ángulos externos de C .

Ejemplo 11.10.

Supongamos que C está constituido por tres geodésicas que forman un triángulo geodésico. Como $\kappa_g = 0$ en C , la fórmula de Gauss-Bonnet

viene a ser $\iint_R K ds = 2\pi - \sum \alpha_i$. Si $\beta_i = \pi - \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, representa los ángulos internos del triángulo, como se ve en la figura 11-22, entonces

$$\iint_R K ds = \sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi$$

Para la esfera de radio a , es $K = 1/a^2$, y la fórmula se convierte en

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi + A/a^2$$

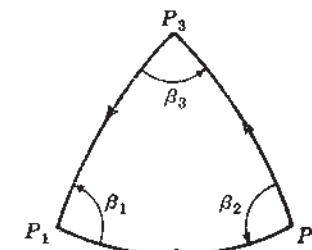


Fig. 11-22

en donde A es el área del triángulo geodésico. Si $K = -1$, es decir, si se trata de una pseudoesfera, entonces $\sum_{i=1}^3 \beta_i = \pi - A/a^2$. De modo que la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico es mayor que, menor que o igual a π , según que la curvatura gaussiana sea positiva, negativa o nula.

Supongamos, ahora, que S es una superficie compacta (cerrada y acotada) y orientable. Es posible demostrar que una superficie como esa se puede cubrir con un número finito de regiones R_i , $i = 1, \dots, n$ se supone que cada R_i consta de un polígono curvilíneo C_i y de su interior W_i , en tal forma que si dos cualesquiera de los R_i se traslapan ello ocurre sobre un único lado o borde común, o en un vértice común, como se muestra en la figura 11-23. El recubrimiento R_i , $i = 1, \dots, n$ recibe el nombre de *descomposición poligonal* de S . En particular, si se escoge una orientación, entonces, existe una descomposición poligonal formada por polígonos orientados, por ejemplo, positivamente, en forma tal que sobre un lado común a dos polígonos contiguos, hay dos orientaciones opuestas, como se muestra en la figura 11-24.

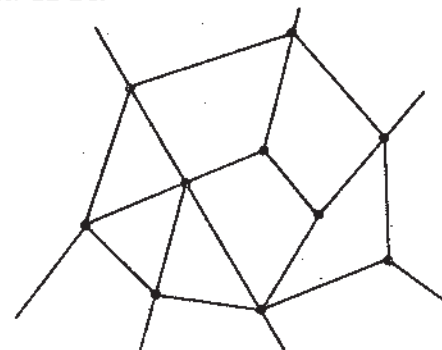


Fig. 11-23

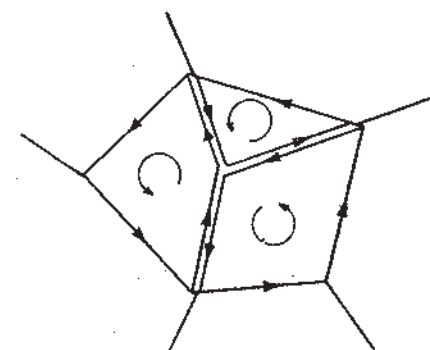


Fig. 11-24

Supongamos, ahora, que la fórmula de Gauss-Bonnet se aplica a cada uno de los polígonos C_i de tal recubrimiento. Esto nos da

$$\int_{C_i} \kappa_g ds + \iint_{R_i} K ds = 2\pi - k_i \pi + \sum_j \beta_{ij}$$

siendo k_i el número de lados o bordes de C_i y $\beta_{ij} = \pi - \alpha_{ij}$ es el ángulo interno en un vértice, como en el ejemplo anterior. Supongamos, por otra parte, que la ecuación precedente se suma sobre todos los polígonos C_i . Como cada lado se toma en la suma dos veces con orientaciones opuestas, entonces se tiene: $\sum_i \left[\int_{C_i} \kappa_g ds \right] = 0$. Así, pues, $\iint_s K dA = 2\pi \sum_{i=1}^n 1 -$

$\pi \sum_{i=1}^n k_i + \sum_{i=1}^n \sum_j \beta_{ij}$. Como cada lado figura dos veces en la suma $\sum_{i=1}^n k_i$ y cada vértice contribuye con 2π a la suma $\sum_{i=1}^n \sum_j \beta_{ij}$, tenemos finalmente la fórmula

$$\iint_s K dA = 2\pi(a_2 - a_1 + a_0) \quad (11.23)$$

en donde $a_2 = n$ es el número total de polígonos, a_1 el número total de lados o bordes y a_0 el número total de vértices de la descomposición. La integral $\iint_s K dS$ se denomina *curvatura total* de S .

Una primera consecuencia de la ecuación precedente es que, según vemos, el entero $\chi = a_2 - a_1 + a_0$ sólo depende de la superficie y, en ningún caso, de la descomposición poligonal de ella. Este entero recibe el nombre de *característica de Euler* de la superficie. La característica de Euler también es invariante en toda aplicación (transformación) biyectiva y bicontinua de superficies. En efecto, es visiblemente evidente que cualquier descomposición poligonal de una superficie S se transformará en la correspondiente descomposición poligonal de su imagen con el mismo número de polígonos, lados y vértices. Y de esto se concluye que en las superficies compactas orientables, como la que nos ocupa, la curvatura total $\iint_s K dS$ es realmente un invariante topológico.

La ecuación (11.23) la enunciamos formalmente del siguiente modo

Teorema 11.19. Teorema de Gauss-Bonnet. Si S es una superficie de clase C^3 , compacta y orientable, entonces,

$$\iint_s K dS = 2\pi \chi(s)$$

siendo K la curvatura gaussiana de S y $\chi(s)$ es la característica de Euler de S .

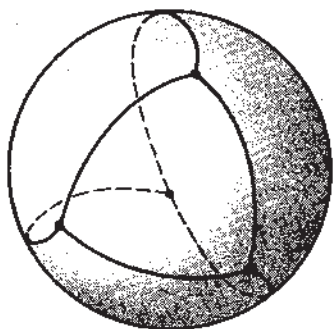


Fig. 11-25

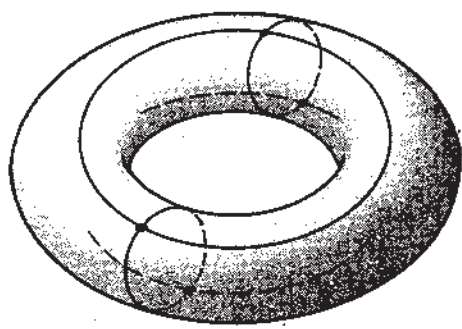


Fig. 11-26

Ejemplo 11.11.

- En la figura 11-25 se observa una descomposición poligonal de la superficie esférica en 4 polígonos, 6 bordes y 4 vértices. Así, pues, la característica de Euler de la superficie esférica es 2, y, según la ecuación (11.23), su curvatura total es 4π .
- En la figura 11-26 se observa una descomposición poligonal del toro en 4 polígonos, 8 lados y 4 vértices. Así, pues, la característica de Euler del toro es 0. La curvatura total también es 0.
- El toro es un ejemplo de una esfera con una agarradera. Véase la página 275. Tal como se puede apreciar en la figura 11-27, para obtener una esfera de dos asas, basta agregar a una esfera de un asa, un toro a lo largo de un cierto polígono. Este hecho produce el efecto de reducir en 2 el número total de polígonos de ambas superficies, rebajar el número total de bordes en el número de lados del polígono que se considera, y disminuir el número total de vértices en el número de vértices del polígono aludido. Como el número de bordes y de vértices de un polígono son iguales, la característica de Euler de la esfera que tiene dos agarraderas es -2 . En general, la característica de Euler de la superficie que se obtenga agregando una nueva asa a una superficie que tuviera $p - 1$ asas, será la característica de Euler de la superficie inicial menos 2. En esta forma, obtenemos para la característica de Euler de una superficie con p asas, la siguiente fórmula:

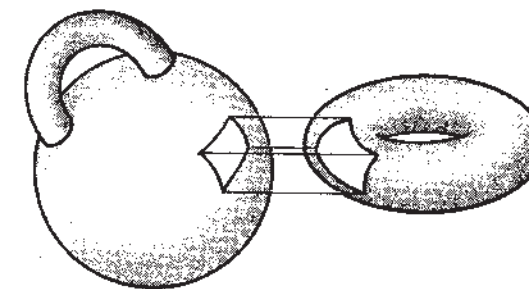


Fig. 11-27

Problemas resueltos

APLICACIONES SOBRE SUPERFICIES

11.1. Demostrar que una aplicación regular derivable f de una superficie S en una superficie S^* es una aplicación continua de S en S^* .

Supongamos que $f(P_0) = P_0^*$ es un punto de S^* y $S_\epsilon(P_0^*)$ es un entorno arbitrario de P_0^* . De acuerdo con el corolario de la página 244, existe una carta D en S que contiene a P_0 , carta en la cual f es continua. De modo que existe un entorno $S_{\delta_1}(P_0)$ tal que $f(P) \in S_\epsilon(P_0^*)$ para P en $S_{\delta_1}(P_0) \cap D$. Y según el problema 8.13, a cada P_0 perteneciente a una carta D de la superficie S , le corresponde un entorno $S_{\delta_2}(P_0)$ tal que $S_{\delta_2}(P_0) \cap S \subset D$. De modo que para un P perteneciente a $S_\delta(P_0) \cap S$, en donde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, tendremos un P que pertenece a $S_{\delta_1}(P_0) \cap D$ y, por tanto, una $f(P)$ en $S_\epsilon(P_0^*)$. De esto se concluye que f es continua en P_0 . Y como P_0 es arbitrario, f es una aplicación continua de S en S^* .

11.2. Demostrar que si f es una aplicación regular derivable de S en S^* y es g una aplicación regular derivable de S^* en S^{**} , entonces la aplicación compuesta $g \circ f$ es una aplicación regular derivable de S en S^{**} .

Sea $x = x(u, v)$ una carta de S definida en U . Es necesario demostrar que $x^{**} = (g \circ f)(x(u, v))$ es una representación paramétrica regular en S^{**} . Como f es una aplicación regular derivable de S en S^* , del teorema 11.1 se colige que existe un entorno $S(u, v)$ para cada (u, v) en U tal que $x^* = f(x(u, v))$ sea una carta local en S^* para todo (u, v) en $S(u, v)$. Comoquiera que g es una aplicación regular derivable de S^* en S^{**} , entonces $x^{**} = g(x^*(u, v)) = g(f(x(u, v))) = (g \circ f)(x(u, v))$ es una representación paramétrica regular en S^{**} para cualquier (u, v) en $S(u, v)$. Y como (u, v) es un punto arbitrario, perteneciente a U , entonces $x^{**} = (g \circ f)(x(u, v))$ es una representación paramétrica regular en S^{**} , definida en U , que era lo que se necesitaba demostrar.

11.3. Sea f una función de S en S^* tal que para toda carta local, $x = x(u, v)$, de una base de cartas para S , la función $x^* = f(x(u, v))$ sea una representación paramétrica

regular de clase C^r . Demostrar que $x^* = f(x(u, v))$ es una representación paramétrica regular de clase C^r para todas las cartas locales $x = x(u, v)$ de S y, en consecuencia, f será una aplicación regular derivable de clase C^r de S en S^* .

Sea $x = x(u, v)$ una carta arbitraria de S definida en U . Es necesario demostrar que $x^* = f(x(u, v))$ es una representación paramétrica regular en S^* . Sea (u, v) un punto arbitrario de U y P el punto de $x = x(u, v)$ que corresponde a (u, v) . Convengamos que $x = y(\theta, \phi)$ es una carta de la base que contiene a P . Según el teorema 8.3 de la página 166, la intersección de $x = x(u, v)$ con $x = y(\theta, \phi)$ es una carta de S , definida en un conjunto abierto W que contiene a (u, v) y dentro del cual $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ es una transformación paramétrica admisible. Como $x^* = f(x(u, v)) = f(y(\theta(u, v), \phi(u, v)))$, en donde $f(y(\theta, \phi))$ es una representación paramétrica regular, se colige que $x^* = f(x(u, v))$ es también una representación paramétrica regular, definida en W . Y como (u, v) es un punto arbitrario, perteneciente a U , se concluye que $x^* = f(x(u, v))$ es una representación paramétrica regular, definida en U .

11.4. Si f es una aplicación inyectiva, regular y derivable de una superficie S sobre S^* , demostrar que f^{-1} es una aplicación regular derivable de S^* sobre S .

Sea $x^* = x^*(u, v)$ una carta de S^* definida en U . Es necesario demostrar que $x = f^{-1}(x^*(u, v))$ es una representación paramétrica regular en S . Al igual que en los problemas precedentes, en éste es suficiente demostrar que $x = f^{-1}(x^*(u, v))$ es una representación paramétrica regular en algún entorno de un punto arbitrario (u, v) de U . Convengamos que P^* designa la imagen de (u, v) por medio de $x^* = x^*(u, v)$ y P la imagen de P^* por la acción de f^{-1} . Ahora, bien, sea $x = x(\theta, \phi)$ una carta de S que contenga a P . Como f es una aplicación regular derivable de S en S^* , entonces $x^* = x^*(\theta, \phi) = f(x(\theta, \phi))$ es una representación paramétrica regular en S^* que contiene a P^* . De acuerdo con el teorema 11.1, podemos suponer que $x^* = x^*(\theta, \phi)$ es una carta local. Según el teorema 8.3 de la página 166, la intersección de las cartas $x^* = x^*(u, v)$ y $x^* = x^*(\theta, \phi)$ de S^* es otra carta, que contiene a P^* y tal que $\theta = \theta(u, v)$, $\phi = \phi(u, v)$ es una conveniente transformación de parámetros. Pero, entonces, en la intersección, $x = f^{-1}(x^*(u, v)) = x(\theta(u, v), \phi(u, v))$ es una representación paramétrica regular en S ; y con esto queda completa la demostración.

APLICACIONES ISOMETRICAS

11.5. Si f es una isometría de una superficie S sobre una superficie S^* , demostrar que f^{-1} es una isometría de S^* sobre S .

De acuerdo con el problema 11.4, f^{-1} es una aplicación regular derivable de S^* en S . De modo que para cualquier arco C^* en S^* , $f^{-1}(C^*)$ es un arco regular en S y, por ser f una aplicación isométrica de S sobre S^* , entonces

$$L(f^{-1}(C^*)) = L(f(f^{-1}(C^*))) = L(C^*)$$

en donde, $L(C^*)$ es la longitud de C^* , lo cual demuestra que f^{-1} es una isometría de S^* sobre S .

11.6. Demostrar el teorema 11.4, a saber: La distancia intrínseca $D(P, Q)$ de un punto P a un punto Q de una superficie, cumple las siguientes condiciones

- (i) $D(P, Q) = D(Q, P)$
- (ii) $D(P, R) \leq D(P, Q) + D(Q, R)$
- (iii) $D(P, Q) \geq 0$, $D(P, Q) = 0$ sii $P = Q$.
- (i) Comoquiera que la longitud $L(C)$ de un arco regular C desde P hasta Q , es independiente de la orientación de C , entonces el conjunto de los números $L(C)$ correspondientes a todos los arcos regulares C de P a Q , también es independiente de la orientación de C . De esta suerte, $D(P, Q)$, que es el ínfimo de los números $L(C)$, es independiente de la orientación de C . Por tanto, $D(P, Q) = D(Q, P)$.
- (ii) Como $D(P, Q)$ es el ínfimo de las longitudes de los arcos que unen a P y Q , dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un arco regular C_1 que une a P y Q tal que $L(C_1) \leq D(P, Q) + \epsilon$. Por la misma razón, existirá un C_2 que una a Q con R , tal que $L(C_2) \leq D(Q, R) + \epsilon$. Ahora, bien, el arco que se obtiene al unir C_2 y C_1 tendrá, en general, una "esquina" (o punto anguloso) en Q , y, por tanto, no será un arco regular entre P y R . Sin embargo, es posible demostrar que

existe un arco regular entre P y R que, en el peor de los casos, sea escasamente mayor. En otros términos, existe entre P y R un arco C tal que $L(C) \leq L(C_1) + L(C_2) + \epsilon$. Pero, en ese caso se colige que

$$D(P, R) \leq L(C) \leq L(C_1) + L(C_2) + \epsilon \leq D(P, Q) + D(Q, R) + 3\epsilon$$

Y como ϵ es arbitrario, tenemos que: $D(P, R) \leq D(P, Q) + D(Q, R)$.

- (iii) Puesto que $L(C) \geq 0$, para cualquier arco C desde P hasta Q , entonces, $D(P, Q) \geq 0$. Si $P = Q$, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe entre P y Q un arco regular C tal que $L(C) \leq \epsilon$. Y como $D(P, Q) \leq L(C) \leq \epsilon$ para un ϵ arbitrario, se concluye que $D(P, Q) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $D(P, Q) = 0$. Entonces, dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, existirá entre P y Q un arco C tal que $L(C) \leq D(P, Q) + \epsilon = \epsilon$. Pero, la distancia euclidiana es $|P - Q| \leq L(C)$. Y como ϵ es arbitrario, entonces, $|P - Q| = 0$, o sea $P = Q$.

11.7. Sea f una aplicación local isométrica de una superficie S en una superficie S^* . Demostrar que para cualquier par de puntos P y Q de S , la distancia intrínseca $D(P, Q) = D(f(P), f(Q))$.

Como quiera que $D(P, Q)$ es el ínfimo entre las longitudes de los arcos que unen a P con Q , dado un $\epsilon > 0$, arbitrario, existirá un arco C que una a P con Q en tal forma que su longitud $L(C)$ cumpla la condición: $L(C) \leq D(P, Q) + \epsilon$. Ahora, bien, supongamos que $C^* = f(C)$. Como f es una aplicación local isométrica, entonces $L(C^*) = L(C)$. De esta suerte, $D(f(P), f(Q)) \leq L(C^*) = L(C) \leq D(P, Q) + \epsilon$. Y como ϵ es arbitrario, se obtiene el resultado deseado.

11.8. Sea $y = y(s, v) = x(s) + vt(s)$, $v > 0$, una parte de la superficie tangente a una curva, cuya representación natural es $x = x(s)$, que no tenga puntos de inflexión (véase el problema 8.19 de la página 178). Demostrar que una vecindad de cada uno de los puntos de la superficie tangente se puede aplicar isométricamente sobre un subconjunto del plano.

De acuerdo con el teorema fundamental de las curvas, existe una representación natural de una curva $x^* = x^*(s)$ en el plano x_1x_2 tal que a todo lo largo de $x^* = x^*(s)$ la curvatura $\kappa^*(s)$ es igual a la curvatura $\kappa(s)$ a todo lo largo de $x = x(s)$. Dado un punto P de la superficie tangente y una carta $y = y(s, v)$ que contenga a P ; definimos la aplicación f de la carta en el plano por la expresión: $y^* = f(y(s, v)) = f(x(s) + vt(s)) = x^*(s) + vt^*(s)$. En este caso, $y_s^* = \dot{x}^* + v\dot{t}$, $y_v^* = t^* + v\kappa^*n^*$ y y_v^* son continuas y $|y_s^* \times y_v^*| = v\kappa^* \neq 0$, pues $v > 0$ y $\kappa^* = \kappa \neq 0$; por tanto, f es una aplicación regular derivable. De acuerdo con el teorema 11.1 de la página 243, podemos suponer que la carta que contiene a P es lo suficientemente pequeña como para que f sea inyectiva. Ahora, bien, en toda la extensión de la carta $y = y(s, v)$ tenemos que

$$E = y_s \cdot y_s = (t + v\kappa n) \cdot (t + v\kappa n) = 1 + v^2\kappa^2$$

$$F = y_s \cdot y_v = (t + v\kappa n) \cdot t = 1, \quad G = y_v \cdot y_v = t \cdot t = 1$$

Sobre $y^* = f(y(s, v)) = x^*(s) + vt^*(s)$ tenemos

$$E^* = y_s^* \cdot y_s^* = 1 + v^2(\kappa^*)^2, \quad F^* = y_s^* \cdot y_v^* = 1, \quad G^* = y_v^* \cdot y_v^* = 1$$

Pero, $\kappa = \kappa^*$. Por tanto, $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$. Del teorema 11.3 de la página 245, se deduce que f es una isometría.

11.9. Si f es una isometría de S en S^* y $x = x(u, v)$ es una carta en S , demostrar que $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$, siendo E, F y G los primeros coeficientes fundamentales en la superficie $x = x(u, v)$ y E^*, F^* y G^* los primeros coeficientes fundamentales de la $x^* = f(x(u, v))$.

Sea (u, v) un punto arbitrario perteneciente al dominio de $x = x(u, v)$. Por otra parte, sean: $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$, un arco arbitrario que pase por (u, v) , y C_t y C_t^* las imágenes de $u = u(t)$, $v = v(t)$ sobre S y S^* , respectivamente, en el intervalo $a \leq t \leq b$. Como f es una isometría de S sobre S^* , se tiene

$$\begin{aligned} L(C_t) &= \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt = L(C_t^*) \\ &= \int_a^b \sqrt{E^* \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F^* \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G^* \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt \end{aligned}$$

Pero, lo anterior vale para todo τ . Por tanto, para todo valor de t , y , en particular, en el punto (u, v) , se tiene

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = E^*\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F^*\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G^*\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Pero, hemos supuesto que la curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ que pase por (u, v) es arbitraria. Por consiguiente, la ecuación anterior vale también en (u, v) para todo du/dt , dv/dt . De ello se concluye que $E = E^*$, $F = F^*$ y $G = G^*$ en (u, v) . Y como (u, v) es arbitrario, se deduce el resultado que se buscaba.

- 11.10. Se dice que una transformación f regular y derivable de una superficie S en otra superficie S^* es *conforme* si a cada carta $x = x(u, v)$ de S se le puede hacer corresponder una función $\lambda(u, v) > 0$ tal que para todo (u, v) sea

$$E = \lambda E^*, \quad F = \lambda F^* \quad \text{y} \quad G = \lambda G^*$$

en donde E , F y G y E^* , F^* y G^* son los primeros coeficientes fundamentales en las cartas $x = x(u, v)$ y $x^* = f(x(u, v))$ respectivamente. Demostrar que una aplicación (transformación o representación) conforme, conserva el ángulo que forman dos curvas orientadas que se cortan. (Ángulo entre dos curvas orientadas que se cortan, $x = x(t)$ y $\xi = \xi(\tau)$, es el ángulo $\theta = \angle(x', \xi')$, que forman sus tangentes en el punto de intersección.)

Supongamos que $x = x(u, v)$ es una carta que contiene a P y $x = x(u(t), v(t))$ y $\xi = x(\eta(\tau), \zeta(\tau))$ son dos curvas de S que se cortan en P , cuyas tangentes en ese punto son $x' = x_u u' + x_v v'$ y $\xi' = x_u \eta' + x_v \zeta'$, respectivamente. Si $\theta = \angle(x', \xi')$, entonces, de la ecuación (9.6) de la página 184, se deduce que

$$\cos \theta = \frac{Eu'\eta' + F(u'\zeta' + v'\eta') + Gv'\zeta'}{[E(u')^2 + 2F'u'v' + G(v')^2]^{1/2} [E(\eta')^2 + 2F'\eta'\zeta' + G(\zeta')^2]^{1/2}}$$

Por otra parte, si θ^* es el ángulo que forman las tangentes $x^* = x_u^* u' + x_v^* v'$ y $\xi^* = x_u^* \eta' + x_v^* \zeta'$ de las imágenes $x^* = x^*(u(t), v(t))$ $\xi^* = x^*(\eta(\tau), \zeta(\tau))$ de las curvas en S^* , entonces

$$\cos \theta^* = \frac{E^*u'\eta' + F^*(u'\zeta' + v'\eta') + G^*v'\zeta'}{[E^*(u')^2 + 2F^*u'v' + G^*(v')^2]^{1/2} [E^*(\eta')^2 + 2F^*\eta'\zeta' + G^*(\zeta')^2]^{1/2}}$$

Pero, en los puntos correspondientes $E = \lambda E^*$, $F = \lambda F^*$ y $G = \lambda G^*$. Por tanto, $\cos \theta = \cos \theta^*$, o sea, $\theta = \theta^*$, con lo cual la demostración queda completa.

- 11.11. Se dice que dos superficies S y S^* son *aplicables* si existe una familia continua f_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, de aplicaciones de S en E^3 tal que: (i) $f_0(S) = S$, (ii) $f_1(S) = S^*$, (iii) para todo valor de λ las f_λ son aplicaciones isométricas de S en $f_\lambda(S)$. Intuitivamente, el que S y S^* sean aplicables, significa que la superficie S se puede combiar isométrica y continuamente sobre la S^* . Si S y S^* son aplicables, diremos que la S^* se puede obtener a partir de la S por *flexión*. Las propiedades de una superficie que se conservan invariantes en una familia continua de isometrías, como la que hemos señalado, reciben el nombre de *invariantes de flexión*. Es evidente que si S y S^* son aplicables, entonces son isométricas. La recíproca no es siempre verdadera. Con base en todo lo anterior, demostrar que cualquier entorno de cada uno de los puntos de una "rama" de la superficie tangente a una curva, se puede aplicar por flexión sobre el plano. (Véase el problema 11.8.)

Sea $y = y(s, v) = x(s) + vt(s)$, $v > 0$, la superficie tangente a la curva $x = x(s)$ que carezca de puntos de inflexión. De acuerdo con el teorema fundamental de las curvas, por cada valor de λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, existe una curva $x = x_\lambda(s)$, de curvatura $\kappa(s)$ y torsión $(1 - \lambda)\tau(s)$, siendo $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ la curvatura y la torsión a lo largo de $x = x(s)$. Obsérvese que $x = x_0(s) = x(s)$ y que $x = x_1(s)$ es una curva plana, pues su torsión es igual a cero. Es posible demostrar, además, que $x_\lambda(s)$ es continua en λ . Consideremos, ahora, la familia de aplicaciones f_λ de la superficie tangente descrita por $x = f_\lambda(y(s, v)) = x_\lambda(s) + vt_\lambda(s)$, $v > 0$. Al igual que en el problema 11.8, aquí es fácil verificar que, para cada valor de λ , f_λ es una aplicación regular derivable de una carta, perteneciente a la superficie tangente, sobre su imagen. Es evidente que $f_0(y(s, v)) = y(s, v)$ y que

$f_1(y(s, v))$ es un subconjunto del plano engendrado por las tangentes a la curva plana $x = x_1(s)$. Por último, para cada valor de λ , $E_\lambda = (x_\lambda)_s \cdot (x_\lambda)_s = 1 + v^2\kappa^2 = E_0$, $F_\lambda = (x_\lambda)_s \cdot (x_\lambda)_v = 1 = F_0$, y $G_\lambda = (x_\lambda)_v \cdot (x_\lambda)_v = 1 = G_0$, lo cual demuestra la proposición.

GEODESICAS

- 11.12. Determinar las geodésicas en el cono circular descrito por $x = (u \sin \alpha \cos \theta)e_1 + (u \sin \alpha \sin \theta)e_2 + (u \cos \alpha)e_3$ $\alpha = \text{constante}$, $0 < \alpha < \pi/2$, $u > 0$ resolviendo, para ello, las ecuaciones (11.7) de la página 250. El cálculo da

$$E = x_u \cdot x_u = 1, \quad F = x_u \cdot x_\theta = 0, \quad G = x_\theta \cdot x_\theta = u^2 \sin^2 \alpha; \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = 0, \\ \Gamma_{22}^2 = -u \sin^2 \alpha, \quad \Gamma_{12}^2 = 1/u. \text{ En esta forma, la segunda de las ecuaciones (11.7) es } \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -(2/u) \frac{du}{ds} \frac{d\theta}{ds}. \\ \text{Si hacemos } \phi = \frac{d\theta}{ds}, \text{ tendremos que } \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{ds} = \frac{-2}{u} \frac{du}{ds}. \text{ Por tanto, } \log \phi = -2 \log u + K \text{ o sea} \\ \phi = \frac{d\theta}{ds} = C/u^2 \sin^2 \alpha, \text{ en donde, } C = e^K \sin^2 \alpha. \text{ Como } s \text{ es la longitud de arco, entonces}$$

$$1 = \left| \frac{dx}{ds} \right|^2 = \left| x_u \frac{du}{ds} + x_\theta \frac{d\theta}{ds} \right|^2 = E \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2F \frac{du}{ds} \frac{d\theta}{ds} + G \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2$$

$$\text{o sea: } 1 = \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + u^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2. \text{ Sustituyendo } d\theta/ds = C/u^2 \sin^2 \alpha, \text{ se tiene,} \\ du/ds = \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - C^2/u \sin^2 \alpha}$$

De donde: $du/d\theta = (1/C)u \sin \alpha \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - C^2}$ o sea: $u = A \sec[(\sin \alpha)\theta + B]$ siendo $A = \text{constante}$, $B = \text{constante}$.

- 11.13. Demostrar que la curvatura geodésica κ_g de una curva descrita por la representación natural $x = x(s) = x(u(s), v(s))$ de clase C^2 en una carta $x = x(u, v)$ de clase C^2 viene dada por

$$\kappa_g = \left[\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right) + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \left(\frac{du}{ds} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right. \\ \left. - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 + \frac{du}{ds} \frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{d^2 u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right] \sqrt{EG - F^2}$$

$$t = \frac{dx}{ds} = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds}, \quad k = \frac{dt}{ds} = x_{uu} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2x_{uv} \left(\frac{du}{ds} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right) + x_{vv} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + x_u \frac{d^2 u}{ds^2} + x_v \frac{d^2 v}{ds^2}$$

De esta suerte, y según la ecuación (11.3) de la página 248, se tiene

$$\kappa_g = [tkN] = [x_u x_{uu} N] \left(\frac{du}{ds} \right)^3 + (2[x_u x_{uv} N] + [x_v x_{uu} N]) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \left(\frac{dv}{ds} \right) \\ + ([x_u x_{vv} N] + 2[x_v x_{uv} N]) \left(\frac{du}{ds} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + [x_v x_{vv} N] \left(\frac{dv}{ds} \right)^3 + [x_u x_v N] \left(\frac{du}{ds} \frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{d^2 u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right)$$

Y de la ecuación de Gauss, a saber, $x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + LN$, de la página 215, se obtiene

$$[x_u x_{uu} N] = \Gamma_{11}^1 [x_u x_u N] + \Gamma_{11}^2 [x_u x_v N] + L[x_u NN] = \Gamma_{11}^2 [x_u x_v N]$$

Pero, $[x_u x_v N] = (x_u \times x_v) \cdot (x_u \times x_v) / |x_u \times x_v| = |x_u \times x_v| = \sqrt{EG - F^2}$. De donde $[x_u x_{uu} N] = \Gamma_{11}^2 \sqrt{EG - F^2}$.

Análogamente,

$$[x_v x_{vv} N] = -\Gamma_{11}^1 \sqrt{EG - F^2}, \quad [x_u x_{vv} N] = \Gamma_{12}^2 \sqrt{EG - F^2}, \quad [x_v x_{uv} N] = -\Gamma_{12}^1 \sqrt{EG - F^2}, \\ [x_u x_{uv} N] = \Gamma_{22}^2 \sqrt{EG - F^2}, \quad [x_v x_{vv} N] = -\Gamma_{22}^1 \sqrt{EG - F^2}. \text{ Sustituidos esos valores en la anterior} \\ \text{ecuación para } \kappa_g \text{ se llega al resultado que se esperaba.}$$

- 11.14. Demostrar el teorema 11.8, a saber: Una representación natural de una curva $x = x(s) = x(u(s), v(s))$ de clase C^2 en una carta $x = x(u, v)$ de clase C^2 es una geodésica si y sólo si $u(s)$ y $v(s)$ verifican las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0$$

Recordemos que $\kappa_g = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$; en este caso, $\mathbf{t}, \mathbf{U}, \mathbf{N}$ es una terna ortonormal. De modo que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una geodésica sii $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U} = 0$. Como \mathbf{k} siempre es ortogonal a \mathbf{t} , se deduce que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una geodésica sii $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_u = 0$ y $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_v = 0$. De la igualdad $\mathbf{t} = \mathbf{x}_u \cdot (du/ds) + \mathbf{x}_v \cdot (dv/ds)$ se desprende que

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{x}_{uu} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{x}_{uv} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \mathbf{x}_{vv} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathbf{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{x}_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

Por tanto, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ es una geodésica si y sólo si

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) \frac{d^2u}{ds^2} + (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \frac{d^2v}{ds^2} = 0$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) \frac{d^2u}{ds^2} + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) \frac{d^2v}{ds^2} = 0$$

Si resolvemos estas ecuaciones para d^2u/ds^2 y d^2v/ds^2 y tenemos en cuenta la identidad vectorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ se tienen las ecuaciones equivalentes

$$(EG - F^2) \frac{d^2u}{ds^2} = (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_{uu}) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_{uv}) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_{vv}) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

$$(EG - F^2) \frac{d^2v}{ds^2} = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_{uu}) \cdot (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_{uv}) \cdot (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_{vv}) \cdot (\mathbf{x}_v \times \mathbf{x}_u) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

Si en el problema anterior utilizamos la igualdad $\mathbf{N} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v / |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| = \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v / \sqrt{EG - F^2}$ y las expresiones para $[\mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uu} \mathbf{N}]$, etc., se tienen las ecuaciones deseadas.

11.15. Si $u(s)$ y $v(s)$ son soluciones de las ecuaciones diferenciales del problema precedente de modo que en algún punto $s = s_0$, $E_0 \left(\frac{du}{ds}\right)_0^2 + 2F_0 \left(\frac{du}{ds}\right)_0 \left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + G_0 \left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2 = 1$, demostrar que s es un parámetro natural a lo largo de la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(s), v(s))$.

De acuerdo con el problema anterior, $u(s), v(s)$ es una solución de las ecuaciones diferenciales si y sólo si el vector $\frac{d\mathbf{x}}{ds}$, siendo $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds}$, verifica a $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{x}_u = 0$ y $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{x}_v = 0$, o, lo que es igual, a $\frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{U} = 0$ para todo vector tangente \mathbf{U} . Pero, entonces será $\frac{d}{ds} |\mathbf{t}|^2 = \frac{d}{ds} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 2 \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \mathbf{t} = 0$, pues \mathbf{t} es un vector tangente. Por tanto, integrando se tiene: $|\mathbf{t}|^2 = C = \text{constante}$. Pero, en $s = s_0$, es

$$|\mathbf{t}_0|^2 = \left| (\mathbf{x}_u)_0 \left(\frac{du}{ds}\right)_0 + (\mathbf{x}_v)_0 \left(\frac{dv}{ds}\right)_0 \right|^2 = E_0 \left(\frac{du}{ds}\right)_0^2 + 2F_0 \left(\frac{du}{ds}\right)_0 \left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + G_0 \left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2 = 1$$

De modo que $|\mathbf{t}|^2 = |d\mathbf{x}/ds|^2 = 1$ para todo valor de s , con lo cual se completa la demostración.

11.16. Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ es una representación natural de una geodésica de una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ tal que $E = E(u)$, $F = 0$ y $G = G(u)$, demostrar que $\sqrt{G} \cos \theta = C = \text{constante}$, en donde θ es el ángulo que forma la geodésica con las curvas $u = \text{constante}$ de parámetro v , es decir, $\theta = \angle(\mathbf{t}, \mathbf{x}_v)$.

Es fácil, de acuerdo con la ecuación (10.4) de la página 215, hacer los cálculos que conducen a $\Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = G_u/2G$, $\Gamma_{22}^2 = 0$. Por tanto, la segunda de las ecuaciones (11.7) es $\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{G_u}{G} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} = 0$.

Como $\frac{d}{ds} \left(G \frac{dv}{ds} \right) = G \frac{d^2v}{ds^2} + G_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds}$, esta es equivalente a la $\frac{d}{ds} \left(G \frac{dv}{ds} \right) = 0$. Por tanto, $G \frac{dv}{ds} =$

$C = \text{constante}$. Utilizando la expresión $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$, encontramos que

$$G \frac{dv}{ds} = (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u) \frac{dv}{ds} = \left(\mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds} \right) \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_v = |\mathbf{t}| |\mathbf{x}_v| \cos \angle(\mathbf{t}, \mathbf{x}_v) = \sqrt{G} \cos \theta$$

De suerte que $\sqrt{G} \cos \theta = C = \text{constante}$.

11.17. Demostrar el teorema 11.10, a saber: Si $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es una carta local en una superficie de clase ≥ 2 tal que $E = E(u)$, $F = 0$ y $G = G(u)$, entonces

(i) las curvas $v = \text{constante}$, de parámetro u , son geodésicas,

(ii) la curva $u = u_0$, de parámetro v , es una geodésica sii $G_u(u_0) = 0$,

(iii) una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v(u))$ es una geodésica sii $v = \pm \int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}} du$, $C = \text{constante}$.

(i) Según la ecuación (11.6) de la página 249, $(\kappa_g)_{v=\text{constante}} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = 0$. De donde resulta que las curvas $v = \text{constante}$, de parámetro u , son geodésicas.

(ii) Nuevamente, según la ecuación (11.6), $(\kappa_g)_{u=u_0} = \frac{G_u(u_0)}{2G(u_0)\sqrt{E(u_0)}}$. Por tanto, $u = u_0$ es una geodésica si y sólo si $G_u(u_0) = 0$.

(iii) Al igual que en el problema anterior, $G \frac{dv}{ds} = C = \text{constante}$. Además, como s es la longitud de arco, se tiene

$$1 = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right|^2 = \left| \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds} \right|^2 = E \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + G \left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \text{ Sustituyendo } \frac{dv}{ds} = \frac{C}{G} \text{ tenemos } 1 = E \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{C^2}{G} \text{ o } \frac{du}{ds} = \pm \frac{\sqrt{G-C^2}}{\sqrt{E}\sqrt{G}}. \text{ Así, pues, } \frac{dv}{du} = \frac{dv/ds}{du/ds} = \pm \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G-C^2}}, \text{ de lo cual se desprende el resultado que se deseaba.}$$

11.18. Una carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ se denomina *carta de Liouville* si $E = G = U + V$ y $F = 0$, en donde U es función de la sola variable u y V es función únicamente de v . Si es $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, una representación natural de una geodésica de una carta como la aludida, demostrar que:

$$U \sin^2 \theta - V \cos^2 \theta = C, \quad C = \text{constante}$$

siendo θ el ángulo que forman la geodésica y las curvas $v = \text{constante}$, de parámetro u ; es decir, $\theta = \angle(\mathbf{t}, \mathbf{x}_u)$.

En este caso, $\frac{U'}{2(U+V)} = \Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2$ y $\frac{V'}{2(U+V)} = \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2$. Al sustituir en la ecuación (11.4) de la página 248, e introduciendo $\kappa_g = 0$, se logra

$$-V' \left(\frac{du}{ds}\right)^3 + U' \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \left(\frac{dv}{ds}\right) - V' \frac{du}{ds} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + U' \left(\frac{dv}{ds}\right)^3 + 2(U+V) \left(\frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds}\right) = 0$$

$$\text{o sea: } \left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \right] \left[U' \frac{dv}{ds} - V' \frac{du}{ds} \right] + 2(U+V) \left(\frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right) = 0$$

$$\text{Esto equivale a: } \frac{d}{ds} \left[\frac{U(dv/ds)^2 - V(du/ds)^2}{(du/ds)^2 + (dv/ds)^2} \right] = 0$$

Por tanto,

$$(a) \quad \left[U \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - V \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \right] / \left[\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \right] = C = \text{constante}$$

Ahora, bien, $\cos \theta = \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_u}{|\mathbf{t}| |\mathbf{x}_u|} = \frac{(\mathbf{x}_u du/ds + \mathbf{x}_v dv/ds) \cdot \mathbf{x}_u}{|\mathbf{x}_u|} = |\mathbf{x}_u| \frac{du}{ds}$. Análogamente,

$$\sin \theta = \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_v|} = |\mathbf{x}_v| \frac{dv}{ds}.$$

Como s es la longitud de arco,

$$1 = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right|^2 = \left| \mathbf{x}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{ds} \right|^2 = (U+V) \left[\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right]$$

$$= |\mathbf{x}_u|^2 \left[\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] = |\mathbf{x}_u|^2 \left[\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right]$$

Así, pues, $\cos^2 \theta = \left(\frac{du}{ds} \right)^2 / \left[\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right]$ y $\sin^2 \theta = \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 / \left[\left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right]$. Si sustituimos en el (a) precedente, se llega al resultado buscado.

11.19. Fórmula de Liouville. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta de una superficie de clase ≥ 2 , tal que las curvas de parámetro u y las de parámetro v sean ortogonales y sea, además, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$ una curva C representada en forma natural, en la carta de clase C^2 . Supongamos, por otra parte, que $\mathbf{g}_1 = \mathbf{x}_u/|\mathbf{x}_u|$ y $\mathbf{g}_2 = \mathbf{x}_v/|\mathbf{x}_v|$ son los vectores unitarios en la dirección de las curvas de parámetros y que $\theta = \theta(s)$ es la función, a lo largo de C , descrita por $\mathbf{t} = (\cos \theta)\mathbf{g}_1 + (\sin \theta)\mathbf{g}_2$, siendo \mathbf{t} la tangente unitaria a todo lo largo de C . Demostrar que la curvatura geodésica de C viene dada por

$$\kappa_g = d\theta/ds + \kappa_1 \cos \theta + \kappa_2 \sin \theta$$

sabiendo que κ_1 es la curvatura geodésica de la curva de parámetro u y κ_2 , la curvatura geodésica de la curva de parámetro v .

Haciendo la derivada de \mathbf{g}_1 a lo largo de C y utilizando las ecuaciones (11.21), se tiene

$$\frac{d\mathbf{g}_1}{ds} = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial v} \frac{dv}{ds} = \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_1} \frac{ds_1}{du} \frac{du}{ds} + \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_2} \frac{ds_2}{dv} \frac{dv}{ds}$$

$$= \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_1} |\mathbf{x}_u| \frac{du}{ds} + \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_2} |\mathbf{x}_v| \frac{dv}{ds} = \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_1} \cos \theta + \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_2} \sin \theta$$

siendo s_1 la longitud de arco a lo largo de las curvas de parámetro u y s_2 es la longitud de arco a lo largo de las curvas de parámetro v . Análogamente, $\frac{d\mathbf{g}_2}{ds} = \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_1} \cos \theta + \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_2} \sin \theta$. Derivando \mathbf{t} a lo largo de C y utilizando lo anterior, se tiene

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = (\cos \theta) \frac{d\mathbf{g}_1}{ds} - (\sin \theta) \mathbf{g}_1 \frac{d\theta}{ds} + (\sin \theta) \frac{d\mathbf{g}_2}{ds} + (\cos \theta) \mathbf{g}_2 \frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_1} \cos^2 \theta + \left(\frac{d\mathbf{g}_1}{ds_2} + \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_1} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_2} \sin^2 \theta + \mathbf{U} \frac{d\theta}{ds}$$

en donde $\mathbf{U} = -\mathbf{g}_1 \sin \theta + \mathbf{g}_2 \cos \theta$. De acuerdo con la ecuación (11.2) de la página 248, y con el hecho de que $\mathbf{g}_1 \cdot \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_1} = \mathbf{g}_1 \cdot \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_2} = \mathbf{g}_2 \cdot \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_1} = \mathbf{g}_2 \cdot \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_2} = 0$, tenemos:

$$\kappa_g = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{k} \cdot (-\mathbf{g}_1 \sin \theta + \mathbf{g}_2 \cos \theta)$$

$$= \left(\mathbf{g}_2 \cdot \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_1} \right) \cos^3 \theta + \left(\mathbf{g}_2 \cdot \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_2} \right) \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$- \left(\mathbf{g}_1 \cdot \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_1} \right) \sin^2 \theta \cos \theta - \left(\mathbf{g}_1 \cdot \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_2} \right) \sin^3 \theta + \frac{d\theta}{ds}$$

Por último, observemos que la curvatura geodésica a lo largo de las curvas de parámetro u está dada por $\kappa_1 = \mathbf{g}_2 \cdot \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_1}$ y la curvatura a lo largo de la curva de parámetro v es $\kappa_2 = -\mathbf{g}_1 \cdot \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_2}$ y como $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = 0$, también $\kappa_1 = -\mathbf{g}_1 \cdot \frac{d\mathbf{g}_2}{ds_1}$ y $\kappa_2 = \mathbf{g}_2 \cdot \frac{d\mathbf{g}_1}{ds_2}$. Así, pues,

$$\kappa_g = d\theta/ds + \kappa_1 \cos^3 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta \sin \theta + \kappa_1 \sin^2 \theta \cos \theta + \kappa_2 \sin^3 \theta$$

lo cual proporciona el resultado esperado.

COORDENADAS GEODESICAS

11.20. Sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva C de clase C^2 en una superficie de clase ≥ 3 . Sea, además, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$ la familia de geodésicas, representadas en forma natural, que salen de C y son ortogonales a ella, es decir, $\mathbf{x}(0, t) = \mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{x}_s(0, t) \cdot \mathbf{x}(t) = 0$. Demostrar que existe un $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$ sea una representación paramétrica regular de clase C^2 para $-\epsilon < s < \epsilon$ y $a < t < b$.

Sea P un punto arbitrario de C y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ una carta que contenga a P . Sea, además, $u = u_0(t)$, $v = v_0(t)$ la curva del plano de los parámetros que se aplica sobre C , en un entorno de P , y sea $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ la familia de curvas que se aplican sobre las geodésicas descritas por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$. De acuerdo con el teorema 11.8 de la página 249, para todo valor de t , $u(s, t)$ y $v(s, t)$ son las únicas soluciones de las ecuaciones diferenciales (11.7) de la página 250, que cumplen las condiciones iniciales siguientes

$$u(0, t) = u_0(t), \quad v(0, t) = v_0(t), \quad u_s(0, t) = \xi(t), \quad v_s(0, t) = \eta(t)$$

aquí, las $\xi(t)$, $\eta(t)$ son de clase C^1 y están determinadas unívocamente por las ecuaciones siguientes

$$(i) \quad E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1$$

$$(ii) \quad E\xi \frac{du_0}{dt} + F \left(\xi \frac{dv_0}{dt} + \eta \frac{du_0}{dt} \right) + G\eta \frac{dv_0}{dt} = 0$$

$$(iii) \quad \det \begin{pmatrix} \xi & du_0/dt \\ \eta & dv_0/dt \end{pmatrix} > 0$$

La ecuación (i) nos asegura que, inicialmente, $|\mathbf{x}_s(0, t)| = 1$; la ecuación (ii) indica que $\cos \angle(\mathbf{x}_s(0, t), \mathbf{x}(0, t)) = 0$, es decir, las geodésicas cortan a C ortogonalmente; y la ecuación (iii) determina la orientación de las geodésicas $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$. Obsérvese que el determinante es diferente de cero, pues las geodésicas cortan a C ortogonalmente. Pero, entonces, según la teoría, las soluciones de las ecuaciones diferenciales dependen de sus condiciones iniciales; de ello, se colige que $u(s, t)$ y $v(s, t)$ tienen segundas derivadas continuas en algún entorno de C . Además, el jacobiano $\partial(u, v)/\partial(s, t)$ es diferente de cero en algún entorno de C pues ésta es continua y, en $(0, t)$, se tiene

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \Big|_{(0, t)} = \det \begin{pmatrix} u_s(0, t) & u_t(0, t) \\ v_s(0, t) & v_t(0, t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \xi & du_0/dt \\ \eta & dv_0/dt \end{pmatrix} \neq 0$$

De esta suerte, en un entorno del punto P , la función $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t) = \mathbf{x}(u(s, t), v(s, t))$ es una representación paramétrica regular de clase C^2 . Como C es compacta, existe un $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s, t)$ es una representación paramétrica regular de clase C^2 para $-\epsilon < s < \epsilon$, $a < t < b$.

11.21. Demostrar que existe un $\epsilon > 0$ tal que un sistema de coordenadas polares geodésicas $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \theta)$ en un punto P de una superficie de clase ≥ 3 es una representación paramétrica regular de clase C^2 para $0 < r < \epsilon$, $-\infty < \theta < \infty$, que aplica a $0 < r < \epsilon$, $0 \leq \theta < 2\pi$, biyectivamente sobre un entorno reducido de P .

Consideremos la carta local $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ que contiene a P , y tal que transforma a $(0, 0)$ en P y que, en ese punto, es $\mathbf{x}_u = \mathbf{g}_1$ y $\mathbf{x}_v = \mathbf{g}_2$, siendo \mathbf{g}_1 y \mathbf{g}_2 los vectores tangentes ortogonales respecto de los cuales se mide θ . Obsérvese que en P , $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = 1$, $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$ y $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1$. Consideremos, ahora, las ecuaciones diferenciales (11.7) respecto de la carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, a saber

$$(a) \quad u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + \Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0$$

$$v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + \Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0$$

con las condiciones iniciales

$$(b) \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad u'(0) = \xi, \quad v'(0) = \eta$$

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales para todos los ξ, η , en un entorno de $t = 0$, existe una solución, única, $u(t; \xi, \eta)$, $v(t; \xi, \eta)$, que posee derivadas continuas de segundo orden respecto de t, ξ, η . Comoquiera que las ecuaciones son lineales y homogéneas con relación a las derivadas de segundo orden y a los productos de las dos primeras derivadas, se colige que, dada cualquier solución $u(t; \xi, \eta)$, $v(t; \xi, \eta)$, las funciones $u(s; \rho\xi, \rho\eta)$, $v(s; \rho\xi, \rho\eta)$, en donde $t = \rho s$, constituyen también una solución de la ecuación diferencial para un ρs pequeño y verifican las condiciones

iniciales, a saber: $u|_{s=0} = u|_{t=0} = 0$, $v|_{s=0} = v|_{t=0} = 0$, $u_s|_{s=0} = u_t|_{t=0} = \rho\xi$ y $v_s|_{s=0} = v_t|_{t=0} = \rho\eta$. En consecuencia, $u(t; \xi, \eta) = u(s; \rho\xi, \rho\eta)$ y $v(t; \xi, \eta) = v(s; \rho\xi, \rho\eta)$. En particular, para $s = 1$ tenemos que $u(1; \xi, \eta) = u(1; \rho\xi, \rho\eta)$ y $v(1; \xi, \eta) = v(1; \rho\xi, \rho\eta)$. Ahora, hagamos $x = \rho\xi$, $y = \rho\eta$ y consideremos la transformación de parámetro $u = u^*(x, y)$, $v = v^*(x, y)$, en donde $u^*(x, y) = u(1; x, y)$ y $v^*(x, y) = v(1; x, y)$. En la forma anterior, un entorno del origen en el plano xy se aplica en un entorno del origen en el plano uv . Las ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales nos permiten ver que $u^*(0, 0) = 0$ y $v^*(0, 0) = 0$. Además, en $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$ y para todos los ξ, η , tenemos

$$\xi = u_t = u_x^* x_t + u_y^* y_t = u_x^* \xi + u_y^* \eta, \quad \eta = v_t = v_x^* x_t + v_y^* y_t = v_x^* \xi + v_y^* \eta$$

De donde, $u_x^* = 1$, $u_y^* = 0$, $v_x^* = 0$ y $v_y^* = 1$ y, en esta forma, el jacobiano

$$\frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(x, y)} \Big|_{(0,0)} = \det \begin{pmatrix} u_x^* & u_y^* \\ v_x^* & v_y^* \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = 1$$

Puesto que el jacobiano es continuo, es diferente de cero en algún entorno de $(0, 0)$. En esta forma, $u = u^*(x, y)$, $v = v^*(x, y)$ es una transformación admisible de coordenadas de clase C^2 que aplica una vecindad del origen del plano xy biyectivamente en una vecindad del origen del plano uv . Consideremos, ahora, la aplicación $x = x^*(x, y) = x(u^*(x, y), v^*(x, y))$. Esta es una carta local de clase C^2 de la superficie, en un entorno de P , que aplica $(0, 0)$ en P , y se denomina conjunto de coordenadas normales de Riemann en P . Se verifica fácilmente que en P es $x_x^* = x_u$, $x_y^* = x_v$; y, en esta forma, en P es $E^* = 1$, $F^* = 0$, $G^* = 1$.

Por último, hagamos $\xi = \cos \phi$ y $\eta = \sin \phi$, de modo que $x = \rho \cos \phi$ y $y = \rho \sin \phi$, y consideremos la función descrita por $x = x^*(\rho, \phi) = x^*(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$. Es evidente que $x = x^*(\rho, \phi)$ es una representación paramétrica regular de clase C^2 para $0 < \rho < \epsilon$ y $-\infty < \phi < \infty$ que aplica a $0 < \rho < \epsilon$, $0 \leq \phi < 2\pi$ inyectivamente sobre un entorno reducido de P , pues, para estos ρ, ϕ , $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$ es inyectiva sobre un entorno no reducido del origen en el plano xy . Sólo falta demostrar que ciertamente $x = x^*(\rho, \phi)$ es el sistema dado de coordenadas polares geodésicas, es decir, $x^*(r, \theta) = x(r, \theta)$. Para un ϕ_0 fijo tenemos

$$x = x^*(\rho, \phi_0) = x(u^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0), v^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0))$$

en donde $u^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0) = u(1; \rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0) = u(\rho; \cos \phi_0, \sin \phi_0)$

y, análogamente, $v^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0) = v(\rho; \cos \phi_0, \sin \phi_0)$. Pero, u y v son soluciones de las ecuaciones diferenciales, (a) que satisfacen la condición inicial, (b) donde inicialmente,

$$E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = \xi^2 + \eta^2 = \cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0 = 1$$

De ello se deduce que $x = x^*(\rho, \phi_0)$ es la representación natural de la geodésica que pasa por P , en la dirección del vector tangente $x_u \cos \phi_0 + x_v \sin \phi_0 = g_1 \cos \phi_0 + g_2 \sin \phi_0$. Y como estas geodésicas son únicas, se deduce que $x^*(r, \theta) = x(r, \theta)$, con lo cual se completa la demostración.

11.22. Demostrar que todas las derivadas parciales de los primeros coeficientes fundamentales de un conjunto de coordenadas normales de Riemann en P , se anulan en ese punto.

Sea $x = x(x, y)$ un conjunto de coordenadas normales de Riemann en P . Entonces, para cada θ_0 y $x = r \cos \theta_0$, $y = r \sin \theta_0$, la curva $x = x(r) = x(x(r, \theta_0), y(r, \theta_0))$ es representación natural de una geodésica que pasa por P . Y, por tanto, $x(r, \theta_0)$, $y(r, \theta_0)$ verifican las siguientes ecuaciones

$$\ddot{x} + \Gamma_{11}^1 \dot{x}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{x}\dot{y} + \Gamma_{22}^1 \dot{y}^2 = 0$$

$$\ddot{y} + \Gamma_{11}^2 \dot{x}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{x}\dot{y} + \Gamma_{22}^2 \dot{y}^2 = 0$$

Como $\dot{x} = \frac{d}{dr}(r \cos \theta_0) = \cos \theta_0$, $\ddot{x} = 0$, $\dot{y} = \sin \theta_0$ y $\ddot{y} = 0$, se deduce que

$$\Gamma_{11}^1 \cos^2 \theta_0 + 2\Gamma_{12}^1 \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \Gamma_{22}^1 \sin^2 \theta_0 = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 \cos^2 \theta_0 + 2\Gamma_{12}^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \Gamma_{22}^2 \sin^2 \theta_0 = 0$$

Pero, lo anterior es válido en P para todo valor de θ_0 . Y, por tanto, en P , $\Gamma_{ij}^k = 0$ para todo $i, j, k = 1, 2$. Recordemos, además, que en P es $E = G = 1$, y $F = 0$. En consecuencia, de acuerdo con las ecuaciones (10.4) de la página 215, en P se tiene

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}E_x = 0 \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}E_y = 0 \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}(2F_y - G_x) = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}(2F_x - E_y) = 0 \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}G_x = 0 \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}G_y = 0$$

de donde se infiere el resultado que se esperaba.

11.23. Demostrar el teorema 11.13, a saber: Si $x = x(r, \theta)$ es un conjunto de coordenadas polares geodésicas en un punto P de una superficie de clase suficientemente alta, entonces

$$\sqrt{G} = r - \frac{1}{6}K(P)r^3 + R(r, \theta)$$

en donde $\lim_{r \rightarrow 0} (R(r, \theta)/r^3) = 0$ y $K(P)$ es la curvatura gaussiana en P .

Sea $x = x^*(x, y)$ un sistema de coordenadas normales de Riemann en P . Entonces, para cualquier $r > 0$, y cualquier ángulo $\theta_1 < \theta < \theta_2$, en donde, por ejemplo, $\theta_2 - \theta_1 \leq \frac{3}{2}\pi$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, es una transformación admisible de coordenadas y, de acuerdo con las ecuaciones (9.3) de la página 183, se tiene

$$G = E^*(x_\theta)^2 + 2F^*x_\theta y_\theta + G^*y_\theta^2 = r^2(E^* \sin^2 \theta - 2F^* \sin \theta \cos \theta + G^* \cos^2 \theta)$$

De acuerdo con el problema precedente, en P es $E^* = G^* = 1$, $F^* = 0$, $E_x^* = E_y^* = F_x^* = F_y^* = G_x^* = G_y^* = 0$. Con base en este hecho, resulta fácil calcular que

$$(a) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0 \quad y \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1$$

Además, según la ecuación (11.11) de la página 252, tenemos que $\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} = -K\sqrt{G}$. Derivando ésta se tiene: $\frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3} = -K \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} - \frac{\partial K}{\partial r} \sqrt{G}$. De esta suerte, utilizando el ordinal (a) precedente, se llega a

$$(b) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} = 0 \quad y \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3} = -K(P)$$

Para cada θ , podemos escribir

$$\sqrt{G} = (\sqrt{G})_0 + \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}\right)_0 r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}\right)_0 r^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}\right)_0 r^3 + R(r, \theta)$$

Y, de acuerdo con las precedentes ecuaciones (a) y (b)

$$\sqrt{G} = r - K(P)r^3 + R(r, \theta)$$

en donde $\lim_{r \rightarrow 0} (R(r, \theta)/r^3) = 0$, con lo cual queda completa la demostración.

SUPERFICIES DE CURVATURA GAUSIANA CONSTANTE

11.24. Supongamos que R sea cualquier región de una carta $x = x(u, v)$ en una superficie de clase suficientemente alta. Los extremos de la normal unitaria N en R forman, sobre la superficie esférica unitaria, un conjunto R' que recibe el nombre de imagen esférica de R . Demostrar que la razón del área de R' al área de R tiende a K en un punto P , cuando R tiende a reducirse al punto P .

Según la ecuación (9.8) de la página 185, el elemento de área en la carta es

$$dR = \sqrt{EG - F^2} du dv = |x_u \times x_v| du dv$$

y el elemento de área en la imagen esférica es $dR' = |N_u \times N_v| du dv$. Según el problema 9.18 de la página 207, $N_u \times N_v = K|x_u \times x_v|$. De esta suerte, $dR'/dR = K$, lo cual demuestra la proposición.

11.25. Una superficie reglada (véase el problema 8.4 de la página 172) se dice que es *desarrollable* si el plano tangente es constante a lo largo de cada generatriz. Demostrar que la superficie reglada $x = y(s) + v g(s)$, $|g(s)| = 1$, en donde $y = y(s)$ es una directriz (o curva de base), representada en forma natural, es desarrollable si y sólo si $[y g \dot{g}] = 0$.

El plano tangente en un punto de la generatriz $x = x(s_0, v)$, es engendrado por los vectores $x_s(s_0, v) = \dot{y}(s_0) + v \dot{g}(s_0)$ y $x_v(s_0, v) = g(s_0)$. En $v = 0$, éstos se convierten en los vectores $x_s(s_0, 0) = \dot{y}(s_0)$ y $x_v(s_0, 0) = g(s_0) = x_v(s_0, v)$. De aquí, se desprende que el plano tangente es el mismo a todo lo largo de una generatriz si y sólo si los tres vectores $\dot{y} + v \dot{g}$, y y \dot{y} son dependientes, es decir, si y sólo si

$$0 = [(\dot{y} + v\dot{g})\dot{g}\dot{y}] = \dot{y} \times (\dot{y} + v\dot{g}) \cdot \dot{g} = v\dot{y} \times \dot{g} \cdot \dot{g} = -v[\dot{y}\dot{g}\dot{g}]$$

lo cual demuestra la proposición.

- 11.26. Sea $x = y(s) + v\dot{g}(s)$, $|g(s)| = 1$, $a < s < b$, una superficie desarrollable. Demostrar que el intervalo $a < s < b$ se puede subdividir en subintervalos $s_{i-1} < s < s_i$ tales que, en cada una de las subdivisiones, la superficie sea un plano, un cilindro, un cono o la superficie tangente a la curva.

De acuerdo con el problema precedente, los vectores \dot{y} , \dot{g} y \dot{g} son independientes. De esta suerte, existen unas $k_1(s)$, $k_2(s)$ y $k_3(s)$, siendo $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, tales que $k_1\dot{y} + k_2\dot{g} + k_3\dot{g} = 0$. Supongamos, ahora, que $k_1 = 0$ en un intervalo $s_{i-1} < s < s_i$. Entonces $k_2\dot{g} + k_3\dot{g} = 0$, siendo $k_2^2 + k_3^2 \neq 0$. Puesto que $|g| = 1$, entonces $\dot{g} \cdot \dot{g} = 0$. De modo que $0 = (k_2\dot{g} + k_3\dot{g}) \cdot \dot{g} = k_2\dot{g} \cdot \dot{g}$. Por tanto, $k_2 = 0$. Pero, entonces sería $k_3 \neq 0$. Y, por tanto, $\dot{g} = 0$ o sea $g = \text{constante}$. De esto, se deduce que, en este caso, la superficie es una porción de plano o de cilindro. Supongamos, ahora, que $k_1 \neq 0$ en $s_{i-1} < s < s_i$. Entonces podemos escribir $\dot{y} = c_1\dot{g} + c_2\dot{g}$, en donde $c_1 = -k_2/k_1$ y $c_2 = -k_3/k_1$. Sea, ahora, $y^* = y - c_2g$. Entonces $\dot{y}^* = \dot{y} - c_2\dot{g} - \dot{c}_2g = c_1\dot{g}$, donde $c_3 = c_1 - \dot{c}_2$. Si $c_3 = 0$ en $s_{i-1} < s < s_i$, entonces $y^* = \text{constante} = y_0$. Por consiguiente, la superficie es de la forma $x = y_0 + (v + c_2)g$. Y esta es o la ecuación de un cono o de parte de un plano. Por último, se tiene el caso en que $y^* = c_3g$ y $c_3 \neq 0$ en algún subintervalo de $s_{i-1} < s < s_i$. Entonces, $\dot{y} = y^*/c_3$ y, de esta suerte, la superficie es de la forma $x = y + v\dot{g} = y^* + u\dot{y}^*$, en que $u = (v + c_2)/c_3$, que es la superficie tangente de la curva $x = y^*(s)$.

- 11.27. Demostrar que una superficie de clase suficientemente alta, sin puntos planos, tiene curvatura gaussiana constante nula si y sólo si en cada punto de la superficie existe un entorno que sea una superficie desarrollable. *Observación.* En este caso, del teorema 11.17 de la página 257, se deduce que un entorno de cada punto de una superficie de clase suficientemente alta, que no posea puntos planos, se puede aplicar isométricamente sobre un plano si y sólo si un entorno de cada punto de la superficie es una superficie desarrollable.

Es fácil verificar directamente que un plano, una superficie cilíndrica, una superficie cónica o una superficie tangente de una curva, tienen curvatura gaussiana constante nula. En esta forma, del problema precedente se infiere que si algún entorno de cada punto de una superficie es una superficie desarrollable, entonces $K = 0$ en toda la superficie.

Otra forma interesante de demostrar este hecho, consiste en considerar la imagen esférica de una superficie desarrollable. Comoquiera que el plano tangente es constante en toda la extensión de la familia de generatrices de la superficie, entonces su imagen esférica es o un punto (en el caso de un plano) o una recta. Supongamos, ahora, que P es un punto de la superficie, R una región que contiene el punto, y R' la imagen esférica de R . Según el problema 11.24, la curvatura gaussiana en P es, en valor absoluto, igual a la razón del área de R' al área de R , cuando R tiende a reducirse al punto P . Pero, la imagen esférica de una superficie desarrollable es, a lo mejor, una recta. De modo que para todo R el área de R' es cero. Por tanto, $K = 0$.

Supongamos, ahora, que, $K = 0$ en toda la superficie, P un punto de la misma, y $x = x(u, v)$ una carta que contenga a P . Puesto que $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0$, tendremos que $LN - M^2 = 0$. Y como en la carta no existen puntos planos, se deduce que todos son parabólicos, y cada uno posee sólo una dirección asintótica, $du : dv$, que verifica a $II = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = (\sqrt{L} du + \sqrt{N} dv)^2 = 0$. Aquí, hemos utilizado el hecho de que $II = 0$ sólo tiene una raíz real y se puede expresar como un cuadrado. La ecuación anterior es la de una familia de líneas asintóticas de un parámetro en las vecindades de P , que, suponemos, se han escogido como las curvas $v = \text{constante}$, de parámetro u . Obsérvese que en un punto parabólico la dirección asintótica coincide con una dirección principal y, de este modo, las curvas de parámetro u son, además, líneas de curvatura. Ahora, bien, a lo largo de tales curvas es $dv = 0$. Y por ello, de acuerdo con la ecuación diferencial anterior, $\sqrt{L} du = 0$. Puesto que $du \neq 0$, entonces $L = 0$. Pero, $LN - M^2 = 0$. Por consiguiente, $M = 0$. Y puesto que las curvas de parámetro u cubren algún entorno de P , entonces $L = M = 0$ en tal entorno. De acuerdo con las ecuaciones (10.5) de Weingarten en la página 215, es $N_u = 0$ y, en consecuencia, N es constante a lo largo de cada una de las curvas de parámetro u . Sólo falta demostrar que estas curvas son líneas rectas. Comoquiera que ellas son también, líneas de curvatura,

según la fórmula de Rodríguez, tenemos que $N_u = -\kappa x_u$. Y como $N_u = 0$, entonces $\kappa = 0$, y, de esta suerte, el aludido entorno de P es una superficie desarrollable que tiene a las curvas de parámetro u como generatrices a lo largo de las cuales el plano tangente es constante.

- 11.28. Demostrar que en (u, θ) la superficie descrita por

$$x = (u \cos \theta)e_1 + (u \sin \theta)e_2 + (\log u)e_3, \quad u > 0$$

tiene la misma curvatura gaussiana que la superficie descrita por

$$x^* = (u^* \cos \theta^*)e_1 + (u^* \sin \theta^*)e_2 + u^*e_3, \quad u^* > 0$$

en $u^* = u$ y $\theta^* = \theta$, pero las superficies no son isométricas.

Se deja al lector, por vía de ejercicio, verificar que en x tenemos que $E = (1 + 1/u^2)$, $F = 0$, $G = u^2$ y $K = -1/(1 + u^2)^2$; y en x^* tenemos que $E^* = 1$, $F^* = 0$, $G^* = 1 + (u^*)^2$ y $K^* = -1/(1 + (u^*)^2)^2$. De este modo, las superficies tienen la misma curvatura gaussiana en puntos que se correspondan. Supongamos, ahora, que las superficies fueran isométricas. En ese caso, existiría una transformación de parámetro $\theta^* = \theta^*(\theta, u)$, $u^* = u^*(\theta, u)$ tal que, en puntos correspondientes, sería $E = E^*$, $F = F^*$, $G = G^*$ y $K = K^*$. De $K = K^*$ obtendremos que $1 + (u^*)^2 = 1 + (u)^2$. Entonces, $u^* = \pm u$ o $u^* = \sqrt{-2 - u^2}$. Utilizando las propiedades de transformación de los primeros coeficientes fundamentales (ecuaciones (9.2) y (9.3) de la página 183) y suponiendo que $u^* = \pm u$, resulta fácil calcular que la transformación de parámetros debe cumplir, además, las siguientes condiciones

$$(a) \ 1 + (1 + u^2)(\theta_u^*)^2 = 1 + 1/u^2, \quad (b) \ \theta_u^* \theta_\theta^* = 0 \quad \text{y} \quad (c) \ (1 + u^2)\theta_\theta^2 = u^2$$

Puesto que u^* es independiente de θ , entonces $u = 0$. Y como debemos tener que $\partial(\theta^*, u^*)/\partial(\theta, u) \neq 0$, entonces, también debemos tener que $\theta_\theta^* \neq 0$. Por consiguiente, de la ecuación (b) resulta que $\theta_u^* = 0$. Pero, entonces, así resultaría imposible satisfacer la ecuación (a). En esta forma queda demostrado el teorema.

TEOREMA DE GAUSS-BONNET

- 11.29. Determinar la curvatura total de un elipsoide.

El elipsoide es homeomórfico a la esfera. Por tanto, la curvatura total del elipsoide es igual a la curvatura total de la esfera, que es 4π .

- 11.30. Determinar la curvatura total de la superficie que se muestra en la figura 11-28(a).

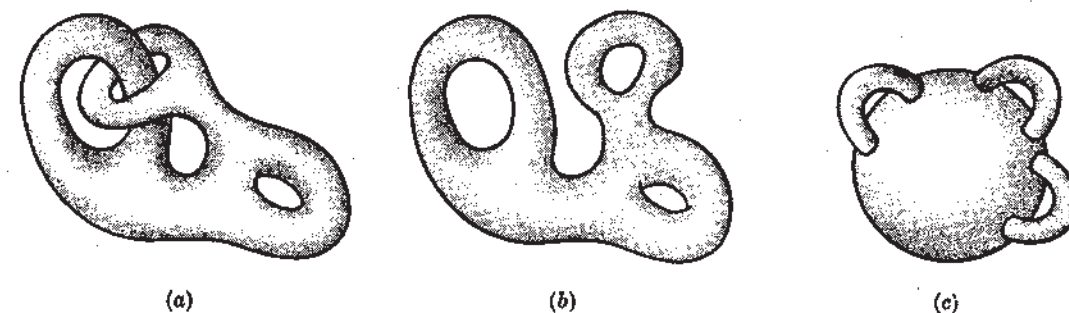


Fig. 11-28

Al igual que en las figuras 11-28(b) y (c), la superficie es homeomórfica con una esfera de tres asas. Por ello, de la fórmula $\chi = 2(1 - p)$, en donde p es el número de asas de la superficie (véase el ejemplo 11.11, página 263), se desprende que la curvatura total de la superficie es $2\pi\chi = -8\pi$.

- 11.31. Determinar directamente todos los términos de la fórmula de Gauss-Bonnet (la (11.22) de la página 261), para la imagen, sobre la esfera de radio uno, descrita por

$$x = (\cos \theta \sin \phi)e_1 + (\sin \theta \sin \phi)e_2 + (\cos \phi)e_3$$

del polígono que tiene los siguientes lados

$C'_1: \theta = t, \phi = \pi/4, 0 \leq t \leq \pi/2$; $C'_2: \theta = \pi/2, \phi = t, \pi/4 \leq t \leq \pi/2$; $C'_3: \theta = \pi/2 - t, \phi = \pi/2, 0 \leq t \leq \pi/2$; $C'_4: \theta = 0, \phi = \pi/2 - t, 0 \leq t \leq \pi/4$. Véase la figura 11-29.

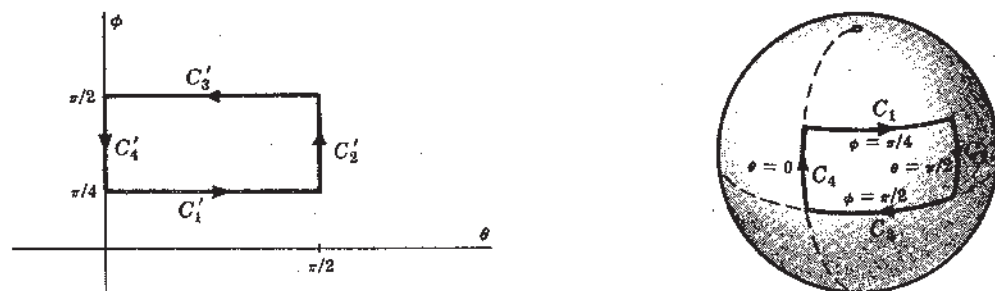


Fig. 11-29

En este caso, $E = \sin^2 \phi$, $F = 0$, $G = 1$ y la curvatura gaussiana es $K = 1$. Por tanto,

$$(a) \quad \iint_R K dS = \iint_{R'} \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi = \int_0^{\pi/2} \left[\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \phi d\phi \right] d\theta = \pi\sqrt{2}/4$$

Según la ecuación (11.6) de la página 249, $(K_g)_{\phi=\text{constante}} = -\cot \phi$ y en esta forma,

$$\int_{C_1} \kappa_g dS = -\int_0^{\pi/2} \cot(\pi/4) \sqrt{E \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2} dt = -\int_0^{\pi/2} \cos(\pi/4) dt = -\pi\sqrt{2}/4$$

Como C_2 , C_3 y C_4 son geodésicas, entonces $\int_{C_2} \kappa_g ds = \int_{C_3} \kappa_g ds = \int_{C_4} \kappa_g ds = 0$. En esta

forma, se tiene que

$$(b) \quad \int_C \kappa_g ds = \int_{C_1} \kappa_g ds = -\pi\sqrt{2}/4$$

Por último, como las curvas de parámetros son ortogonales, entonces

$$(c) \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 4(\pi/2) = 2\pi$$

11.32. Demostrar que una superficie tiene curvatura gaussiana constante nula si en las vecindades de cada uno de sus puntos existen dos familias de geodésicas que se corten bajo un ángulo constante.

Sean, P un punto arbitrario de la superficie, y C un cuadrilátero formado por geodésicas y que contenga a P en su interior. Si aplicamos la fórmula de Gauss-Bonnet tendremos: $\iint_R K dS = 2\pi - \sum_{i=1}^4 \alpha_i$. Como las geodésicas se cortan bajo un ángulo constante, entonces $\sum \alpha_i = 2\pi$. En esta forma, $\iint_R K dS = 0$. Y como R se puede escoger arbitrariamente pequeña, se concluye que $K(P) = 0$, con lo cual queda demostrada la proposición.

11.33. Demostrar que en una superficie que tenga $K < 0$, una geodésica no puede poseer puntos múltiples, como se muestra en la figura 11-30(a), ni dos geodésicas pueden tener más que una intersección, como se muestra en la figura 11-30(b), en el supuesto de que las geodésicas limiten un dominio simplemente conexo.

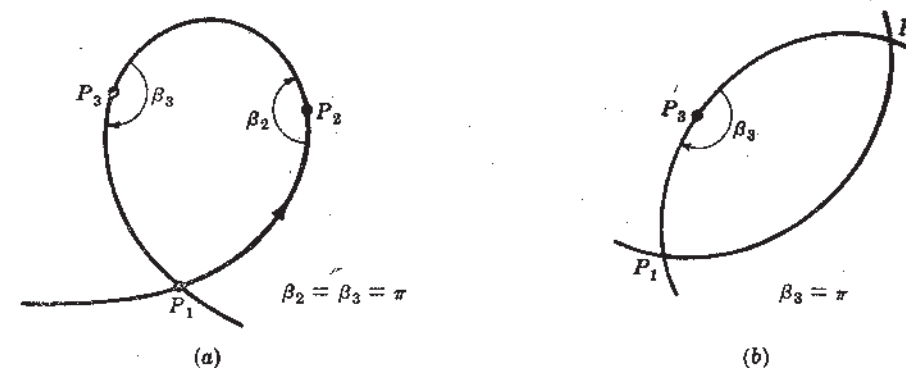


Fig. 11-30

Supongamos que existan geodésicas que posean cualquiera de las dos, o ambas, propiedades. Agregando nuevos vértices a las geodésicas, como se ve en las figuras, ambos casos se convertirían en triángulos geodésicos, para los cuales la fórmula de Gauss-Bonnet es $\iint_R K dS = \sum_{i=1}^3 \beta_i - \pi$, en donde los β_i son los ángulos internos de los triángulos. Pero, en ambos casos es $\sum_{i=1}^3 \beta_i > \pi$, lo que resulta imposible porque es $K < 0$.

Problemas propuestos

- 11.34.** Si S es una superficie compacta y f una aplicación regular derivable de S sobre otra superficie S^* , demostrar que S^* es compacta.
- 11.35.** Demostrar el teorema 11.2, a saber: Si f es una aplicación regular derivable de clase C^r de S en S^* y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ es una curva regular C de clase C^r en S , entonces $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(t))$ es una curva regular de clase C^r sobre S^* .
- 11.36.** Demostrar que la proyección estereográfica de una esfera sobre un plano (véase el ejemplo 11.1 de la página 242) es una aplicación conforme.
- 11.37.** Demostrar que una aplicación regular, inyectiva y derivable, de una superficie S sobre una superficie S^* es una aplicación biyectiva y bicontinua (topológica) de S sobre S^* .
- 11.38.** Demostrar que una aplicación f de una superficie S en otra superficie S^* es una isometría local si y sólo si para cada carta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ en S tenemos que $E = E^*$, $F = F^*$ y $G = G^*$, en donde E, F, G son los primeros coeficientes fundamentales en $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, y E^*, F^*, G^* son los primeros coeficientes fundamentales en $\mathbf{x}^* = f(\mathbf{x}(u, v))$.
- 11.39.** Demostrar que las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en una carta de Monge descrita por $\mathbf{x} = ue_1 + ve_2 + f(u, v)e_3$ son
- $$(1 + p^2 + q^2) \ddot{u} + pr\dot{u}^2 + 2ps\dot{u}\dot{v} + pt\dot{v}^2 = 0$$
- $$(1 + p^2 + q^2) \ddot{v} + qr\dot{u}^2 + 2qs\dot{u}\dot{v} + qt\dot{v}^2 = 0$$
- en donde, $p = f_u$, $q = f_v$, $r = f_{uu}$, $s = f_{uv}$, $t = f_{vv}$.
- 11.40.** Hallar las geodésicas en el plano resolviendo las ecuaciones (11.7) de la página 250, en coordenadas polares.

- 11.41. Demostrar que las soluciones de la ecuación

$$d\theta = \frac{Ca dr}{r\sqrt{r^2 - C^2}\sqrt{a^2 - (r-b)^2}}$$

en donde $r = b + a \sin \phi$, son geodésicas del toro descrito por

$$\mathbf{x} = (b + a \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (b + a \sin \phi)(\sin \theta)\mathbf{e}_2 + (a \cos \phi)\mathbf{e}_3$$

- 11.42. Demostrar que las geodésicas en una superficie de Liouville (véase el problema 11.18) vienen dadas por la expresión

$$\int (U - C)^{-1/2} du \pm \int (V + C)^{-1/2} dv = \text{constante}, \quad C = \text{constante}.$$

- 11.43. Sea
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$
- una carta en una superficie de clase
- ≥ 3
- tal que las curvas de parámetro son ortogonales. Demostrar que

$$K = \frac{d(\kappa_g)_1}{ds_1} - \frac{d(\kappa_g)_2}{ds_2} - (\kappa_g)_1^2 - (\kappa_g)_2^2$$

en donde $(\kappa_g)_1$ y $(\kappa_g)_2$ son las curvaturas geodésicas a lo largo de las curvas de parámetro u y las de parámetro v , respectivamente, y s_1 y s_2 son parámetros naturales a lo largo de las respectivas de parámetro u y v .

- 11.44. Sean
- P
- y
- Q
- dos puntos de una geodésica
- $v = \text{constante}$
- , en una carta local de coordenadas geodésicas,
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$
- . Demostrar que de todos los arcos regulares de la carta que unan a
- P
- y
- Q
- , la geodésica que contiene estos puntos es de la longitud mínima.

- 11.45. Demostrar que la superficie de revolución descrita por

$$\mathbf{x} = (u \cos \theta)\mathbf{e}_1 + (u \sin \theta)\mathbf{e}_2 + f(v)\mathbf{e}_3$$

siendo $u = C_1 \cos(v/a) + C_2 \sin(v/a)$ y $f(v) = \int \sqrt{1 - (du/dv)^2} dv$, es una superficie de curvatura gaussiana positiva y constante, $K = 1/a^2$ para todas las C_1, C_2 . ¿Para cuáles valores de C_1 y C_2 la superficie es una esfera? Resp. $C_1 = a, C_2 = 0$, o, $C_1 = 0, C_2 = a$

- 11.46. Demostrar que la superficie de revolución descrita por

$$\mathbf{x} = u(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + u(\sin \theta)\mathbf{e}_2 + f(v)\mathbf{e}_3$$

siendo $u = C_1 e^{v/a} + C_2 e^{-v/a}$ y $f(v) = \int \sqrt{1 - (du/dv)^2} dv$, es una superficie de curvatura gaussiana negativa y constante, $K = -1/a^2$.

- 11.47. Demostrar que
- $\mathbf{x} = 2(\tanh(r/2) \cos \theta)\mathbf{e}_1 + 2(\tanh(r/2) \sin \theta)\mathbf{e}_2$
- es un conjunto de coordenadas polares geodésicas en el origen del plano hiperbólico. Véase el ejemplo 11.9 de la página 258.

- 11.48. En el plano hiperbólico, determinar la distancia intrínseca desde el origen hasta un punto
- P
- . Resp.
- $D(0, P) = \tanh(|P|/2)$

- 11.49. Sea
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s)$
- la representación natural de una curva
- C
- que carece de puntos de inflexión. Demostrar que la superficie reglada
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s) + v \mathbf{n}(s)$
- , en donde
- \mathbf{n}
- representa la normal principal unitaria de
- C
- , es una superficie desarrollable si y sólo si
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s)$
- es una curva plana.

- 11.50. Demostrar que una curva
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s)$
- de una superficie orientable
- S
- es una línea de curvatura de
- S
- si y sólo si la superficie reglada
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s) + v \mathbf{N}(s)$
- , en donde
- \mathbf{N}
- representa la normal a
- S
- , es una superficie desarrollable.

- 11.51. Sea
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s) + v \mathbf{g}(s)$
- ,
- $|\mathbf{g}| = 1$
- , una superficie desarrollable, tal que
- $\mathbf{g} \cdot \mathbf{y}' = 0$
- y
- $\phi(s) = \angle(\mathbf{g}, \mathbf{n})$
- , en donde
- \mathbf{n}
- representa la normal principal de
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s)$
- . Demostrar que
- $\phi = -\tau$
- , siendo
- τ
- la torsión a lo largo de
- $\mathbf{x} = \mathbf{y}(s)$
- .

- 11.52. Si
- S
- es una superficie de curvatura gaussiana constante
- $K \neq 0$
- , demostrar que el área de un polígono geodésico está determinada por sus ángulos internos.

- 11.53. Sea
- C_n
- ,
- $n = 1, 2, \dots$
- , una sucesión infinita de triángulos geodésicos que se contraen alrededor de

un punto P , cuando $n \rightarrow \infty$. Demostrar que $K(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^3 \beta_{in} - \pi}{A_n}$ en donde A_n representa el área de los C_n , y las β_{in} sus ángulos internos.

- 11.54. Sea
- S
- una esfera que tiene
- p
- asas. Demostrar que existe un punto
- P
- de
- S
- tal que (a)
- $K(P) > 0$
- , si
- $p = 0$
- ; (b)
- $K(P) = 0$
- si
- $p = 1$
- ; (c)
- $K(P) < 0$
- si
- $p > 1$
- .

- 11.55. Sea
- S
- una superficie que tiene curvatura gaussiana
- $K < 0$
- y sean
- P_1, P_2, P_3, P_4
- los vértices de un cuadrilátero geodésico cuyo interior es simplemente conexo y tal que las longitudes de dos lados opuestos,
- P_1P_2
- y
- P_3P_4
- sean iguales y perpendiculares al tercer lado
- P_2P_3
- . Demostrar que los ángulos internos
- P_1
- y
- P_4
- son agudos.

- 11.56. Sea
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$
- un conjunto de coordenadas geodésicas tales que las curvas de parámetro
- u
- sean representaciones naturales de geodésicas. Demostrar que si
- C
- es una geodésica representada en forma natural en la carta y
- $\theta(s)$
- es la función definida por
- $\mathbf{t} = (\cos \theta)\mathbf{g}_1 + (\sin \theta)\mathbf{g}_2$
- , siendo
- \mathbf{g}_1
- y
- \mathbf{g}_2
- los vectores unitarios en la dirección de las curvas de parámetro
- u
- y las de parámetro
- v
- , respectivamente, y si, además,
- \mathbf{t}
- es la tangente unitaria a
- C
- , entonces
- $\frac{d\theta}{ds} + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{dv}{ds} = 0$
- a lo largo de
- C
- .

- 11.57. Utilícese el resultado del problema anterior en la deducción de la fórmula de Gauss-Bonnet para un triángulo geodésico. Con ese fin, tómese uno de los vértices como centro de un conjunto de coordenadas polares geodésicas.

Apéndice I

Teorema de existencia de curvas.

Sean $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ funciones continuas de la única variable real s , para $0 \leq s \leq a$. Entonces, existe una curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, $0 \leq s \leq a$, de clase C^2 para la cual κ es la curvatura, τ la torsión y s un parámetro natural.

Demostración: Consideremos el siguiente sistema de nueve ecuaciones diferenciales escalares

$$\dot{t}_i = \kappa n_i, \quad \dot{n}_i = -\kappa t_i + \tau b_i, \quad \dot{b}_i = -\tau n_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

que tiene las condiciones iniciales siguientes: $t_1(0) = 1, t_2(0) = 0, t_3(0) = 0, n_1(0) = 0, n_2(0) = 1, n_3(0) = 0, b_1(0) = 0, b_2(0) = 0, b_3(0) = 1$. Este es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes continuos; y, de acuerdo con un conocido teorema de existencia y unicidad relativo a problemas de valores iniciales de este tipo, existen las soluciones únicas $t_i(s), n_i(s), b_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, de clase C^1 para $0 \leq s \leq a$ que cumplan las condiciones iniciales.

Supongamos, ahora, que $\mathbf{t} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + t_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$. Es necesario demostrar que $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ forman una terna ortonormal dextrógira, para todo valor de s . Con este fin, consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales para las magnitudes $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$. Evidentemente, $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}$ y $\mathbf{t}(0) = \mathbf{e}_1, \mathbf{n}(0) = \mathbf{e}_2, \mathbf{b}(0) = \mathbf{e}_3$. Con base en esto, se calcula con facilidad que las funciones $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{t} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) &= 2\kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) & \frac{d}{ds}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) &= -2\kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) + 2\tau(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) &= \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) - \kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) + \tau(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}) & \frac{d}{ds}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) &= -\kappa(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}) + \tau(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \tau(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \\ \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}) &= \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) - \tau(\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) & \frac{d}{ds}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) &= -2\tau(\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \end{aligned}$$

a las cuales se les imponen las condiciones iniciales: $(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})(0) = 1, (\mathbf{t} \cdot \mathbf{b})(0) = 0, (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})(0) = 0, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(0) = 1, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})(0) = 0, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})(0) = 1$. Pero, la solución de un problema de valor inicial, de este tipo, es única y, por sustitución, se verifica que una solución viene dada por las funciones $(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})^* = 1, (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})^* = 0, (\mathbf{t} \cdot \mathbf{b})^* = 0, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^* = 1, (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})^* = 0, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})^* = 1$. Por tanto, ciertamente, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1, \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1, \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ para todo valor de s . De esta suerte, $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ es una terna ortonormal para todo valor de s . Es, además, dextrógira, pues \mathbf{t}, \mathbf{n} y \mathbf{b} son continuas y $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ es inicialmente, un sistema dextrógira.

Definamos, ahora, la curva $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \int_0^s \mathbf{t}(\sigma) d\sigma$. Es evidente que $\mathbf{x}(s)$ es de clase C^2 .

Además, $|\dot{\mathbf{x}}| = |\mathbf{t}| = 1$. En consecuencia, s es un parámetro natural. Comoquiera que $\dot{\mathbf{t}} = \kappa\mathbf{n}$, siendo $|\mathbf{n}| = 1$, entonces κ es su curvatura. Por último, como $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ y

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{t}} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{n}} = \kappa(\mathbf{n} \times \mathbf{n}) + (-\kappa(\mathbf{t} \times \mathbf{t})) + \tau(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = \tau\mathbf{b}$$

siendo $|\mathbf{b}| = 1$, entonces se concluye que τ es la torsión de la curva con lo cual queda demostrado el teorema.

Apéndice II

Teorema de existencia de superficies.

Supongamos que E, F y G son funciones de u y v , de clase C^2 y L, M y N funciones de u y v , de clase C^1 , definidas en un conjunto abierto que contiene a (u_0, v_0) , y tales que

- (i) $EG - F^2 > 0, E > 0, G > 0$
- (ii) E, F, G, L, M, N , satisfacen las ecuaciones de compatibilidad (10.7) y (10.8).

Entonces, existe una representación paramétrica regular $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de clase C^3 , definida en un entorno de (u_0, v_0) , cuyos primeros y segundos coeficientes fundamentales son E, F, G, L, M y N .

Demostración: Consideremos el siguiente sistema escalar de ecuaciones diferenciales parciales

$$\begin{aligned} (U_i)_u &= \Gamma_{11}^i U_i + \Gamma_{12}^i V_i + L N_i & (V_i)_v &= \Gamma_{22}^i U_i + \Gamma_{22}^i V_i + N N_i \\ (U_i)_v &= \Gamma_{12}^i U_i + \Gamma_{12}^i V_i + M N_i & (N_i)_u &= \beta_1^i U_i + \beta_1^i V_i \\ (V_i)_u &= \Gamma_{12}^i U_i + \Gamma_{12}^i V_i + M N_i & (N_i)_v &= \beta_2^i U_i + \beta_2^i V_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

a las que se imponen las condiciones iniciales siguientes

$$\begin{aligned} U_1(u_0, v_0) &= \sqrt{E_0} & V_1(u_0, v_0) &= F_0/\sqrt{E_0} & N_1(u_0, v_0) &= 0 \\ U_2(u_0, v_0) &= 0 & V_2(u_0, v_0) &= \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2}/\sqrt{E_0} & N_2(u_0, v_0) &= 0 \\ U_3(u_0, v_0) &= 0 & V_3(u_0, v_0) &= 0 & N_3(u_0, v_0) &= 1 \end{aligned}$$

($E_0 = E(u_0, v_0), F_0 = F(u_0, v_0), G_0 = G(u_0, v_0)$). Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k que allí aparecen se dieron en la ecuación (10.4) de la página 215, y los β_i^j , en la ecuación (10.2). Este es un sistema de dieciocho ecuaciones diferenciales parciales linealmente homogéneas de primer orden, de coeficientes de clase C^1 , para las nueve funciones $U_i(u, v), V_i(u, v), N_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$. Como, por añadidura, se cumplen las condiciones de compatibilidad para estas ecuaciones, entonces, del teorema de existencia y unicidad para un sistema de este tipo, se deduce que, en un entorno de (u_0, v_0) , existe una solución única, $U_i(u, v), V_i(u, v)$ y $N_i(u, v)$, $i = 1, 2, 3$, de clase C^2 , que cumple las condiciones iniciales.

Supongamos, ahora, que $\mathbf{U} = U_1\mathbf{e}_1 + U_2\mathbf{e}_2 + U_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{V} = V_1\mathbf{e}_1 + V_2\mathbf{e}_2 + V_3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{N} = N_1\mathbf{e}_1 + N_2\mathbf{e}_2 + N_3\mathbf{e}_3$. A partir de las condiciones iniciales es fácil calcular que en (u_0, v_0) se tiene que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = E, \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = F, \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = G, \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0, \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0, \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. Es necesario demostrar que esto es lo que ocurre para todo (u, v) que pertenezca a un entorno de (u_0, v_0) . Al igual que en el caso del teorema de existencia relativo a las curvas, consideremos aquí un sistema de ecuaciones diferenciales para las magnitudes $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}, \mathbf{U} \cdot \mathbf{N}, \mathbf{V} \cdot \mathbf{N}$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}$. A partir del primer sistema de ecuaciones diferenciales mencionado aquí, es fácil verificar por el cálculo que estas funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales parciales siguientes

$$\begin{aligned} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})_u &= 2\Gamma_{11}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + 2\Gamma_{11}^2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + 2L(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) \\ (\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})_v &= 2\Gamma_{12}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + 2\Gamma_{12}^2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + 2M(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) \\ (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})_u &= \Gamma_{12}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + \Gamma_{11}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + M(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + L(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) \\ (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})_v &= \Gamma_{22}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + \Gamma_{22}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + N(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + M(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) \end{aligned}$$

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})_u = 2\Gamma_{12}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + 2\Gamma_{12}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + 2M(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})_v = 2\Gamma_{22}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + 2\Gamma_{22}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + 2N(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})_u = \beta_1^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + \beta_1^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + \Gamma_{12}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + \Gamma_{12}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) + M(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})_v = \beta_2^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + \beta_2^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) + \Gamma_{22}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + \Gamma_{22}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) + N(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N})_u = \beta_1^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + \beta_1^2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + \Gamma_{11}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + \Gamma_{11}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) + L(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N})_v = \beta_2^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}) + \beta_2^2(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) + \Gamma_{12}^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + \Gamma_{12}^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) + M(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})_u = 2\beta_1^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + 2\beta_1^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})$$

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})_v = 2\beta_2^1(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}) + 2\beta_2^2(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})$$

a las que se imponen las condiciones iniciales siguientes

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})(u_0, v_0) = E_0 \quad (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})(u_0, v_0) = F_0 \quad (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})(u_0, v_0) = G_0$$

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N})(u_0, v_0) = 0 \quad (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})(u_0, v_0) = 0 \quad (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})(u_0, v_0) = 1$$

Este es, nuevamente, un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales homogéneas de primer orden. Como sabemos que estas ecuaciones poseen soluciones de clase C^2 , entonces deducimos que también se cumplen las condiciones de compatibilidad del sistema. De acuerdo con el teorema de existencia y unicidad relativo a problemas de valores iniciales, de este tipo, sabemos que una solución que cumpla las condiciones iniciales es *única*. Y, por sustitución, es fácil verificar que si una solución de las ecuaciones cumple las condiciones iniciales, entonces viene dada, en algún entorno de (u_0, v_0) , por las funciones $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{U})^* = E$, $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})^* = F$, $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^* = G$, $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{N})^* = 0$, $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})^* = 0$, $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})^* = 1$. De donde $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = E$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = F$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = G$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ para todo (u, v) en un entorno de (u_0, v_0) .

Ahora, bien, la función, candidata a ser superficie, se define en función de una solución de las ecuaciones diferenciales parciales $\mathbf{x}_u = \mathbf{U}$ y $\mathbf{x}_v = \mathbf{V}$. Como $\mathbf{U}_u = \mathbf{V}_u$, existe una solución $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de clase C^3 y, ciertamente, puede expresarse por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = \int_{u_0}^u \mathbf{U}(\xi, v) d\xi + \int_{v_0}^v \mathbf{V}(u_0, \eta) d\eta$. Sólo falta demostrar que $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ es regular, es decir, que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$, y que los primeros y segundos coeficientes fundamentales son E, F, G, L, M y N . Comoquiera que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \times \mathbf{V}$ es continua e inicialmente, es $(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(u_0, v_0) = (\mathbf{U} \times \mathbf{V})(u_0, v_0) = \sqrt{E_0 G_0 - F_0^2} \mathbf{e}_3 \neq 0$, entonces se deduce que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ en algún entorno de (u_0, v_0) . Por otra parte, es evidente que $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = E$, $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = F$ y $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = G$. Por último, del primer sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y de hecho de que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$, se colige directamente que $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{U}_u \cdot \mathbf{N} = L$, $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{V}_u \cdot \mathbf{N} = M$ y $\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{V}_v \cdot \mathbf{N} = N$. Y, en consecuencia, los segundos coeficientes fundamentales de $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ son L, M y N , con lo cual se completa la demostración del teorema.

INDICE

- Acumulación,
punto de, 111
- Adición,
de tensores, 226
de vectores, 2
- Afin(es), sistema de coordenadas, 34
- Angulo(s),
externos, 259
formado por vectores, 5
formado por vectores tangentes, 184
internos, 261
- Aplicación(es),
bicontinua, 118
conforme, 266
continua, 109
en las superficies, 242
isométrica, 238
localmente isométricas, 245
topológicas, 118
- Arco, 49
de curva, 52
de Jordan, 258
de longitud mínima, 246
rectificable, 53
- Arco-conexo, 112, 113
- Area, 184
- Base, 4
dual, 17
orientada, 7, 17
ortonormal, 6
- Beltrami-Enneper, fórmula de, 200
- Bertrand, curva de, 102, 104, 108
- Binormal, 71
unitaria, 71
- Cadena, regla de la, 39, 139, 140
- Cambio admisible de parámetro, 46, 50
- Campo de tensores (tensorial), 223
- Característica de Euler, 263
- Carta,
de Monge, 163, 164
local, 162
- Catenaria, 97, 99
- Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 5
- Centro de curvatura, 95, 106
esférica, 106, 107
- Cilindro, 161
generatriz de un, 161
- Cinta de Moebius, 1, 180
- Círculo osculador, 95
- Cisoides de Diocles, 55
- Clausura, 112
- Coefficientes fundamentales,
primeros, 182
segundos, 186
- Compacto(a), conjunto, 114, 117
superficie de un, 170
- Compatibilidad, ecuaciones de, 216
- Concoide de Nicomedes, 62
- Conforme (aplicación, representación, transformación), 266
- Conjugada(s),
dirección de las, 200
familia, de curvas, 201
- Conjunto,
abierto, 109
acotado, 112
cerrado, 110
compacto, 114, 115
conexo, 112
simplemente conexo, 259
- Cono, 34, 180
- Conoide recto, 173-202
- Contacto, 92
- Contracción de tensores, 227
- Coordenadas,
geodésicas, 251
normales de Riemann, 272
- Cosenos directores, 7
- Curva(s),
definición de, 47-51
de base (directriz), 172
de Bertrand, 101, 104, 106
de parámetros, 160
de parámetros y paralelas, 202
de Peano, 48
de pendiente constante, 76
orientada, 49, 63
simple, 49
tangente, 64, 65, 69, 89, 104, 177, 203
- Curvatura, 65, 68, 77
centro de, 94, 105
(esférica) centro de, 97
gausiana, 196
geodésica, 248
línea de, 196
media, 196
normal, 190
principal, 193
segunda, 73
total, 262, 274
- Christoffel, símbolos de, 215, 227



- Delta de Kronecker, 226
- Dependencia lineal, 3
- Derivación de funciones, 28, 30, 165
- Derivada(s),
 - direccional, 134-141
 - parciales, 135
- Desigualdad,
 - de Cauchy-Schwarz, 5
 - triangular, 14
- Diferencial, 136
- Dirección,
 - conjugada, 200
 - principal, 193
- Directores,
 - cosenos, 7
 - números, 191
- Directriz (curva de base) de una superficie reglada, 172
- Disco, 109
- Distancia intrínseca, 246
- Dominio, 112, 113
- Dupin, indicatriz de, 193
- Ecuación(es),
 - de compatibilidad, 215
 - de Frenet-Serret, 84
 - de Gauss, 215
 - de Mainardi-Codazzi, 216
 - de Riccati, 86
 - de Weingarten, 215
 - intrínsecas, 84
 - naturales, 85
- Elipsoide, 174
- Entorno (véase vecindad), 23
- Epicloide, 55, 59, 98
- Escalar, 2
 - producto, 5
 - proyección, 5
- Esfera,
 - abierta, 108
 - con asas, 119, 261
 - meridianos de una, 161
 - osculatriz, 97
 - paralelos de una, 161
- Espacio euclídeo, 1
- Espiral logarítmica, 86, 99, 106
- Euler,
 - característica de, 262
 - teorema de, 208
- Evoluta, 91, 104
- Exterior, 128
- Familia(s) conjugadas de curvas, 200
- Flexión, 266
 - invariante de, 266
- Forma fundamental,
 - primera, 181
 - segunda, 186
 - tercera, 209
- Fórmula(s)
 - de Beltrami-Enneper, 196
 - de Frenet-Serret, 84
 - de Gauss-Bonnet, 260
 - de Rodríguez, 198
 - de Taylor, 31, 143
- Frenet-Serret, fórmula de, 84
- Función(es),
 - acotada, 25
 - analítica, 32, 41
 - bicontinuas, 117
 - compuesta, 139
 - continua, 28, 133
 - coordenada, 137
 - de clase C^m , 30, 142
 - derivables, 135, 138, 140
 - derivación de, 28, 30, 135
 - límite de, 25, 133
 - lineal, 131, 132
 - representación matricial de una, 132
- Gauss, ecuaciones de, 215
 - teorema egregium de las, 216
- Gauss-Bonnet, fórmula de, 260
- Gausiana (curvatura), 196
- Generatriz(es),
 - de un cilindro, 161
 - de una superficie reglada, 172
- Geodésico(a), 250
 - circunferencia (círculo), 250
 - coordenada, 251
 - coordenadas polares, 253
 - curvatura, 247
 - triángulo, 261
- Geometría(s),
 - elíptica, 257
 - hiperbólica, 257
 - intrínseca, 244, 246
 - no-euclidianas, 257
- Green, teorema de, 259
- Heine-Borel, teorema de, 114
- Hélice,
 - circular, 48, 54, 66, 72, 73, 75, 85, 89, 103
 - general, 76, 81, 83, 98, 107
- Helicoide recto, 190
- Hemisimétrico (antisimétrico), 225
- Hiperboloide, 174
- Homeomorfismo, 118
- Identidades vectoriales, 9
- Indicatriz,
 - binormal, 75, 83
 - de Dupin, 193
 - normal principal, 75
 - tangente, 74, 83
- Índice,
 - libre, 220
 - mudo, 220
- Interior, 121, 259
- Intrínseca(s),
 - distancia, 246
 - ecuaciones, 84
 - geometría, 244, 246
- Invariante de flexión, 266
- Involuta, 88, 103
- Isometría, 244
- Isométrica, aplicación, 244

- Jacobiano(a), 137
 - matriz, 137
- Jordan, arco de, 258
- Kronecker,
 - delta de, 223
 - símbolos de, 6
- Landau, símbolos de, 31, 133
- Límite, punto (véase punto de acumulación), 111
- Líneas de curvatura, 196
- Liouville,
 - fórmula de, 270
 - superficie de, 269, 277
- Longitud,
 - de un arco, 59
 - de un vector, 1
- Matriz, jacobiana, 137
- Meridiano de una esfera, 161
- Moebius, cinta de, 1, 181
- Normal,
 - curvatura, 190
 - principal, 67, 70
 - principal unitaria, 67
 - sección, 191
 - unitaria (de una superf.), 167
- Orden,
 - de una matriz, 131
 - de un tensor, 222
- Osculador,
 - círculo, 95
 - paraboloide, 187
 - plano, 69, 94, 96
- Osculatriz, esfera, 97
- Paraboloide,
 - elíptico, 174
 - hiperbólico, 172
 - osculador, 187
- Paralelo(s) de una esfera, 161
- Parámetro(s), 45, 160
 - naturales, 54
- Plano,
 - hiperbólico, 258
 - osculador, 69, 93, 96
 - rectificante, 70
- Primeros coeficientes fundamentales, 181
- Principal,
 - curvatura, 193
 - dirección, 193
 - normal, 67, 69
- Producto,
 - escalar (punto) de vectores, 5
 - exterior de tensores, 226
 - vectorial de vectores, 8
 - triple de vectores, 8
- Propiedades,
 - globales, 1, 145
 - locales, 1, 145
- Proyección,
 - escalar, 5
 - estereográfica, 241
 - ortogonal, 49
 - vectorial, 5
- Punto,
 - de acumulación (o límite), 111
 - de inflexión, 66, 69, 79
 - elíptico, 188
 - hiperbólico, 188
 - parabólico, 188
 - plano, 188, 189
 - umbilical elíptico, 195
 - umbilical parabólico, 195
- Radio,
 - de curvatura, 1, 66
 - de torsión, 97, 100
- Recubrimiento abierto, 114
- Regla de la cadena, 30, 139, 140
- Reglada(s), superficie(s), 172
- Representación,
 - canónica, 88
 - implícita de curvas, 50
 - implícita de superficies, 174
 - matricial de funciones lineales, 132
 - natural, 54
 - paramétrica regular de curvas, 45, 59
 - paramétrica regular de superficies, 159
- Riccati, ecuación de, 86
- Riemann,
 - coordenadas normales de, 272
 - símbolos de, 228
 - tensor de curvatura de, 228
- Rodríguez, fórmula de, 198
- Sección normal, 189
- Segunda curvatura, 72
- Segundos coeficientes fundamentales, 186
- Sendoesfera, 257
- Silla de montar, 189
- Símbolos de,
 - Christoffel, 215, 227
 - Kronecker, 6
 - Landau, 31, 133
 - Riemann, 228
- Sistemas de coordenadas afines, 34
- Superficie(s),
 - aplicables, 265
 - compacta, 170
 - conexa, 169
 - cuadráticas, 174
 - curva de base (directriz) de una superficie reglada, 172
 - definición de, 164
 - desarrollables, 273
 - de curvatura gaussiana constante, 256
 - de revolución, 171
 - generatrices de una superficie de revolución, 172

- orientable, 180
- orientada, 170, 180
- regladas, 172, 180
- tangente de una curva, 88, 104, 177, 203
- superior, 52
- Tangente unitaria, 64
- Taylor, fórmula de, 31, 143
- Tensor(es),
 - absoluto, 223
 - adición de, 226
 - campo de, 222
 - contracción de, 227
 - contravariante, 222
 - covariante, 222
 - definición de, 222
 - de curvatura de Riemann, 228
 - hemisimétrico (antisimétrico), 224
 - producto externo de, 226
 - recíprocos, 240
 - simétricos, 225
- Teorema,
 - de Euler, 208
 - de Green, 259
 - de Heine-Borel, 114
 - de existencia y unicidad de superficies, 216
 - de la función inversa, 144
 - del valor medio, 152
 - egregium (de Gauss), 216
- Toro, 110, 112, 167, 189, 196
- Torsión, 73
 - radio de, 100
- Tractriz, 257
- Trasformación admisible de parámetros, 166
- Triedro móvil, 70
- Variedades, 221
- Vecindad (punto de acumulación), 23
- Vector(es),
 - adición de, 2
 - identidades vectoriales, 9
 - multiplicación por un escalar, 2
 - ortogonales, 6
 - producto escalar de, 5
 - producto vectorial de, 8
 - triple producto de, 9
 - unitario, 3
- Vectorial,
 - producto, 8
 - proyección, 5



OTROS LIBROS DE LA SERIE SCHAUUM CON TEMAS AFINES

Ayres:	ÁLGEBRA MODERNA
Ayres:	CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
Ayres:	ECUACIONES DIFERENCIALES
Ayres:	FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES
Ayres:	MATRICES
Ayres:	TRIGONOMETRÍA
Lipschutz:	ÁLGEBRA LINEAL
Lipschutz:	TEORÍA DE CONJUNTOS Y TEMAS AFINES
Lipschutz:	TOPOLOGÍA
Spiegel:	ÁLGEBRA SUPERIOR
Spiegel:	CÁLCULO SUPERIOR
Spiegel:	MANUAL DE FÓRMULAS Y TABLAS MATEMÁTICAS



9 789684 510968

schauum-mcgraw-hill
schauum-mcgraw-hill
schauum-mcgraw-hill
schauum-mcgraw-hill
schauum-mcgraw-hill
schauum-mcgraw-hill
schauum-mcgraw-hill